

## ОБЛАСТИ ДОСТИЖИМОСТИ ПОЛОЖЕНИЙ ПЛАТФОРМЫ СТЬЮАРТА В ШЕСТИМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ОБОБЩЕННЫХ КООРДИНАТ\*

*Г. А. Леонов, П. Е. Товстик, Т. М. Товстик*

Санкт-Петербургский государственный университет,  
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Рассматривается кинематика и динамика платформы Стьюарта, представляющей собой твердое тело, опертое на шесть стержней переменной длины. Приводятся известные дифференциальные уравнения, описывающие движение платформы. Основное внимание уделяется построению областей достижимости (рабочих областей) в шестимерном пространстве обобщенных координат. Определяются проекции этих областей на подпространства меньшей размерности. Библиогр. 15 назв. Ил. 4. Табл. 3.

*Ключевые слова:* платформа Стьюарта, уравнения движения, шестимерная область достижимости.

**1. Введение.** Платформа Стьюарта [1] находит широкое применение в технике. Она используется для динамических испытаний оборудования в авиационной и космической технике, в машиностроении, станкостроении, для тренировки летчиков и водителей, для ориентации поверхностей радиотелескопов. В работах [2–4] изучается кинематика платформы Стьюарта, в [5, 6] анализируется область достижимости, в работах [7–15] решены различные задачи динамики платформы и управления ее движением. При решении задач управления необходимо располагать информацией об области возможных положений платформы в зависимости от ее конструкции.

Ниже основное внимание уделено построению границы области достижимости в шестимерном пространстве обобщенных координат, определяющих положение платформы. Найдены проекции этой области на подпространства меньшей размерности. Детально описаны одномерные и двумерные проекции при некоторых ограничениях, наложенных на положение и движение платформы. В работе [6] предложена общая теория границы области достижимости для случая системы с тремя степенями свободы. Здесь для системы с шестью степенями свободы представлены результаты частного характера.

**2. Основные предположения.** Рассмотрим классическую платформу Стьюарта, опертую на шесть стержней переменной длины. На рис. 1 показан общий вид платформы, а на рис. 2 представлены некоторые обозначения.



*Рис. 1.* Общий вид платформы Стьюарта.

\*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 16.01.00580-а, № 14.01.00271а).  
© Санкт-Петербургский государственный университет, 2017

Введем неподвижную систему координат  $O_0x_0y_0z_0$  с ортами  $\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0$  и подвижную систему координат  $Oxyz$  с ортами  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ , жестко связанную с платформой (рис. 2, а). Шесть стержней  $B_kA_k, k = \overline{1,6}$ , переменной длины моделируют гидравлические или пневматические цилиндры. Они шарнирно закреплены в неподвижных точках  $B_k$  основания и в точках  $A_k$  на платформе. Точки  $A_k$  и  $B_k$  лежат на окружностях радиусов  $R_a$  и  $R_b$  соответственно (рис. 2, б). В начальном положении расположение стержней симметрично с углом симметрии  $2\pi/3$ . Плоскости, в которых расположены точки  $A_k$  и  $B_k$ , параллельны; расстояние между ними равно  $h$ . Длины всех стержней равны  $l_0$ ; минимальное расстояние между соседними точками опоры равно  $d$  ( $B_1B_2 = A_2A_3 = \dots = d$ ).

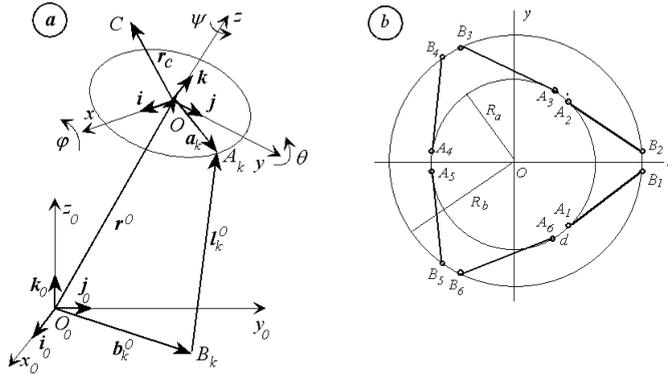


Рис. 2. Системы координат (а) и проекции стержней в начальном положении на горизонтальную плоскость (б).

Положение платформы определяется положением точки  $O$  (полюса)  $\mathbf{r}^0 = x_0\mathbf{i}_0 + y_0\mathbf{j}_0 + z_0\mathbf{k}_0$  и тремя ее последовательными углами поворота  $\psi, \theta$  и  $\varphi$ . Соответствующий тензор поворота  $\mathbf{P}(\psi, \theta, \varphi)$  равен

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_\psi C_\theta & -S_\psi C_\theta + C_\psi S_\theta S_\varphi & S_\psi S_\varphi + C_\psi S_\theta C_\varphi \\ S_\psi C_\theta & C_\psi C_\theta + S_\psi S_\theta S_\varphi & -C_\psi S_\varphi + S_\psi S_\theta C_\varphi \\ -S_\theta & C_\theta S_\varphi & C_\theta C_\varphi \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

где  $C_\varphi = \cos \varphi, S_\theta = \sin \theta$  и т. п.

