УДК 539.3 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. Т. 4 (62). 2017. Вып. 2
MSC 74J10, 74J15, 74G10, 74G15, 74K10, 74K20

ДЛИННОВОЛНОВЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ В АНИЗОТРОПНОЙ БАЛКЕ*

П. Е. Товстик[1], *Т. П. Товстик*[2], *Н. В. Наумова*[1]

[1] Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9
[2] Институт проблем машиноведения РАН,
Российская Федерация, 199178, Санкт-Петербург, Большой пр. В. О., 61

Методом асимптотического интегрирования исследуются длинноволновые колебания и волны в бесконечной неоднородной по толщине анизотропной балке-полоске. Построено дисперсионное уравнение второго порядка точности по отношению к относительной толщине балки. Отмечены дополнительные качественные эффекты, связанные с анизотропией. Библиогр. 25 назв. Табл. 2.

Ключевые слова: колебания, волны, анизотропная балка, асимптотические методы.

1. Введение. В работе построены приближенные модели в задаче о свободных длинноволновых колебаниях и распространении волн в анизотропной неоднородной бесконечной балке-полоске. Эта задача принадлежит к классу задач построения моделей меньшей размерности для балок, пластин и оболочек. Наиболее употребительной является модель Кирхгофа—Лява (КЛ), основанная на гипотезе прямой нормали [1, 2]. Более сложная и в некоторых случаях более точная модель Тимошенко—Рейсснера (ТР) учитывает поперечный сдвиг [3, 4]. Используются также модели, основанные на разложениях неизвестных функций в ряды по полиномам Лежандра [5, 6]. Многочисленные исследования посвящены моделям [7–11], использующим асимптотические разложения по степеням малой относительной толщины $\mu = h/L$, где h — толщина, L — длина волны в тангенциальном направлении.

Для анизотропных неоднородных по толщине (в частности, многослойных) балок, пластин и оболочек задача вывода моделей существенно усложняется. Методы, основанные на гипотезах, становятся неприменимыми или область их применимости существенно сужается. В то же время методы асимптотического интегрирования дают надежные результаты, что подтверждается рассмотрением тестовых примеров, в которых трехмерные задачи допускают точное решение. Установлено [12, 13], что для анизотропных однородных пластин и оболочек модель КЛ неприменима. Модель ТР нуждается в обобщении, при этом получается система 10 порядка, содержащая нехарактерные для теории пластин и оболочек интегралы пограничного слоя. Исключение этих интегралов и сведение системы 10 порядка к системе 8 порядка (как и в модели КЛ) представляет отдельную задачу [13]. В [14] методом асимптотического интегрирования для неоднородной по толщине анизотропной пластины в нулевом приближении получена система 8 порядка, не содержащая интегралов пограничного слоя. Различные вопросы, связанные с изгибом и распространением продольных волн в анизотропных и слоистых пластинах, обсуждаются в работах [15–17].

В работах [18–21] для пластины из трансверсально изотропного неоднородного (в частности, многослойного) материала и для балки из ортотропного неоднородного

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 16.01.00580-а и № 16.51.52025 МНТ-а).

DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.216

материала получены уравнения второго порядка точности. Оказалось, что как для пластины, так и для балки получается одна и та же разрешающая система уравнений 4 порядка, определяющая закон изменения неизвестных функций по толщине. Ценность модели второго порядка точности заключается в том, что она (в отличие от моделей КЛ и ТР) может быть использована для пластин и балок с весьма малой жесткостью на поперечный сдвиг, а также для многослойных пластин и балок, у которых чередуются жесткие и весьма мягкие слои (отношение модулей Юнга слоев может достигать 1000).

