УДК 531.36+517.926.4 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. Т. 4 (62). 2017. Вып. 2
MSC 70E18, 70E40, 70E50, 70F25

НЕСУЩЕСТВОВАНИЕ ЛИУВИЛЛЕВЫХ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ЭЛЛИПСОИДА ВРАЩЕНИЯ ПО АБСОЛЮТНО ШЕРОХОВАТОЙ ПЛОСКОСТИ*

А. С. Кулешов, М. О. Ицкович

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Российская Федерация, 119991, Москва, Ленинские горы, 1

В данной работе при помощи алгоритма Ковачича доказывается отсутствие лиувиллевых решений в задаче о движении динамически симметричного эллипсоида вращения по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости для почти всех значений параметров задачи. Библиогр. 4 назв.

Ключевые слова: эллипсоид вращения, алгоритм Ковачича, лиувиллевы решения.

Введение. Рассмотрим задачу о движении по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости динамически симметричного эллипсоида вращения. В работах [1–3] было показано, что решение данной задачи сводится к интегрированию линейного дифференциального уравнения второго порядка относительно компоненты r угловой скорости эллипсоида в проекции на его ось динамической симметрии:

$$\frac{d^2r}{d\theta^2} + h_1(\theta)\frac{dr}{d\theta} + h_2(\theta)\, r = 0, \tag{1}$$

$$h_1(\theta) = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{4a_3^2\cos\theta}{\left(a_1^2\sin^2\theta + a_3^2\cos^2\theta\right)\sin\theta} + \frac{3\left(A_1a_1^2 - A_3a_3^2\right)ma_1^2a_3^2\sin\theta\cos\theta}{\left(a_1^2\sin^2\theta + a_3^2\cos^2\theta\right)\left(\left(A_1 + ma_3^2\right)A_3a_3^2\cos^2\theta + \left(A_3 + ma_1^2\right)A_1a_1^2\sin^2\theta\right)},$$

$$h_2(\theta) = -\frac{ma_1^2\left(\left(a_3^2 - a_1^2\right)^2A_3\sin^4\theta + a_3^2\left(A_1a_1^2 - A_3a_3^2\right)\left(1 + \cos^2\theta\right)\right)}{\left(a_1^2\sin^2\theta + a_3^2\cos^2\theta\right)\left(\left(A_1 + ma_3^2\right)A_3a_3^2\cos^2\theta + \left(A_3 + ma_1^2\right)A_1a_1^2\sin^2\theta\right)}.$$

Здесь m — масса эллипсоида, a_1 и a_3 — длины его полуосей, A_1 и A_3 — его экваториальный и осевой главные центральные моменты инерции, θ — угол между осью динамической симметрии эллипсоида и вертикалью. В случае, когда удается найти общее решение уравнения (1), дальнейшее решение задачи сводится к квадратурам.

В данной работе при помощи так называемого алгоритма Ковачича [4] доказывается отсутствие лиувиллевых решений дифференциального уравнения (1) для почти всех значений параметров. Работа построена следующим образом. В первом параграфе работы дается описание алгоритма Ковачича и показывается, как с его помощью находятся лиувиллевы решения линейного дифференциального уравнения второго порядка. Во втором параграфе алгоритм применяется для исследования существования лиувиллевых решений дифференциального уравнения (1).

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 16-01-00338 и № 17-01-00123).

1. Описание алгоритма Ковачича. Рассмотрим дифференциальное поле $\mathbb{C}(x)$ рациональных функций одного комплексного переменного x. Примем стандартные обозначения $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$ для множества целых чисел и множества рациональных чисел. Наша задача состоит в том, чтобы найти решение дифференциального уравнения

$$z'' + a(x)\, z' + b(x)\, z = 0, \tag{2}$$

где $a(x), b(x) \in \mathbb{C}(x)$. В работе Дж. Ковачича [4] был предложен алгоритм, позволяющий найти в явном виде так называемые лиувиллевы решения дифференциального уравнения (2), то есть решения, выражающиеся через лиувиллевы функции. В свою очередь, лиувиллевы функции являются элементами лиувиллева поля, где лиувиллево поле определяется следующим образом.