Уравнение Пуассона имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}} &= \boldsymbol{\omega}^0 \times \mathbf{P}, \quad \boldsymbol{\omega}^0 = \omega_x^0 \mathbf{i}_0 + \omega_y^0 \mathbf{j}_0 + \omega_z^0 \mathbf{k}_0 = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k}, \\ \omega_x^0 &= \dot{\varphi} \cos \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi, \quad \omega_y^0 = \dot{\varphi} \cos \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \quad \omega_z^0 = \dot{\psi} - \dot{\varphi} \sin \theta, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $\boldsymbol{\omega}^0$  — угловая скорость платформы. Точкой обозначена производная по времени  $t$ .

Введем 6-мерный вектор обобщенных координат

$$\mathbf{q} = \{q_i\} = \{x_0, y_0, z_0, \varphi, \theta, \psi\}^T, \quad (2.3)$$

описывающий положение платформы. Здесь индекс  $T$  обозначает транспонирование.

Длины стержней  $l_k$  в текущем положении и их направления  $\mathbf{e}_k^0$  определяются соотношениями (рис. 2, а)

$$\overrightarrow{B_k A_k} = \mathbf{l}_k^0 = l_k \mathbf{e}_k^0 = \mathbf{r}^0 + \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_k - \mathbf{b}_k^0, \quad k = \overline{1, 6}, \quad (2.4)$$

где векторы  $\mathbf{a}_k = \overrightarrow{OA_k}$  и  $\mathbf{b}_k^0 = \overrightarrow{O_0 B_k}$  постоянны.

Если длины стержней  $l_k$  заданы, тогда для определения координат (2.3) необходимо решить систему шести нелинейных уравнений

$$(\mathbf{r}^0 + \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_k - \mathbf{b}_k^0)^2 = l_k^2 \quad \text{или} \quad l_k = l_k(q_j), \quad k, j = \overline{1, 6}. \quad (2.5)$$

Дифференцирование по времени (2.5) приводит к системе линейных уравнений относительно  $\dot{\mathbf{r}}^0$ ,  $\boldsymbol{\omega}^0$ :

$$\dot{\mathbf{r}}^0 \cdot \mathbf{e}_k^0 + (\boldsymbol{\omega}^0 \times \mathbf{a}_k^0) \cdot \mathbf{e}_k^0 = \dot{l}_k, \quad k = \overline{1, 6}, \quad \mathbf{a}_k^0 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_k. \quad (2.6)$$

Перепишем систему (2.6) в виде

$$\mathbf{L}_k \cdot \mathbf{V}^0 = \dot{l}_k, \quad k = \overline{1, 6}, \quad \mathbf{L}_k = \{\mathbf{e}_k^0, \mathbf{a}_k^0 \times \mathbf{e}_k^0\}, \quad \mathbf{V}^0 = (\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, \omega_x^0, \omega_y^0, \omega_z^0)^T \quad (2.7)$$

или в векторно-матричных обозначениях

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{V}^0 = \dot{\mathbf{l}}, \quad \dot{\mathbf{l}} = (\dot{l}_1, \dots, \dot{l}_6)^T, \quad \mathbf{A}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_1 \\ \dots \\ \mathbf{L}_6 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Следовательно, если функции  $l_k(t)$  заданы, в результате решения системы (2.8) находим вектор  $\mathbf{V}^0$ , а затем производные  $\dot{\varphi}$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\psi}$ :

$$\dot{\varphi} = \frac{\omega_y^0 \sin \psi + \omega_x^0 \cos \psi}{\cos \theta}, \quad \dot{\theta} = \omega_y^0 \cos \psi - \omega_x^0 \sin \psi, \quad \dot{\psi} = \omega_z^0 + \dot{\varphi} \sin \theta. \quad (2.9)$$

Условием разрешимости системы (2.8) является неравенство

$$\det(\mathbf{A}) \neq 0, \quad (2.10)$$

которое в конечном счете накладывает ограничения на функции  $l_k(t)$ .

**3. Уравнения движения.** Уравнение движения центра тяжести  $C$  платформы (рис. 2, а) и уравнение моментов относительно точки  $C$  в неподвижной системе координат имеют вид [10, 11]

$$m(\ddot{\mathbf{r}}^0 + \dot{\boldsymbol{\omega}}^0 \times \mathbf{r}_c^0 + \boldsymbol{\omega}^0 \times (\boldsymbol{\omega}^0 \times \mathbf{r}_c^0)) + mg\mathbf{k}_0 = \mathbf{F}^0 = \sum_{k=1}^6 F_k \mathbf{e}_{kt}^0, \\ \mathbf{P} \cdot \mathbf{J}_c \cdot \mathbf{P}^T \dot{\boldsymbol{\omega}}^0 + \boldsymbol{\omega}^0 \times (\mathbf{J}_c \cdot \mathbf{P}^T \boldsymbol{\omega}^0) = \mathbf{M}^0 = \sum_{k=1}^6 F_k (\mathbf{a}_k^0 - \mathbf{r}_c^0) \times \mathbf{e}_{kt}^0, \quad \mathbf{r}_c^0 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{r}_c, \quad (3.1)$$

где  $m$ ,  $\mathbf{J}_c$  — масса платформы и ее тензор инерции относительно точки  $C$ ,  $g$  — ускорение свободного падения,  $\ddot{\mathbf{r}}^0$  — ускорение точки  $O$ ,  $F_k$  — силы, действующие на платформу со стороны стержней. Через  $\mathbf{F}^0$  и  $\mathbf{M}^0$  обозначены главный вектор и главный момент сил  $F_k$  относительно точки  $C$ .