Попытка получить уравнения второго порядка точности для анизотропных пластин и оболочек (с 21 модулем упругости) пока не привела к успеху, ибо уравнения получаются очень громоздкими. Поэтому в настоящей работе методом асимптотического интегрирования выведены уравнения ВТ для анизотропной балки-полоски (с 6-ю модулями упругости). Рассматриваются свободные длинноволновые колебания и распространение продольных и изгибных волн, а также кратко исследуются высокочастотные длинноволновые колебания. Соотношения упругости при рассматриваемом плоском напряженном состоянии содержат 6 констант в отличие от 4 констант для ортотропной балки. Выяснено, какие дополнительные качественные эффекты связаны с общей (косой) анизотропией по сравнению с ортотропным (или изотропным) материалом.

2. Основные уравнения и предположения. Рассматривается плоская динамическая задача для бесконечно длинной анизотропной балки-полоски постоянной толщины h. Система уравнений движения имеет вид

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial z}+f_1(x,z,t)=0,\qquad \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial z}+f_3(x,z,t)=0, \tag{2.1}$$

где σ_{ij} — напряжения, $f_1,\ f_3$ — интенсивности внешней нагрузки в проекциях на оси $x,\ z$ декартовой системы координат, t — время. Для рассматриваемых ниже задач свободных колебаний $f_1=\rho\omega^2 u,\ f_3=\rho\omega^2 w$, где $u(x,z),\ w(x,z)$ — проекции перемещения на направления x и z соответственно, ω — частота колебаний, $\rho=\rho(z)$ — плотность материала.

Плоскости $z=0$ и $z=h$ считаем свободными, что дает граничные условия

$$\sigma_{13}(x,z,t)=\sigma_{33}(x,z,t)=0,\quad z=0,h. \tag{2.2}$$

Для анизотропного материала соотношения упругости, связывающие напряжения σ_{ij} с деформациями ε_{ij}, записываются так:

$$\begin{aligned}\sigma_{11}&=E_{11}\varepsilon_{11}+H_1\varepsilon_{13}+E_{13}\varepsilon_{33},\\ \sigma_{13}&=H_1\varepsilon_{11}+G_{13}\varepsilon_{13}+H_3\varepsilon_{33},\\ \sigma_{33}&=E_{13}\varepsilon_{11}+H_3\varepsilon_{13}+E_{33}\varepsilon_{33},\end{aligned}\qquad \boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}E_{11}&H_1&E_{13}\\ H_1&G_{13}&H_3\\ E_{13}&H_3&E_{33}\end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

$$\varepsilon_{11}=\frac{\partial u}{\partial x},\quad \varepsilon_{13}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x},\quad \varepsilon_{33}=\frac{\partial w}{\partial z}. \tag{2.4}$$

Считаем, что модули упругости в матрице $\boldsymbol{E}$ не зависят от x, но могут зависеть от z. Тем самым многослойные балки и балки из функционально градиентного материала не исключаются из рассмотрения. Предполагается, что матрица $\boldsymbol{E}$ является положительно определенной.

Разрешая соотношения (2.3) относительно величин $\varepsilon_{33}, \varepsilon_{13}, \sigma_{11}$, получаем

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{33} = c_3\sigma_{33} - c_\nu\varepsilon_{11} - c_1\varepsilon_{13}, \\ &\varepsilon_{13} = -c_h\varepsilon_{11} + c_g\sigma_{13} - c_1\sigma_{33}, \\ &\sigma_{11} = c_0\varepsilon_{11} + c_h\sigma_{13} + c_\nu\sigma_{33}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

где

$$\begin{gathered} c_0 = E_{11} - \frac{E_{13}^2 G_{13} - 2H_1H_3E_{13} + H_1^2E_{33}}{\Delta_1} = \frac{\Delta}{\Delta_1} > 0, \quad c_3 = \frac{G_{13}}{\Delta_1}, \quad c_1 = \frac{H_3}{\Delta_1}, \\ c_h = \frac{E_{33}H_1 - E_{13}H_3}{\Delta_1}, \quad c_\nu = \frac{E_{13}G_{13} - H_1H_3}{\Delta_1}, \quad c_g = \frac{E_{33}}{\Delta_1}, \end{gathered} \tag{2.6}$$

причем $\Delta_1 = G_{13}E_{33} - H_3^2 > 0$ и $\Delta > 0$ — определитель матрицы $\boldsymbol{E}$.