Определение. Пусть F — дифференциальное поле функций одного комплексного переменного x, которое содержит $\mathbb{C}(x)$, то есть F — поле характеристики ноль с операцией дифференцирования $()'$, действующей на элементы этого поля по правилам $(a+b)' = a' + b'$ и $(ab)' = a'b + ab'$ для любых a и b из F. Поле F называется *лиувиллевым*, если существует последовательность (башня) конечных расширений полей $\mathbb{C}(x) = F_0 \subseteq F_1 \subseteq \ldots \subseteq F_n = F$, получающаяся присоединением одного элемента, такая, что для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ $F_i = F_{i-1}(\alpha)$, где $\frac{\alpha'}{\alpha} \in F_{i-1}$ (то есть F_i образуется присоединением экспоненты неопределенного интеграла над F_{i-1}) или

$$F_i = F_{i-1}(\alpha), \quad \text{где} \quad \alpha' \in F_{i-1}$$

(то есть F_i образуется присоединением интеграла над F_{i-1}) или F_i является конечным алгебраическим расширением над F_{i-1} (то есть $F_i = F_{i-1}(\alpha)$, и α удовлетворяет полиномиальному уравнению конечной степени вида

$$a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_n\alpha^n = 0,$$

где $a_j \in F_{i-1}$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$ и не все равны нулю). $\square$

Таким образом, лиувиллевы функции строятся последовательно из рациональных функций с использованием алгебраических операций, неопределенного интегрирования и взятия экспоненты заданного выражения. Решение уравнения (2), выражающееся через лиувиллевы функции, наиболее точно соответствует понятию «решение в замкнутой форме» или «решение в квадратурах». Основное достоинство алгоритма Ковачича состоит в том, что он позволяет не просто установить факт существования или несуществования такого решения, но и предъявить его в явном виде, когда оно существует.

Для того чтобы привести дифференциальное уравнение (2) к более простому виду, сделаем замену переменных

$$y(x) = z(x)\, e^{\frac{1}{2}\int a(x)dx}. \tag{3}$$

Тогда уравнение (2) примет вид

$$y'' = h(x)\, y, \quad h(x) = \frac{1}{2}a' + \frac{1}{4}a^2 - b, \quad h(x) \in \mathbb{C}(x). \tag{4}$$

В дальнейшем будем предполагать, что дифференциальное уравнение второго порядка, с которым имеет дело алгоритм, записывается в виде (4). Следующая теорема, доказанная Дж. Ковачичем [4], определяет структуру решения данного дифференциального уравнения.

Теорема 1. *Для дифференциального уравнения* (4) *справедливы только следующие* 4 *случая.*

1. *Дифференциальное уравнение* (4) *имеет решение вида* $\eta = e^{\int \omega(x)dx}$ *и* $\omega(x) \in \mathbb{C}(x)$ *(лиувиллево решение типа 1).*

2. *Дифференциальное уравнение* (4) *имеет решение вида* $\eta = e^{\int \omega(x)dx}$, *где* $\omega(x)$ *— алгебраическая функция степени* 2 *над* $\mathbb{C}(x)$, *и случай* 1 *не имеет места (лиувиллево решение типа 2).*

3. *Все решения дифференциального уравнения* (4) *являются алгебраическими над* $\mathbb{C}(x)$ *и случаи* 1 *и* 2 *не имеют места. Решение уравнения* (4) *имеет в данном случае вид* $\eta = e^{\int \omega(x)dx}$ *и* $\omega(x)$ *— алгебраическая функция степени* 4, 6 *или* 12 *над* $\mathbb{C}(x)$ *(лиувиллево решение типа 3).*

4. *Дифференциальное уравнение* (4) *не имеет лиувиллевых решений.*

Следующая теорема, доказанная в работе Дж. Ковачича [4], определяет условия, необходимые для того, чтобы один из трех первых случаев, перечисленных в теореме 1, мог иметь место.

Теорема 2. *Для дифференциального уравнения* (4) *следующие условия являются необходимыми для того, чтобы один из трех первых случаев, перечисленных в теореме* 1, *имел место, то есть чтобы у уравнения* (4) *существовало лиувиллево решение специального вида, указанного при описании соответствующего случая.*

1. *Каждый полюс функции* $h(x)$ *имеет порядок* 1 *или четный порядок. Порядок* $h(x)$ *в точке* $x = \infty$ *четный или выше, чем второй.*

2. *Функция* $h(x)$ *имеет по меньшей мере один полюс или порядка* 2, *или нечетного порядка, большего чем* 2.