Система уравнений (3.1) и (2.9) — это система 12-го порядка по отношению к неизвестным функциям (2.3). Она описывает движение платформы, если заданы силы  $F_k$ .

Если же движение платформы  $\mathbf{q}(t)$  задано, становятся известными главный вектор  $\mathbf{F}^0$  и главный момент  $\mathbf{M}^0$ , а силы  $F_k$  могут быть найдены из уравнений (3.1). Перепишем эти уравнения в виде

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{F} = \mathcal{F}^0, \quad \mathbf{F} = \{F_1, \dots, F_6\}^T, \quad \mathcal{F}^0 = \{F_x^0, F_y^0, F_z^0, M_x^0, M_y^0, M_z^0\}^T, \quad (3.2)$$

где матрица  $\mathbf{A}$  та же, что и в (2.8). Опять необходимо потребовать выполнение условия (2.10).

Более точные уравнения, чем (3.1), учитывающие силы инерции движения стержней, приведены в [10, 11].

**4. Область достижимости.** Положим

$$l_k = l_0 + s_k, \quad k = \overline{1, 6}, \quad (4.1)$$

где  $s_k$  — вариации длин стержней по отношению к начальному положению.

Перепишем уравнения (2.5) в виде

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}(\mathbf{q}). \quad (4.2)$$

Чтобы найти  $\mathbf{q} = (q_k, k = \overline{1, 6})$  для заданных  $\mathbf{s} = (s_k, k = \overline{1, 6})$ , будем решать уравнения (4.2) методом итераций Ньютона:

$$\mathbf{q}^{n+1} = \mathbf{q}^n + \mathbf{B}(\mathbf{q}^n)(\mathbf{s} - \mathbf{s}^n), \quad \mathbf{s} = (s_k, k = \overline{1, 6}), \quad \mathbf{s}^n = (l_k(\mathbf{q}^n) - l_0, k = \overline{1, 6}), \quad (4.3)$$

где  $\mathbf{B}(\mathbf{q}) = (\mathbf{A}(\mathbf{q}))^{-1}$  и  $\mathbf{A}(\mathbf{q}) = \partial \mathbf{s} / \partial \mathbf{q}$  — матрица (2.8). В качестве нулевого приближения возьмем начальное положение платформы:  $\mathbf{q}^0 = \mathbf{s}^0 = \mathbf{0}$ . Вычисления показывают, что  $\mathbf{q}^n \rightarrow \mathbf{q}$  при  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ .

В качестве примера возьмем следующие размеры платформы:  $R_b = 1$  (принят за единицу длины),  $R_a = 0.7608$ ,  $h = 1.0189$ ,  $l_0 = 1.255$ ,  $d = 0.2$ . Тогда в начальном положении матрицы  $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}(\mathbf{0})$  и  $\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}(\mathbf{0}) = \mathbf{A}_0^{-1}$  имеют вид

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} -0.424 & -0.401 & 0.812 & -0.490 & -0.377 & -0.442 \\ -0.424 & 0.401 & 0.812 & 0.490 & -0.377 & 0.442 \\ 0.559 & -0.166 & 0.812 & 0.571 & -0.236 & -0.442 \\ -0.136 & -0.568 & 0.812 & 0.081 & 0.612 & 0.442 \\ -0.136 & 0.568 & 0.812 & -0.081 & 0.612 & -0.442 \\ 0.559 & 0.166 & 0.812 & -0.571 & -0.236 & 0.442 \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

$$\mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} -0.455 & -0.455 & 0.531 & -0.075 & -0.075 & 0.531 \\ -0.350 & 0.350 & -0.219 & -0.569 & 0.569 & 0.219 \\ 0.205 & 0.205 & 0.205 & 0.205 & 0.205 & 0.205 \\ -0.394 & 0.394 & 0.520 & 0.126 & -0.126 & -0.520 \\ -0.373 & -0.373 & -0.155 & 0.528 & 0.528 & -0.155 \\ -0.377 & 0.377 & -0.377 & 0.377 & -0.377 & 0.377 \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Рассмотрим куб  $S_\delta$  в евклидовом пространстве  $R_6$  с границей  $\Gamma_s$ :

$$S_\delta: |s_k| \leq \delta, \quad k = \overline{1, 6}. \quad (4.6)$$

Будем считать, что длины стержней  $l_k$  (по конструктивным соображениям) могут меняться лишь в пределах  $l_0 - \delta \leq l_k \leq l_0 + \delta$ ,  $k = \overline{1, 6}$ . Нашей задачей является описать область возможных значений координат  $q_k$  (область достижимости)  $Q_\delta : (q_k, k = \overline{1, 6})$  с границей  $\Gamma_q$  в пространстве обобщенных координат, если длины стержней лежат в указанных пределах.