Основными неизвестными в системе (2.1), (2.3) считаем $w, u, \sigma_{13}, \sigma_{33}$. Они в силу формул (2.5) удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{\partial w}{\partial z} = -c_\nu\frac{\partial u}{\partial x} - c_1\sigma_{13} + c_3\sigma_{33}, \\ &\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial x} - c_h\frac{\partial u}{\partial x} + c_g\sigma_{13} - c_1\sigma_{33}, \\ &\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z} = -c_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c_h\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x} - c_\nu\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x} - \rho\omega^2 u, \\ &\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x} - \rho\omega^2 w. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Вводим безразмерные переменные (со значком $\hat{}$):

$$\begin{gathered} \{u, w, z\} = h\{\hat{u}, \hat{w}, \hat{z}\}, \quad x = L\hat{x}, \\ \{\sigma_{ij}, E_{ij}, G_{13}, H_i, c_0\} = E_0\{\hat{\sigma}_{ij}, \hat{E}_{ij}, \hat{G}_{13}, \hat{H}_i, \hat{c}_0\}, \\ \{c_1, c_3, c_g\} = \frac{1}{E_0}\{\hat{c}_1, \hat{c}_3, \hat{c}_g\}, \\ \rho = \rho_0\hat{\rho}, \quad \omega = \frac{\hat{\omega}}{T}, \quad t = T\hat{t}, \quad v = \frac{L}{T}\hat{v}, \quad \mu_0 = \frac{h}{L}, \\ E_0 = \frac{1}{h}\int_0^h c_0(z)dz, \quad \rho_0 = \frac{1}{h}\int_0^h \rho(z)dz, \quad T = \sqrt{\frac{\rho_0\, h^2}{E_0}}. \end{gathered} \tag{2.8}$$

Здесь L — длина волны в продольном направлении, E_0, ρ_0 — средние по толщине значения эквивалентного напряжения в продольном направлении c_0 и плотности материала, T — время распространения продольной волны на длину L, v — ее скорость. Для рассматриваемых ниже длинноволновых колебаний μ_0 — малый параметр толщины. Далее значок $\hat{}$ опускаем.

Для балки из ортотропного материала в безразмерных переменных будет

$$H_1 = H_3 = 0, \quad c_1 = c_h = 0, \quad c_0 = E_{11} - \frac{E_{13}^2}{E_{33}}, \quad c_g = \frac{1}{G_{13}}, \quad c_\nu = \frac{E_{13}}{E_{33}}, \quad c_3 = \frac{1}{E_{33}} \tag{2.9}$$

и для изотропного материала —

$$c_0 = \frac{E}{E_0(1-\nu^2)}, \quad c_g = \frac{2(1+\nu)E_0}{E}, \quad c_\nu = \frac{\nu}{1-\nu}, \quad c_3 = \frac{E_0(1-2\nu)(1+\nu)}{E(1-\nu)}, \quad (2.10)$$

где $E(z), \nu(z)$ — модуль Юнга и коэффициент Пуассона, причем E и E_0 являются размерными величинами по определению.

Если $H_1 \neq 0$ и/или $H_3 \neq 0$, анизотропию называем *косой*. Для нее $c_1 \neq 0$ и/или $c_h \neq 0$. В противном случае материал считается ортотропным (или изотропным).