3. *Функция* $h(x)$ *не имеет полюсов порядка большего, чем* 2. *Порядок* $h(x)$ *в* ∞ *равен по меньшей мере* 2. *Если разложение функции* $h(x)$ *в сумму простейших дробей имеет вид*
$$h(x) = \sum_i \frac{\alpha_i}{(x - c_i)^2} + \sum_j \frac{\beta_j}{x - d_j},$$
то для любого i
$$\sqrt{1 + 4\alpha_i} \in \mathbb{Q}, \quad \sum_j \beta_j = 0$$
и, кроме того,
$$\sqrt{1 + 4\gamma} \in \mathbb{Q}, \quad \text{где} \quad \gamma = \sum_i \alpha_i + \sum_j \beta_j d_j.$$

Для нахождения лиувиллева решения типа 1 дифференциального уравнения (4) алгоритм Ковачича формулируется следующим образом (подробности см. в [4]). Предположим, что необходимые условия для существования решения типа 1 выполнены, и обозначим через Γ множество конечных полюсов функции $h(x)$.

Шаг 1. Для каждого $c \in \Gamma \bigcup \{\infty\}$ определим рациональную функцию $\left[\sqrt{h}\right]_c$ и два комплексных числа α_c^+ и α_c^- так, как описано ниже.

(c_1) Если $c \in \Gamma$ и c — полюс порядка 1, то $\left[\sqrt{h}\right]_c = 0,\ \alpha_c^+ = \alpha_c^- = 1$.

(c_2) Если $c \in \Gamma$ и c — полюс порядка 2, то $\left[\sqrt{h}\right]_c = 0$.

Пусть b — коэффициент при $1/(x-c)^2$ в разложении функции $h\,(x)$ на простейшие дроби. Тогда имеем

$$\alpha_c^{\pm} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+4b}.$$

(c_3) Если $c \in \Gamma$ и c — полюс порядка $2\nu \geq 4$ (необходимого четного порядка в силу соответствующих условий теоремы 2), тогда функция $\left[\sqrt{h}\right]_c$ представляет собой сумму членов, которые включают в себя все $1/(x-c)^i$ для $2 \leq i \leq \nu$ в разложении функции $\sqrt{h}$ в ряд Лорана в окрестности точки c. Причем для этой функции $\left[\sqrt{h}\right]_c$ имеются два значения, различающиеся знаком; одно из них может быть выбрано. Таким образом, получим

$$\left[\sqrt{h}\right]_c = \frac{a}{(x-c)^\nu} + \cdots + \frac{d}{(x-c)^2}.$$

Пусть b — коэффициент при $1/(x-c)^{\nu+1}$ у функции $h - \left[\sqrt{h}\right]_c^2$. Тогда имеем

$$\alpha_c^{\pm} = \frac{1}{2}\left(\pm\frac{b}{a} + \nu\right).$$

(∞_1) Если порядок функции $h\,(x)$ в точке $x = \infty$ больше, чем 2, то $\left[\sqrt{h}\right]_\infty = 0,\ \alpha_\infty^+ = 0,\ \alpha_\infty^- = 1$.

(∞_2) Если порядок функции $h\,(x)$ в точке $x = \infty$ равен 2, то $\left[\sqrt{h}\right]_\infty = 0$.

Пусть b — коэффициент при $1/x^2$ в разложении в ряд Лорана функции $h\,(x)$ в окрестности $x = \infty$. Тогда имеем

$$\alpha_\infty^{\pm} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+4b}.$$

(∞_3) Если порядок $h\,(x)$ в точке $x = \infty$ равен $-2\nu \leq 0$ (и является четным в силу условий теоремы 2), тогда функция $\left[\sqrt{h}\right]_\infty$ представляет собой сумму членов со степенями x^i, $0 \leq i \leq \nu$, разложения в ряд Лорана функции $\sqrt{h}$ в точке $x = \infty$ (может быть выбрана одна из двух возможностей). Тогда

$$\left[\sqrt{h}\right]_\infty = ax^\nu + \cdots + d.$$

Пусть b — коэффициент при $x^{\nu-1}$ у функции $h - \left(\left[\sqrt{h}\right]_\infty\right)^2$. Тогда имеем

$$\alpha_\infty^{\pm} = \frac{1}{2}\left(\pm\frac{b}{a} - \nu\right).$$

Шаг 2. Для каждого семейства $s = (s\,(c))_{c \in \Gamma \bigcup \{\infty\}}$, где $s\,(c)$ может быть как знаком $+$, так и знаком $-$, положим

$$d = \alpha_{\infty}^{s(\infty)} - \sum_{c \in \Gamma} \alpha_c^{s(c)}. \tag{5}$$