Общий способ построения границы  $\Gamma_q$  состоит в следующем. Берем произвольную параметрически заданную кривую

$$q_k = q_k(\tau), \quad \tau \geq 0, \quad q_k(0) = 0, \quad k = \overline{1, 6}, \quad (4.7)$$

и ищем первую точку  $\tau = \tau_*$ , для которой

$$\mathbf{s}(\tau_*) = \mathbf{s}(\mathbf{q}(\tau_*)) \in \Gamma_s \quad \text{или} \quad \det(\mathbf{A}(\mathbf{q}(\tau_*))) = 0. \quad (4.8)$$

Тогда будем иметь  $\mathbf{q}(\tau_*) \in \Gamma_q$ .

Ниже при частных предположениях обсуждаются более простые способы построения границы  $\Gamma_q$ .

**5. Линейное приближение.** Если максимальное изменение  $\delta$  длин стержней мало по сравнению с радиусом  $R_b$  (именно,  $\delta \ll 1$ ), тогда уравнение (4.2) приближенно дает линейные соотношения между векторами  $\mathbf{s}$  и  $\mathbf{q}$ :

$$\mathbf{s} = \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{q}, \quad \mathbf{q} = \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{s}, \quad (5.1)$$

из которых может быть получен ряд приближенных оценок для пределов изменения обобщенных координат  $q_k$ .

**5.1.** Оценки проекций множества  $Q_\delta$  на ось  $q_k$ , непосредственно следующие из соотношения  $\mathbf{q} = \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{s}$ , имеют вид

$$-q_k^g \delta \leq q_k \leq q_k^g \delta, \quad q_k^g = \sum_{j=1}^6 |b_{kj}|, \quad k = \overline{1, 6}, \quad \mathbf{B}_0 = \{b_{kj}\}. \quad (5.2)$$

**5.2.** Находим оценки пересечения множества  $Q_\delta$  и оси  $q_k$ :

$$-q_k^r \delta \leq q_k \leq q_k^r \delta \quad \text{при} \quad q_i = 0, \quad i \neq k, \quad k = \overline{1, 6}, \quad (5.3)$$

где коэффициенты имеют вид

$$q_k^r = \min_j \{1/|a_{jk}|\}, \quad \mathbf{A}_0 = \{a_{jk}\}. \quad (5.4)$$

**5.3.** Граница двумерной проекции пространства  $Q_\delta$  на любую плоскость  $q_k q_n$  может быть представлена в полярных координатах  $r, \alpha$ :

$$q_k = r(\alpha)\delta \cos \alpha, \quad q_n = r(\alpha)\delta \sin \alpha, \\ r(\alpha) = \sum_{j=1}^6 |b_{kj} \cos \alpha + b_{nj} \sin \alpha|, \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi. \quad (5.5)$$

**5.4.** Построение пересечения пространства  $Q_\delta$  плоскостью  $q_k q_n$  (при  $q_i = 0$  при  $i \neq k, i \neq n$ ) является более сложным. Сначала решаем вспомогательную систему линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^6 b_{kj} c_j = \hat{q}_k, \quad \sum_{j=1}^6 b_{nj} c_j = \hat{q}_n, \quad \sum_{j=1}^6 b_{ij} c_j = 0, \quad i \neq k, i \neq n, \quad (5.6)$$

с неизвестными  $\xi_m = (\hat{q}_k, \hat{q}_n, c_i \ (i \neq k, i \neq n))$ . В этой системе величины  $c_k$  и  $c_n$  считаются заданными. Решение имеет вид  $\xi_m = a_{m1}c_k + a_{m2}c_n$ . Затем находим область на плоскости  $c_k c_n$ , в которой  $|c_i| \leq 1$  для всех  $i = \overline{1, 6}$ . Наконец, по формулам  $q_k = a_{11}c_k + a_{12}c_n$ ,  $q_n = a_{21}c_k + a_{22}c_n$  находим область на плоскости  $q_k q_n$ .

**6. Численные примеры.** Возьмем те же размеры платформы, что и в п. 4.

**6.1.** Сначала обсудим одномерные пределы изменения обобщенных координат, определяемые в линейном приближении по формулам (5.2) и (5.3). Коэффициенты  $q_k^g$  и  $q_k^r$  приведены в таблице 1. Во всех случаях имеем  $q_k^g \geq q_k^r$ , так как величины  $q_k^r$  получены при наличии ограничений. Однако  $q_3^g = q_3^r$  и  $q_6^g = q_6^r$ , так как в этих случаях в силу симметрии относительно перемещения и поворота вокруг оси  $z$  ограничения выполнены автоматически.