Рассматриваем две задачи, сводящиеся к одной и той же системе уравнений, — задачу о свободных гармонических колебаниях и задачу распространения продольных волн. В задаче колебаний инерционные нагрузки в безразмерных обозначениях таковы:

$$\{f_1, f_3\} = \rho(z)\omega^2\{u(z), w(z)\}e^{i\mu x}e^{i\omega t}, \quad \mu = 2\pi\mu_0 = \frac{2\pi h}{L}, \quad (2.11)$$

где μ — новый малый параметр. Неизвестные функции ищем в виде

$$Y(x,z,t) = Y(z)e^{i\mu x}e^{i\omega t}, \quad Y = \{w, u, \sigma_{13}, \sigma_{33}\}. \quad (2.12)$$

В задаче распространения волн имеем

$$\{f_1, f_3\}(x,z,t) = \rho(z)\omega^2\{u(z), w(z)\}e^{i\mu(x-vt)}, \quad Y(x,z,t) = Y(z)e^{i\mu(x-vt)}, \quad (2.13)$$

где v — скорость распространения волны, связанная с ее длиной L (см. (2.11)) и частотой ω соотношением

$$v = \omega/\mu. \quad (2.14)$$

Нашей задачей является определение частоты ω и связанной с ней по формуле (2.14) скорости распространения волны v.

Формулы (2.11) подставим в систему уравнений (2.7) и положим для удобства $u(z) = i\tilde{u}(z)$, $\sigma_{13}(z) = i\tilde{\sigma}_{13}(z)$. Тогда, опуская значок $\sim$, получим

$$\begin{aligned}
&w' = \mu c_\nu u - ic_1\sigma_{13} + c_3\sigma_{33}, \qquad ()' \equiv ()/dz,\\
&u' = -\mu w - \mu i c_h u + c_g\sigma_{13} + ic_1\sigma_{33},\\
&\sigma_{13}' = \mu^2 c_0 u - \mu i c_h \sigma_{13} - \mu c_\nu \sigma_{33} - \rho\omega^2 u \equiv Z_1,\\
&\sigma_{33}' = \mu\sigma_{13} - \rho\omega^2 w \equiv Z_2,\\
&\sigma_{13}(0) = \sigma_{13}(1) = \sigma_{33}(0) = \sigma_{33}(1) = 0.
\end{aligned} \quad (2.15)$$

3. Обсуждение краевой задачи (2.15). При сделанном предположении о положительной определенности матрицы упругих модулей эта задача имеет неотрицательный спектр, что вытекает из энергетических соображений [19].

Несложно непосредственно доказать, что собственные значения ω_k^2 задачи (2.15), неотрицательны (положительны, если исключить перемещения балки как твердого тела). Умножим третье и четвертое уравнения (2.15) на комплексно сопряженные функции $\overline{u}$ и $\overline{w}$ и проинтегрируем их по z в пределах (0,1). Тогда после преобразований получим

$$\omega^2\int_0^1 \rho(|u|^2 + |w|^2)dz = \int_0^1 \left(\mu^2 c_0|u|^2 + c_g|\sigma_{13}|^2 + 2c_1\mathrm{Im}(\sigma_{13}\overline{\sigma}_{33}) + c_3|\sigma_{33}|^2\right)dz, \quad (3.1)$$

где $\mathrm{Im}(Y)$ — коэффициент при мнимой части Y. В силу (2.6) из соотношения (3.1) следует $\omega^2 > 0$, ибо $c_0 > 0$ в силу положительной определенности матрицы $\boldsymbol{E}$ и $c_g c_3 - c_1^2 = 1/\Delta_1 > 0$.

Коэффициенты $c_0, c_h, c_\nu, c_1, c_g, c_3, \rho$ в системе (2.15) зависят от z (в общем случае). При $\mu \ll 1$ эта система описывает низкочастотные изгибные (при $\omega^2 \sim \mu^4$) и продольные (при $\omega^2 \sim \mu^2$) колебания и две бесконечные серии высокочастотных колебаний. Для низкочастотных колебаний правые части системы (2.15) малы, и для построения частот и форм колебаний будем использовать метод итераций. Интегрирование по z первых двух уравнений (2.15) вводит произвольные функции, которые определяются из условий совместности третьего и четвертого уравнений (2.15) и граничных условий:

$$\langle Z_k(z) \rangle = 0, \quad k = 1, 2, \qquad \langle Y \rangle = \int_0^1 Y(z)\, dz, \tag{3.2}$$

где $\langle Y \rangle$ — оператор осреднения по толщине балки. В частности, в силу введенных обозначений будет $\langle c_0 \rangle = 1, \langle \rho \rangle = 1$.