Если d является неотрицательным целым числом, введем функцию

$$\theta = \sum_{c \in \Gamma} \left(s\,(c) \left[\sqrt{h}\right]_c + \frac{\alpha_c^{s(c)}}{x - c} \right) + s\,(\infty) \left[\sqrt{h}\right]_{\infty}.$$

Если d не является неотрицательным целым числом, соответствующее семейство s исключается из рассмотрения. Если таким образом из рассмотрения будут исключены все возможные семейства s, значит случай 1 не имеет места.

Шаг 3. Для каждого семейства s будем искать многочлен P степени d (постоянная d определяется формулой (5)), удовлетворяющий дифференциальному уравнению $P'' + 2\theta P' + \left(\theta' + \theta^2 - h\right) P = 0$. Если такой многочлен отыщется для какого-либо из семейств s, то $\eta = P e^{\int \theta(x) dx}$ является искомым решением дифференциального уравнения (4). Если ни для одного из семейств s многочлен P найти не удалось, то случай 1 не имеет места для дифференциального уравнения (4).

Сформулируем алгоритм Ковачича для поиска решения типа 2 дифференциального уравнения (4). Обозначим через Γ множество конечных полюсов функции $h\,(x)$.

Шаг 1. Для каждого $c \in \Gamma \bigcup \{\infty\}$ определим множество E_c следующим образом.

(c_1) Если $c \in \Gamma$ — полюс порядка 1, то $E_c = \{4\}$.

(c_2) Если $c \in \Gamma$ — полюс порядка 2, и b — коэффициент при $1/(x-c)^2$ в разложении функции $h\,(x)$ на простейшие дроби, то

$$E_c = \left\{ \left(2 + k\sqrt{1 + 4b}\right) \bigcap \mathbb{Z} \right\}, \quad k = 0, \pm 2.$$

(c_3) Если $c \in \Gamma$ — полюс порядка $\nu > 2$, то $E_c = \{\nu\}$.

(∞_1) Если $h\,(x)$ имеет порядок > 2 в точке $x = \infty$, то $E_\infty = \{0, 2, 4\}$.

(∞_2) Если $h\,(x)$ имеет порядок 2 в точке $x = \infty$, и b — коэффициент при $1/x^2$ в разложении в ряд Лорана функции h в точке $x = \infty$, тогда

$$E_\infty = \left\{ \left(2 + k\sqrt{1 + 4b}\right) \bigcap \mathbb{Z} \right\}, \quad k = 0, \pm 2.$$

(∞_3) Если $h\,(x)$ имеет порядок $\nu < 2$ в точке $x = \infty$, то $E_\infty = \{\nu\}$.

Шаг 2. Рассмотрим семейства $s = (e_\infty, e_c)$, $c \in \Gamma$, где $e_c \in E_c$, $e_\infty \in E_\infty$ и по крайней мере одно из этих чисел является нечетным. Пусть

$$d = \frac{1}{2} \left(e_\infty - \sum_{c \in \Gamma} e_c \right). \tag{6}$$

Если d — неотрицательное целое число, то соответствующее семейство должно быть сохранено. В противном случае оно должно быть отброшено.