Таблица 1. Одномерные пределы в линейном приближении

	$q_1 = x_0$	$q_2 = y_0$	$q_3 = z_0$	$q_4 = \varphi$	$q_5 = \theta$	$q_6 = \psi$
$q_k^g$	2.125	2.279	1.231	2.079	2.110	2.266
$q_k^r$	1.789	1.764	1.231	1.751	1.631	2.266

**6.2.** В таблице 2 для  $\delta = 0.2$  линейное приближение сравнивается с точными границами проекций и пересечений. Линейные границы  $q_k^g \delta$  и  $q_k^r \delta$  получены по формулам (5.2) и (5.3), они одинаковы (по модулю) для верхних и нижних границ изменения обобщенных координат.

Для получения точных границ  $q_k^{gm} \leq q_k \leq q_k^{gp}$  проекций решаем (описанным в п. 4 методом итераций) 64 системы уравнений (4.2)  $\mathbf{s} = \mathbf{s}(q)$  при  $\mathbf{s} \in S_\delta^0$ ,  $S_\delta^0 = \{s_j = \pm \delta, j = \overline{1, 6}\}$ . После чего находим

$$q_k^{gm} = \min_{\mathbf{s} \in S_\delta^0} q_k(\mathbf{s}), \quad q_k^{gp} = \max_{\mathbf{s} \in S_\delta^0} q_k(\mathbf{s}), \quad k = \overline{1, 6}. \quad (6.1)$$

Для построения границ пересечения пространства  $Q_\delta$  и прямой  $q_k$  вычисляем величины  $s_j$  по формулам (4.2), меняя  $q_k$  при  $q_i = 0, i \neq k$ , до тех пор, пока  $\max_{q_k} |s_j|$  не станет равным  $\delta$ . В результате находим  $q_k^{rm}$  и  $q_k^{rp}$ . Для координат  $x_0, z_0, \theta$  нижняя и верхняя точные значения границ различаются по модулю.

Таблица 2. Сравнение линейного приближения и точных результатов при  $\delta = 0.2$

	$q_1 = x_0$	$q_2 = y_0$	$q_3 = z_0$	$q_4 = \varphi$	$q_5 = \theta$	$q_6 = \psi$
$ q_k  \leq q_k^g \delta$	0.425	0.456	0.246	0.416	0.422	0.453
$q_k^{gm} \leq q_k \leq q_k^{gp}$	-0.421/0.431	$\pm 0.452$	-0.260/0.246	$\pm 0.416$	-0.426/0.468	$\pm 0.470$
$ q_k  \leq q_k^r \delta$	0.357	0.353	0.246	0.416	0.326	0.453
$q_k^{rm} \leq q_k \leq q_k^{rp}$	-0.377/0.318	$\pm 0.313$	-0.260/0.238	$\pm 0.335$	-0.328/0.340	$\pm 0.420$

**6.3.** Для принятых значений параметров величина  $\delta$  ограничена неравенством  $\delta < 0.295$ , ибо  $\min_{\mathbf{s} \in S_\delta^0} |\det(\mathbf{A})| = 0$  при  $\delta = 0.295$ .

**6.4.** Двухмерная проекция области  $G_\delta$  на плоскость  $xy$  в линейном приближении (см. п. 5.4) показана кривой 1 на рис. 3, *b*. При этом для определенности принято  $\delta = 1$ , ибо в линейном приближении форма области не зависит от  $\delta$ . Граница пересечения с плоскостью  $xy$  (при  $z_0 = \varphi = \theta = \psi = 0$ ) показана кривой 2 (в последнем случае платформа совершает поступательное движение в плоскости  $z = 0$ ). На рис. 3, *a*

показана граница области на вспомогательной плоскости  $c_1c_2$ , которая используется при построении кривой 2 (см. п. 5.4). Также на рис. 3, *b* показаны кривые 3, которые соответствуют пересечению области  $G_\delta$  с плоскостью  $xy$  при  $z_0 = 1$ ,  $\varphi = \theta = \psi = 0$ .

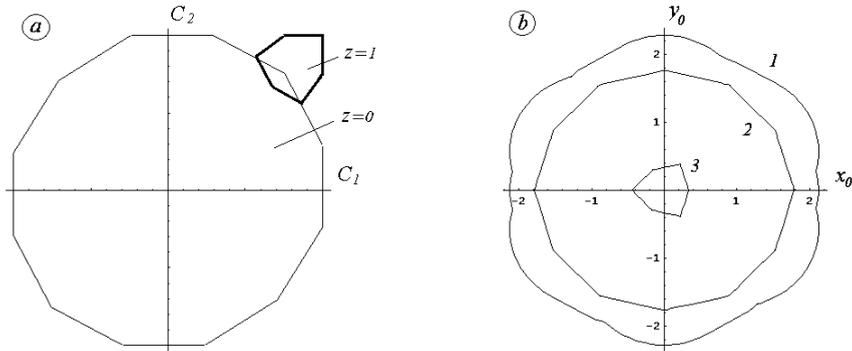


Рис. 3. Вспомогательные области на плоскости  $c_1c_2$  (а), границы проекции (кривая 1) и пересечений (кривые 2, 3) в линейном приближении (б).