Построено нулевое приближение по μ решения задачи (2.15), а также первое и второе приближения. Нулевое приближение зависит только от эквивалентной продольной жесткости материала $c_0(z)$. Первое приближение уточняет нулевое приближение при $c_h \neq 0$ (т. е. в случае косой анизотропии). Для ортотропной балки первое приближение совпадает с нулевым. Второе приближение, зависящее от остальных коэффициентов в системе (2.15), является достаточно громоздким. Цель его построения — уточнение предыдущих приближений, причем наиболее существенным это уточнение получается в случае малой жесткости на поперечный сдвиг. При этом коэффициент c_g в системе (2.15) является большим.

Для краткости записи (кроме оператора осреднения (3.2)) введем оператор интегрирования по толщине балки $\boldsymbol{I}(Y) = \int_0^z Y dz$.

Отметим легко проверяемые свойства этих операторов:

$$\langle \boldsymbol{I}(Y) \rangle = \langle Y \rangle - \langle zY \rangle, \quad \langle Y \boldsymbol{I}(Z) \rangle + \langle Z \boldsymbol{I}(Y) \rangle = \langle Y \rangle \langle Z \rangle. \tag{3.3}$$

Результат применения метода итераций зависит от начального приближения. Начнем с продольных колебаний, как более простых.

4. Продольные колебания. Возьмем $u^{(0)} = 1$ в качестве нулевого приближения. Тогда асимптотические порядки остальных неизвестных будут следующими:

$$u \sim 1, \quad w \sim \mu, \quad \sigma_{13} \sim \mu^2, \quad \sigma_{33} \sim \mu^3, \quad \omega^2 \sim \mu^2. \tag{4.1}$$

В нулевом приближении имеем $w^{(0)} = \mu\Big(w_1 + \boldsymbol{I}(c_\nu)\Big)$, где постоянная w_1 подлежит определению. Условие $\langle Z_1 \rangle = 0$ совместности третьего уравнения (2.15) дает $\omega_0^2 = \mu^2$. Далее находим $\sigma_{13}^{(0)} = \mu^2 \boldsymbol{I}(c_0) - \omega_0^2 \boldsymbol{I}(\rho) = \mu^2 \boldsymbol{I}(c_0 - \rho)$. Условие совместности четвертого уравнения (2.15) после преобразований дает величину $w_1 = \langle \boldsymbol{I}(c_0 - \rho - c_\nu) \rangle$. Определение напряжения $\sigma_{33}^{(0)} = \mu^3 \left(\boldsymbol{I}(\boldsymbol{I}(c_0 - \rho)) - \boldsymbol{I}(\rho(w_1 + \boldsymbol{I}(c_\nu))) \right)$ завершает построение нулевого приближения.

В первом приближении имеем $w^{(1)} = w^{(0)} = \mu(w_1 + \boldsymbol{I}(c_\nu))$, $u^{(1)} = 1 - \mu_0 i \boldsymbol{I}(c_h)$. Условие $\langle Z_1 \rangle = 0$ дает $\mu^2 \langle c_0(1 - \mu i \boldsymbol{I}(c_h)) \rangle - \mu^3 i \langle c_h \boldsymbol{I}(c_0 - \rho) \rangle - \omega_1^2 \langle \rho(1 - \mu i \boldsymbol{I}(c_h)) \rangle = 0$. Как и должно быть в силу вещественности величины ω^2, слагаемые с множителем

$i\mu^3$ с учетом тождеств (3.3) взаимно уничтожаются и $\omega_1^2 = \omega_0^2 = \mu^2$. В первом приближении получаем $\sigma_{13}^{(1)} = \mu^2 \boldsymbol{I}(c_0 - \rho) + \mu^3 i(\boldsymbol{I}((\rho - c_0)\boldsymbol{I}(c_h)) + \boldsymbol{I}(c_h \boldsymbol{I}(\rho - c_0)))$. Величина $\sigma_{33}^{(1)}$ не приводится, так как она не участвует при вычислении ω_2^2.