Шаг 3. Для каждого семейства, сохраненного на шаге 2, образуем рациональную функцию

$$\theta = \frac{1}{2}\sum_{c\in\Gamma}\frac{e_c}{x-c} \tag{7}$$

и попытаемся отыскать многочлен степени d (где d определяется формулой (6)) такой, что

$$P''' + 3\theta P'' + \left(3\theta^2 + 3\theta' - 4h\right)P' + \left(\theta'' + 3\theta\theta' + \theta^3 - 4h\theta - 2h'\right)P = 0. \tag{8}$$

Если успех достигнут, и соответствующий многочлен найден, положим

$$\varphi = \theta + \frac{P'}{P},$$

и пусть ω — решение квадратного уравнения (алгебраического уравнения степени 2) вида

$$\omega^2 - \varphi\omega + \frac{1}{2}\varphi' + \frac{1}{2}\varphi^2 - h = 0.$$

Тогда $\eta = e^{\int \omega(x)dx}$ — решение дифференциального уравнения (4). Если соответствующий многочлен P найти не удалось, случай 2 не имеет места.

Аналогично алгоритм Ковачича формулируется для поиска лиувиллевых решений типа 3 дифференциального уравнения (4).

2. Основные результаты. Зададимся вопросом о существовании лиувиллевых решений дифференциального уравнения (1). Сделаем в нем замену независимой переменной по формуле $\cos^2\theta = x$ и введем обозначения

$$\frac{A_3}{A_1} = A \in (0,\, 2)\,, \quad \frac{ma_1^2}{A_1} = B, \quad \frac{a_3^2}{a_1^2} = C, \quad \frac{1}{1-C} = x_1, \quad \frac{A+B}{A+B-(1+BC)\,AC} = x_2.$$

В результате уравнение (1) перепишется в виде

$$\frac{d^2r}{dx^2} + d_1(x)\frac{dr}{dx} + d_2(x)\,r = 0, \tag{9}$$

$$d_1(x) = \frac{3x-1}{2x(x-1)} - \frac{2(x_1-1)}{(x-1)(x-x_1)} + \frac{3(x_2-x_1)}{2(x-x_1)(x-x_2)},$$

$$d_2(x) = \\ = \frac{(x_2-x_1)\left(Ax^2 - \left((A-1)\left(x_1^2-2x_1+3\right)-x_1+3\right)x - \left((A-1)(x_1-2)-1\right)x_1\right)}{4(x_1-1)\left((A-1)x_1-A\right)(x-1)(x-x_1)(x-x_2)\,x}.$$

При помощи замены вида (3) приведем дифференциальное уравнение (9) к виду

$$\frac{d^2y}{dx^2} = E(x)\,y, \tag{10}$$

$$E(x) = \frac{c_0}{x} + \frac{b_0}{x^2} + \frac{c_1}{x-1} + \frac{b_1}{(x-1)^2} + \frac{c_{x_1}}{x-x_1} + \frac{b_{x_1}}{(x-x_1)^2} + \frac{c_{x_2}}{x-x_2} + \frac{b_{x_2}}{(x-x_2)^2},$$

$$b_1 = \frac{3}{4}, \quad b_0 = b_{x_1} = b_{x_2} = -\frac{3}{16},$$

$$c_0 = \frac{(2x_1x_2 - x_1 - 3x_2)(A-1)}{8x_2((A-1)x_1 + A)} + \frac{A\Big((x_2-1)(x_1+1) - (x_1-1)^2(2x_2-1)\Big)}{8x_1x_2(x_1-1)((A-1)x_1 - A)},$$

$$c_1 = -\frac{x_1x_2 - 2x_1 - 4x_2 + 5}{4(x_1-1)(x_2-1)},$$

$$c_{x_1} = \frac{(3x_1x_2 - 4x_1 + x_2)(x_1-1)A - 3x_1(x_1x_2 - 2x_1 + x_2)}{8x_1(x_1-1)(x_1-x_2)((A-1)x_1 - A)},$$

$$c_{x_2} = \frac{A(x_2-1)^2}{4x_2(x_1-1)(x_1-x_2)((A-1)x_1 - A)} + \\ + \frac{(x_1x_2 + x_1 - 2)A - (A-1)\left(2x_2^2 + x_1x_2 + x_1 - 4x_2\right)x_1}{8x_2(x_2-1)(x_1-x_2)((A-1)x_1 - A)}.$$