**6.5.** Рассмотрим теперь построение точных кривых  $1e$  и  $2e$ , соответствующих при  $\delta = 0.2$  приближенным кривым  $1a$  и  $2a$  и показанных на рис. 4 для проекции на плоскость  $xy$  ( $1e$ ), для пересечения с этой плоскостью ( $2e$ ). В последнем случае обратимся к полярным координатам и используем формулы (4.7), (4.8) при

$$x_0 = r \cos \alpha, \quad y_0 = r \sin \alpha, \quad z_0 = \varphi = \theta = \psi = 0. \quad (6.2)$$

По формуле (4.2) для значений  $\mathbf{q}$ , заданных формулами (6.2), находим  $s$ . Увеличивая от нуля параметр  $r$  при фиксированном  $\alpha$ , находим первое значение  $r(\alpha)$ , при котором  $\max_k |s_k| = \delta$ . Точная ( $2e$ ) и приближенная ( $2a$ ) границы пересечения области  $G_\delta$  с плоскостью  $xy$  показаны на рис. 4, *b*. Видим, что они практически неразличимы. На рис. 4, *c* в увеличенном масштабе приведен график функции  $r(\alpha)$ , из которого следует, что кривая  $r(\alpha)$  имеет угловые точки и не является выпуклой.

Построение проекции области  $Q_\delta$  на плоскость  $xy$  оказывается более трудоемким. Здесь в отличие от п. 4.2 недостаточно вычисления решений  $x_0$  и  $y_0$  системы (4.2) на множестве  $S_\delta^0$ . Следует решать систему (4.2) при  $\mathbf{s} \in S_\delta$ , т. е. во всем кубе. Для перебора точек куба используем метод Монте-Карло. Для повышения вероятности попадания точек на грани куба введем случайные числа  $\xi_k$ , равномерно распределенные на промежутке  $[-N\delta, N\delta]$ ,  $N > 1$ , и положим

$$s_k = \begin{cases} -\delta, & \xi_k < -\delta, \\ \xi_k, & |\xi_k| \leq \delta, \\ \delta, & \xi_k > \delta, \end{cases} \quad k = \overline{1, 6}. \quad (6.3)$$

Было взято  $10^7$  наборов точек (6.3) и построена область с границей  $1e$  на плоскости  $x_0y_0$ , показанная на рис. 4, *a*. Видим, что кривые  $1e$  и  $1a$  заметно различаются. Однако величину  $\delta = 0.2$  следует считать относительно большой, ибо она составляет  $2/3$  от максимально возможного значения  $\delta = 0.295$ .

**6.6.** Область достижимости  $G_\delta \in R_6$  достаточно сложна, поэтому в [7] при решении задач управления использовалась рабочая область  $P_\delta \in G_\delta$ , имеющая форму

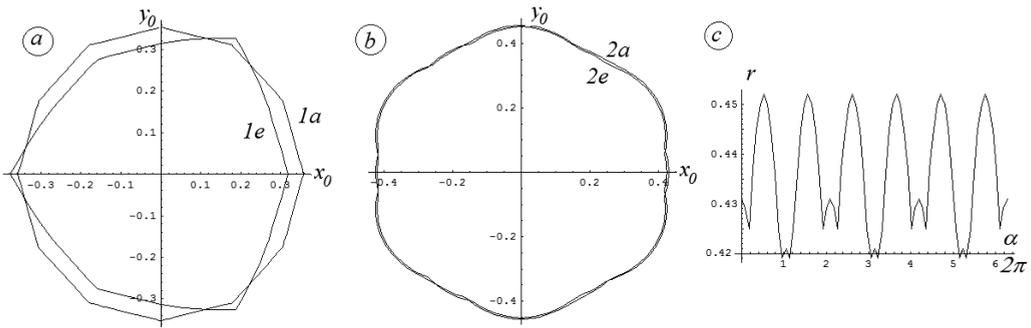


Рис. 4. Сравнение приближенных (кривые 1а, 2а) и точных (кривые 1е, 2е) границ проекций (а) и пересечений (б). Зависимость  $r(\alpha)$  (с).

параллелепипеда  $|q_k| \leq q_k^*$ . Здесь в линейном приближении при различных предположениях приводится решение задачи о нахождении параллелепипеда максимального объема  $V$ . В шестимерном пространстве имеем  $V = \prod_{k=1}^6 q_k^*$ . Методом Монте-Карло находим половины длин сторон этого параллелепипеда:

$$\begin{aligned} x_0^* &= 0.391\delta, & y_0^* &= 0.417\delta, & z_0^* &= 0.204\delta, \\ \varphi^* &= 0.388\delta, & \theta^* &= 0.440\delta, & \psi^* &= 0.384\delta. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Рассмотрим трехмерные сечения области  $G_\delta$  и найдем параллелепипеды максимального объема в этих сечениях. Половины длин сторон представлены в таблице 3.