Наконец, во втором приближении будем иметь

$$
\begin{gathered}
u^{(2)} = 1 - \mu i \boldsymbol{I}(c_h) + \mu^2(\boldsymbol{I}(c_g \boldsymbol{I}(c_0 - \rho)) - \boldsymbol{I}(c_h \boldsymbol{I}(c_h)) - \boldsymbol{I}(c_h(w_1 + \boldsymbol{I}(c_\nu)))), \\
w^{(2)} = \mu(w_1 + \boldsymbol{I}(c_\nu)) - i\mu^3(w_3 + \boldsymbol{I}(\boldsymbol{I}(c_0 - \rho))).
\end{gathered} \tag{4.2}
$$

Условие $\langle Z_1 \rangle = 0$ приводит к дисперсионному уравнению второго порядка точности

$$
\omega^2 = \mu^2 + \mu^4 A + O(\mu^5), \quad A = A_g + A_\nu + A_h, \tag{4.3}
$$

где

$$
\begin{gathered}
A_g = \langle (c_0 - \rho)\boldsymbol{I}(c_g \boldsymbol{I}(c_0 - \rho)) \rangle, \\
A_\nu = -\langle c_\nu (\boldsymbol{I}\boldsymbol{I}(c_0 - \rho) - \boldsymbol{I}(\rho(w_1 + \boldsymbol{I}(c_\nu)))) \rangle, \\
A_h = \langle (\rho - c_0)(\boldsymbol{I}(c_h(\boldsymbol{I}(c_h + c_\nu) + w_1) + c_h \boldsymbol{I}((\rho - c_0)\boldsymbol{I}(c_h)) + c_h \boldsymbol{I}(c_h \boldsymbol{I}(\rho - c_0))) \rangle.
\end{gathered} \tag{4.4}
$$

Для балки из ортотропного материала имеем $c_h = A_h = 0$.

Если материал однородный (коэффициенты $c_0, c_g, c_\nu, c_h, \rho$ постоянны), то формулы (4.4) упрощаются, ибо в безразмерных обозначениях $c_0 = \rho = 1$. В результате получаем

$$
A_g = A_h = 0, \quad A = A_\nu = -\frac{c_\nu^2}{12}. \tag{4.5}
$$

В соответствии с формулой (2.14) скорость v_l распространения продольной волны в безразмерных переменных имеет вид

$$
v_l = \frac{\omega}{\mu} = 1 + \frac{\mu^2 A}{2} + O(\mu^3) \tag{4.6}
$$

или в исходных переменных —

$$
v_l = \sqrt{\frac{E_0}{\rho_0 h^2}} \left(1 + \frac{\pi A h^2}{L^2} + O\left(\frac{h^3}{L^3}\right)\right), \tag{4.7}
$$

где E_0 и ρ_0 — эквивалентная продольная жесткость и средняя плотность материала (см. (2.8)). Формула (4.7) описывает слабую дисперсию скорости продольной волны, т. е. слабую зависимость скорости распространения волны от ее длины. Эта дисперсия имеет место как для анизотропного, так и для изотропного материалов. Впервые дисперсия была обнаружена в работах Похгаммера [20] и Кри [21] при изучении распространения продольной волны по однородному изотропному стержню кругового поперечного сечения. Заметим, что в однородном анизотропном упругом пространстве плоские волны распространяются без дисперсии [19].

Косая анизотропия проявляется в величине коэффициентов E_0 и A и в появлении малого поперечного перемещения стержня.