Таким образом, в общем случае функция $E(x)$ будет иметь четыре конечных полюса в точках $x = 0$, $x = 1$, $x = x_1$ и $x = x_2$. Будем считать, что все эти полюсы различны. В этом случае разложение функции $E(x)$ в ряд Лорана в окрестности точки $x = \infty$ имеет вид

$$E(x)\,|_{x=\infty} = \frac{b_\infty}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right), \qquad b_\infty = -\frac{3}{16} + \frac{A(x_1 - x_2)}{(x_1-1)((A-1)x_1 - A)}.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *При выполнении условия*

$$\sqrt{1 + 4b_\infty} \notin \mathbb{Q} \tag{11}$$

уравнение (10) *не имеет лиувиллевых решений.* □

Доказательство. Учитывая, что для коэффициента b_∞ справедливо условие

$$b_\infty = b_0 + b_1 + b_{x_1} + b_{x_2} + c_1 + x_1c_{x_1} + x_2c_{x_2} = \gamma,$$

можно сделать вывод, что лиувиллевых решений типа 3 дифференциальное уравнение (10) иметь не может, так как в силу условия (11) и теоремы 2 не выполняются необходимые условия существования таких решений. Аналогично обстоит дело и с лиувиллевыми решениями типа 1: постоянная d, определяемая по формуле (5) в процессе их нахождения, будет в рассматриваемом случае иррациональным числом, тогда как согласно алгоритму она должна быть числом целым неотрицательным. Таким образом, единственно возможными лиувиллевыми решениями, которыми может обладать дифференциальное уравнение (10), являются решения типа 2. Для их нахождения будем по шагам применять алгоритм Ковачича для определения решений типа 2.

Шаг 1. Определим следующие множества, состоящие из целых чисел:

$$E_1 = \{-2, 2, 6\}, \quad E_0 = \{1, 2, 3\}, \quad E_{x_1} = \{1, 2, 3\}, \quad E_{x_2} = \{1, 2, 3\}, \quad E_\infty = \{2\}.$$

Шаг 2. Теперь мы должны рассмотреть все возможные наборы $s = (e_\infty, e_1, e_0, e_{x_1}, e_{x_2})$ элементов множеств E_∞, E_1, E_0, E_{x_1}, E_{x_2}, причем в каждом наборе одно из чисел обязательно должно быть нечетным.

Вычислим величину d для каждого набора s по формуле (6). В соответствии с алгоритмом, число d должно быть неотрицательным целым числом. Анализируя все возможные наборы элементов множеств E_∞, E_1, E_0, E_{x_1} и E_{x_2} убеждаемся, что единственно возможной ситуацией, когда число d представляет собой целое число, является вариант $d = 0$, который имеет место для трех наборов чисел:

$$s_1 = (2,\, -2,\, 2,\, 1,\, 1)\,, \quad s_2 = (2,\, -2,\, 1,\, 1,\, 2)\,, \quad s_3 = (2,\, -2,\, 1,\, 2,\, 1)\,.$$

Шаг 3. Проведем проверку каждого из трех отмеченных наборов. Начнем с рассмотрения набора s_1. В соответствии с алгоритмом, по формуле (7) составим функцию θ, используя набор чисел s_1. Получим

$$\theta = \frac{1}{2(x - x_1)} + \frac{1}{2(x - x_2)} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x - 1}.$$

Полином степени $d = 0$ ($P \equiv 1$) должен тождественно удовлетворять дифференциальному уравнению (8). Уравнение (8) после подстановки в него $P \equiv 1$ и явных выражений для $h\,(x) = E\,(x)$ и θ тождественно обращается в ноль в следующих случаях:

1) $x_1 = x_2 = 1$, A — произвольное число;
2) $x_1 = x_2 = -1$, A — произвольное число;
3) $x_1 = x_2 = \dfrac{A}{A - 1}$, A — произвольное число;
4) $x_1 = 0$, $A = 0$, x_2 — произвольное число;
5) $x_1 = 1$, $A = 0$, x_2 — произвольное число.

Заметим, что поскольку по предположению все конечные полюсы функции $E\,(x)$ различны, ни один из перечисленных выше случаев иметь место не может. Таким образом, для набора чисел s_1 не удается найти решение типа 2 дифференциального уравнения (10).