Таблица 3. Трехмерные сечения максимального объема

	$x_0^*$	$y_0^*$	$z_0$	$\varphi^*$	$\theta^*$	$\psi^*$
1	$0.786\delta$	$0.832\delta$	$0.410\delta$	0	0	0
2	$0.786\delta$	$0.832\delta$	0	0	0	$0.754\delta$
3	$0.786\delta$	0	$0.410\delta$	0	$0.833\delta$	0
4	0	$0.832\delta$	$0.410\delta$	$0.680\delta$	0	0
5	0	0	0	$0.680\delta$	$0.833\delta$	$0.754\delta$

Строка 1 таблицы 3 соответствует поступательному перемещению платформы, строки 2, 3 и 4 — плоскому движению плоскостей  $xy$ ,  $xz$ ,  $yz$  соответственно, строка 5 — вращательному движению вокруг точки  $O$ .

**Заключение.** Получено условие разрешимости системы уравнений, описывающих движение платформы Стьюарта. В шестимерном пространстве обобщенных координат исследована область достижимости положений платформы при заданном диапазоне изменения длин штоков. Эта область не является выпуклой и содержит ребра. Рассмотрены одномерные и двумерные проекции и сечения области достижимости. Построены рабочие области в форме параллелепипедов, лежащие в области достижимости.

## Литература

1. Stewart D. A platform with six degrees of freedom // Proc. of the Institution of mechanical engineers. London, 1965. Vol. 180, № 15. P. 371–386.
2. Nanua P., Waldron K. J., Murthy V. Direct kinematic solution of a Stewart platform // IEEE Trans. on robotics and automation. 1990. Vol. 6, № 4. P. 438–443.

3. Harib K., Srinivasan K. Kinematic and dynamic analysis of Stewart platform-based machine tool structures // *Robotica*. 2003. Vol. 21, №05. P. 541–554.
4. Geng Z., Haynes L. S., Lee J. D., Carroll R. L. On the dynamic model and kinematic analysis of a class of Stewart platforms // *Robotics and autonomous systems*. 1992. Vol. 9. P. 237–254.
5. Adkins F. A., Haug E. J. Operational envelope of a spatial Stewart platform // *Trans. ASME. J. Mech. Des.* 1997. Vol. 31, №368. P. 330–332.
6. Bohigas O., Ros L., Manubens M. A complete method for workspace boundary determination. *Inst. Robot. and Inf. Ind. (CSIC-UPC)*. Barcelona, Spain.
7. Александров В. В. Абсолютная устойчивость моделируемых динамических систем // Доклады АН СССР. 1988. Т. 299, №2. С. 296–301.
8. Dasgupta B., Mruthyunjaya T. S. A Newton-Euler formulation for the inverse dynamics of the Stewart platform manipulator // *Mechanism and machine theory*. 1998. Vol. 33, №8. P. 1135–1152.
9. Leuret G., Liu K., Lewis F. L. Dynamic analysis and control of a Stewart platform manipulator // *J. robotic systems*. 1993. Vol. 10, №5. P. 629–655.
10. Леонов Г. А., Зегжда С. А., Кузнецов Н. В., Товстик П. Е., Товстик Т. П., Юшков М. П. Движение твердого тела, опертого на шесть стержней переменной длины // Доклады Академии наук. 2014. Т. 455, №3. С. 282–286.
11. Nedic N., Prsic D., Dubonjic L., Stojanovic V., Djordjevic V. Optimal casca de hydraulic control for a parallel robot PSO // *Int. J. Manuf. Technol.* DOI 10.1007/s00170-014-5735-5.
12. Andrievsky B. R., Kazunin D. V., Kostygova D. M., Kuznetsov N. V., Leonov G. A., Lobanov P., Volkov A. A. Differential Equations of Controlled Pneumatic Actuators for 6-DOF Stewart Platform // *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*. Vol. 15, N1. 2015. P. 14–24.
13. Andrievsky B. R., Kazunin D. V., Kostygova D. M., Kuznetsov N. V., Leonov G. A., Lobanov P., Volkov A. A. Control of Pneumatically Actuated 6-DOF Stewart Platform for Driving Simulator // 19th Int. Conf. on Methods and Models in Automation and Robotics, MMAR 2014m 2014, art. num. 6957433. P. 663–668.
14. Леонов Г. А., Зегжда С. А., Зуев С. М., Ершов Б. А., Казунин Д. В., Костыгова Д. М., Кузнецов Н. В., Товстик П. Е., Товстик Т. П., Юшков М. П. Динамика платформы Сьюарта и управление ее движением // Доклады академии наук. Т. 458, №1. 2014. С. 36–41.
15. Andrievsky B. R., Kazunin D. V., Kuznetsov N. V., Kuznetsova O. A., Leonov G. A., Seledzhi S. M. Modeling, Simulation and Control of Pneumatically Actuated Stewart Platform with Input Quantization // UKSim-AMSS 8th European Modelling Symposium, IEEE. 2014. P. 263–268. DOI 10.1109/EMS.2014.62.

Статья поступила в редакцию 19 ноября 2016 г.; рекомендована в печать 22 декабря 2016 г.