5. Изгибные колебания. Возьмем $w^{(0)} = 1$ в качестве начального приближения в методе итераций. Тогда порядки неизвестных функций в системе (2.15) будут равны

$$
w \sim 1, \quad u \sim \mu, \quad \sigma_{13} \sim \mu^3, \quad \sigma_{33} \sim \mu^4, \quad \omega^2 \sim \mu^4. \tag{5.1}
$$

Нулевое приближение имеет вид

$$w^{(0)} = 1, \quad u^{(0)} = \mu z_*, \quad z_* = a - z, \quad a = \langle c_0 z \rangle, \quad \sigma_{13}^{(0)} = \mu^3 \boldsymbol{I}(c_0 z_*),$$
$$\mu^4 D = \omega_0^2, \quad D = \langle \boldsymbol{I}(c_0 z_*) \rangle = \left\langle c_0 z_*^2 \right\rangle, \quad \sigma_{33}^{(0)} = \mu^4 \boldsymbol{I}(\boldsymbol{I}(c_0 z_*)) - \omega_0^2 \boldsymbol{I}(\rho), \tag{5.2}$$

где a — координата нейтрального слоя, D — безразмерная изгибная жесткость, ω_0 — частота колебаний в нулевом приближении. Уравнение $\mu^4 D = \omega_0^2$ может быть получено в рамках гипотез Кирхгофа—Лява при соответствующем значении продольной жесткости c_0 балки.

Нулевое приближение совпадает с полученным ранее [16–18] нулевым приближением при описании колебаний трансверсально изотропной пластины, ибо при $c_h = c_1 = 0$ обе задачи описываются одной и той же системой уравнений (2.15).

Первое приближение имеет вид

$$w^{(1)} = 1, \quad u^{(1)} = \mu z_* + i\mu^2 (u_1 - \boldsymbol{I}(c_h z_*)). \tag{5.3}$$

Постоянная u_1 определяется из условия совместности $\langle Z_1 \rangle = 0$:

$$u_1 - \langle U_1 \rangle = 0, \quad U_1 = c_0 \boldsymbol{I}(c_h z_*) + c_h \boldsymbol{I}(c_0 z_*). \tag{5.4}$$

Далее получаем

$$\sigma_{13}^{(1)} = \mu^3 \boldsymbol{I}(c_0 z_*) + i\mu^4 \boldsymbol{I}(c_0 u_1 - U_1). \tag{5.5}$$

Величина ω_1^2 определяется из уравнения $\langle Z_2 \rangle = 0$, $Z_2 = \mu \sigma_{13}^{(1)} - \rho \omega_1^2$, что дает $\omega_1^2 = \mu^4 D + i\mu^5 \langle V_1 \rangle$, $V_1 = \boldsymbol{I}(c_0) u_1 - \boldsymbol{I}(U_1)$. Пользуясь тождествами (3.2), можно показать, что $\langle V_1 \rangle = 0$, что и должно быть, ибо в противном случае частота ω_1 была бы комплексной. Следовательно, $\omega_1 = \omega_0 = \mu^4 D$.

Во втором приближении имеем

$$w^{(2)} = 1 + \mu^2 \boldsymbol{I}(c_\nu z_*), \quad u^{(2)} = \mu z_* + i\mu^2 (u_1 - \boldsymbol{I}(c_h z_*)) + \mu^3 (u_2 + \boldsymbol{I}(U_2)),$$
$$U_2 = -\boldsymbol{I}(c_\nu z_*) + c_h (u_1 - \boldsymbol{I}(c_h z_*)) + c_g \boldsymbol{I}(c_0 z_*). \tag{5.6}$$

Постоянная u_2 определяется из условия совместности $\langle Z_1 \rangle = 0$, что дает $u_2 + \langle V_2 \rangle = 0$, где

$$V_2 = c_0 \boldsymbol{I}(U_2) + c_h \boldsymbol{I}(c_0 u_1 - U_1) - c_\nu \boldsymbol{I}(\boldsymbol{I}(c_0 z_*)) + c_\nu D \boldsymbol{I}(\rho) - D z_* \rho. \tag{5.7}$$