Аналогично доказывается отсутствие лиувиллевых решений типа 2 для наборов чисел s_2 и s_3. Таким образом, в случае, когда все конечные полюсы функции $E\,(x)$ различны и выполняется условие (11), дифференциальное уравнение (10) не имеет лиувиллевых решений. Теорема доказана. □

Условие (11) будет справедливым для почти всех значений параметров задачи. Следовательно, для почти всех значений параметров задачи дифференциальное уравнение (10) не имеет лиувиллевых решений. Полученный результат позволяет сделать вывод, что при выполнении условия (11) лиувиллевы решения будут отсутствовать и у дифференциального уравнения (1). Заметим, однако, что при невыполнении условия (11) дифференциальное уравнение (10) может иметь лиувиллевы решения. Некоторые случаи существования лиувиллевых решений дифференциального уравнения (10) отмечены в работе [3].

Литература

1. *Чаплыгин С. А.* О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости // Труды отделения физических наук Общества любителей естествознания, антропологии и этнографии. 1897. Т. 9. Вып. 1. С. 10–16.

2. *Муштари Х. М.* О катании тяжелого твердого тела вращения по неподвижной горизонтальной плоскости // Математический сборник. 1932. Т. 39, № 1–2. С. 105–126.

3. *Dobrynin D. S., Kuleshov A. S.* Solvable cases in the problem of motion of a heavy rotationally symmetric ellipsoid on a perfectly rough plane // Procedia IUTAM. 2016. Vol. 19. P. 161–168.

4. *Kovacic J.* An algorithm for solving second order linear homogeneous differential equations // Journal of Symbolic Computation. 1986. Vol. 2. P. 3–43.

Статья поступила в редакцию 20 ноября 2016 г.; рекомендована в печать 22 декабря 2016 г.

Сведения об авторах

Кулешов Александр Сергеевич — кандидат физико-математических наук, доцент; kuleshov@mech.math.msu.su

Ицкович Михаил Олегович — аспирант; mishaitskovich@gmail.com

NONEXISTENCE OF LIOUVILLIAN SOLUTIONS IN THE PROBLEM OF MOTION OF A ROTATIONALLY SYMMETRIC ELLIPSOID ON A PERFECTLY ROUGH PLANE

Alexander S. Kuleshov, Mikhail O. Itskovich

Lomonosov Moscow State University, Leninskie Gory, 1, Moscow, 119991, Russian Federation; kuleshov@mech.math.msu.su, mishaitskovich@gmail.com

We consider the classical problem of nonholonomic system dynamics — the problem of motion of a rotationally symmetric ellipsoid on a fixed perfectly rough horizontal plane. It is well known that the solution of this problem is reduced to the integration of the second order linear differential equation with respect to r — the projection of the angular velocity of the ellipsoid onto its axis of symmetry. Using the Kovacic algorithm we prove the nonexistence of liouvillian solutions for the corresponding second order linear differential equation for almost all values of parameters of the problem. The paper is organized as follows. After the introductory paragraph, in the second paragraph we briefly discuss the Kovacic algorithm for solving the second order linear differential equation. In the third paragraph we apply this algorithm to the problem of motion of a rotationally symmetric ellipsoid on a perfectly rough horizontal plane and prove the nonexistence of liouvillian solutions in the considered problem. Refs 4.

Keywords: rotationally symmetric ellipsoid, Kovacic algorithm, liouvillian solutions.

References

1. Chaplygin S. A., "On a motion of a heavy body of revolution on a horizontal plane", *Regular and Chaotic Dynamics* **7**(2), 119—130 (2002).

2. Mushtari Kh. M., "The rolling of a heavy solid of revolution on a fixed horizontal plane", *Math. Sbornik* **39**(1–2), 105–126 (1932) [in Russian].

3. Dobrynin D. S., Kuleshov A. S., "Solvable cases in the problem of motion of a heavy rotationally symmetric ellipsoid on a perfectly rough plane", *Procedia IUTAM* **19**, 161–168 (2016).

4. Kovacic J., "An algorithm for solving second order linear homogeneous differential equations", *Journal of Symbolic Computation* **2**, 3–43 (1986).

Для цитирования: Кулешов А. С., Ицкович М. О. Несуществование лиувиллевых решений в задаче о движении эллипсоида вращения по абсолютно шероховатой плоскости // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 2. С. 291–299. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.213

For citation: Kuleshov A. S., Itskovich M. O. Nonexistence of liouvillian solutions in the problem of motion of a rotationally symmetric ellipsoid on a perfectly rough plane. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2017, vol. 4 (62), issue 2, pp. 291–299. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.213