#### Сведения об авторах

Леонов Геннадий Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор;  
leonov@math.spbu.ru

Товстик Петр Евгеньевич — доктор физико-математических наук, профессор; peter.tovstik@mail.ru

Товстик Татьяна Михайловна — кандидат физико-математических наук, доцент;  
peter.tovstik@mail.ru

### WORKSPACES OF A STEWARD'S PLATFORM IN THE 6D SPACE OF GENERALISED COORDINATES

Gennady A. Leonov, Petr E. Tovstik, Tatiana M. Tovstik

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation;  
leonov@math.spbu.ru, peter.tovstik@mail.ru, peter.tovstik@mail.ru

Kinematics and dynamics of a classic Stewart's platform is studied. The platform is a rigid body supported on 6 rods of variable length. The well known differential equations, describing the platform motion, are presented. The main attention is paid to the analysis of workspaces in the 6D space of generalized coordinates. The projections of these workspaces on the spaces of the smaller dimensions are found. The 1D and 2D projections are built as in a linear so in a nonlinear approach. The 3D parallelepipeds of maximum volume, lying in the workspace, are found. Refs 15. Figs 4. Tables 3.

*Keywords:* Stewart platform, equations of motion, 6D workspace.

## References

1. Stewart D., "A platform with six degrees of freedom", *Proc. of the Institution of mechanical engineers* **180**(15), 371–386 (1965).
2. Nanua P., Waldron K. J., Murthy V., "Direct kinematic solution of a Stewart platform", *IEEE Trans. on robotics and automation* **6**(4), 438–443 (1990).
3. Harib K., Srinivasan K., "Kinematic and dynamic analysis of Stewart platform-based machine tool structures", *Robotica* **21**(05), 541–554 (2003).
4. Geng Z., Haynes L. S., Lee J. D., Carroll R. L., "On the dynamic model and kinematic analysis of a class of Stewart platforms", *Robotics and autonomous systems* **9**, 237–254 (1992).
5. Adkins F. A., Haug E. J., "Operational envelope of a spatial Stewart platform", *Trans. ASME. J. Mech. Des.* **31**(368), 330–332 (1997).
6. Bohigas O., Ros L., Manubens M., "A complete method for workspace boundary determination", *Inst. Robot. and Inf. Ind. (CSIC-UPC)* (Barcelona, Spain).
7. Aleksandrov V. V., "Absolute stability of simulated dynamic systems", *Doklady AN SSSR* **299**(2), 296–301 (1988) [in Russian].
8. Dasgupta B., Mruthyunjaya T. S., "A Newton-Euler formulation for the inverse dynamics of the Stewart platform manipulator", *Mechanism and machine theory* **33**(8), 1135–1152 (1998).
9. Lebret G., Liu K., Lewis F. L., "Dynamic analysis and control of a Stewart platform manipulator", *J. robotic systems* **10**(5), 629–655 (1993).
10. Leonov G. A., Zegzda S. A., Kuznetsov N. V., Tovstik P. E., Tovstik T. P., Yushkov M. P., "Motion of a Solid Driven by Six Rods of Variable Length", *Doklady Physics* **54**(3), 152–157 (2014).
11. Nedic N., Prsic D., Dubonjic L., Stojanovic V., Djordjevic V., "Optimal casca de hydraulic control for a parallel robot PSO", *Int. J. Manuf. Technol.* DOI 10.1007/s00170-014-5735-5.
12. Andrievsky B. R., Kazunin D. V., Kostygova D. M., Kuznetsov N. V., Leonov G. A., Lobanov P., Volkov A. A., "Differential Equations of Controlled Pneumatic Actuators for 6-DOF Stewart Platform", *Nonlinear Dynamics and Systems Theory* **15**(1), 14–24 (2015).
13. Andrievsky B. R., Kazunin D. V., Kostygova D. M., Kuznetsov N. V., Leonov G. A., Lobanov P., Volkov A. A., "Control of Pneumatically Actuated 6-DOF Stewart Platform for Driving Simulator", *19th Int. Conf. on Methods and Models in Automation and Robotics* MMAR 2014m, art. num. 6957433, 663–668 (2014).
14. Leonov G. A., Zegzhda S. A., Zuev S. M., Ershov B. A., Kazunin D. V., Kostygova D. M., Kuznetsov N. V., Tovstik P. E., Tovstik T. P., Yushkov M. P., "Dynamics and Control of the Stewart Platform", *Doklady Physics* **59**(9), 405–410 (2014).
15. Andrievsky B. R., Kazunin D. V., Kuznetsov N. V., Kuznetsova O. A., Leonov G. A., Seledzhi S. M., "Modeling, Simulation and Control of Pneumatically Actuated Stewart Platform with Input Quantization", *UKSim-AMSS 8th European Modeling Symposium, IEEE*, 263–268 (2014) DOI 10.1109/EMS.2014.62.

**Для цитирования:** Г. А. Леонов, П. Е. Товстик, Т. М. Товстик. Области достижимости положений платформы Стьюарта в шестимерном пространстве обобщенных координат // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 2. С. 300–309. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.214

**For citation:** Leonov G. A., Tovstik P. E., Tovstik T. M. Workspaces of a Stewart's platform in the 6D space of generalised coordinates. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2017, vol. 4 (62), issue 2, pp. 300–309. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.214