Далее находим

$$\sigma_{13}^{(2)} = \mu^3 \boldsymbol{I}(c_0 z_*) + i\mu^4 \boldsymbol{I}(c_0 u_1 - U_1) + \mu^5 \boldsymbol{I}(c_0 u_2 + V_2). \tag{5.8}$$

Наконец, условие $\langle Z_2 \rangle = 0$ дает значение второго порядка точности для частоты ω_2:

$$\omega_2^2 = \mu^4 D + \mu^6 B, \qquad B = \langle \boldsymbol{I}(c_0 u_2 + V_2) - D\rho \boldsymbol{I}(c_\nu z_*) \rangle = B_g + B_\nu + B_h + B_\rho, \tag{5.9}$$

где

$$\begin{aligned}
B_g &= -\left\langle c_g \left(\boldsymbol{I}(c_0 z_*)\right)^2 \right\rangle, \\
B_\nu &= -\left\langle c_0 z_* \boldsymbol{I}(\boldsymbol{I}(c_\nu z_*)) + c_\nu z_* \boldsymbol{I}(\boldsymbol{I}(c_0 z_*)) \right\rangle, \\
B_\rho &= -D \left\langle \rho z_*^2 \right\rangle + D \left\langle c_\nu z_* \boldsymbol{I}(\rho) - \rho \boldsymbol{I}(c_\nu z_*) \right\rangle, \\
B_h &= \left\langle c_h z_* \boldsymbol{I}(c_0) + c_0 z_* \boldsymbol{I}(c_h) \right\rangle \left\langle c_h \boldsymbol{I}(c_0 z_*) + c_0 \boldsymbol{I}(c_h z_*) \right\rangle - \\
&\quad - \left\langle c_h z_* \boldsymbol{I}(c_0 \boldsymbol{I}(c_h z_*)) + c_h z_* \boldsymbol{I}(c_h \boldsymbol{I}(c_0 z_*)) + c_0 z_* \boldsymbol{I}(c_h \boldsymbol{I}(c_h z_*)) \right\rangle.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Слагаемые B_g, B_ν, B_h учитывают, соответственно, влияние поперечного сдвига, пуассоновскую деформацию нормальных волокон и влияние косой анизотропии. Слагаемое B_ρ учитывает дополнительные силы инерции и состоит из двух частей, первая из которых связана с инерцией вращательного движения нормальных волокон, а вторая — с инерцией их пуассоновской деформации.

Для однородного материала, $c_0 = \rho = 1,\ a = 1/2$, и коэффициенты (5.10) принимают значения

$$D = \frac{1}{12}, \quad B_g = -\frac{c_g}{120}, \quad B_\nu = \frac{c_\nu}{60}, \quad B_\rho = -\frac{1}{144} - \frac{c_\nu}{72}, \quad B_h = -\frac{c_h^2}{360}. \tag{5.11}$$

При $c_1 = c_h = 0$ система (2.7) была ранее исследована в работах [16–18], ибо к ней сводятся задачи изгиба и колебаний трансверсально изотропной пластины. Коэффициенты B_g, B_ν и B_ρ в (5.10) с точностью до обозначений совпадают с полученными ранее. Коэффициент B_h учитывает влияние косой анизотропии.

Уравнение нулевого приближения $\mu^4 D = \omega_0^2$ может быть получено в рамках гипотезы прямой нормали Кирхгофа—Лява при соответствующем значении эквивалентной продольной жесткости c_0 балки (см. (2.6)). Для ортотропной балки слагаемое $\mu^6 B_g$ в формуле (5.6) может быть получено в рамках гипотез Тимошенко—Рейсснера, учитывающих сдвиг при соответствующем выборе эквивалентной жесткости на сдвиг [18]. При этом нормальное волокно изгибается, как кубическая парабола [17].

Косая анизотропия не приводит к существенному изменению частоты колебаний, однако в соответствии с формулами (5.6) форма прогиба претерпевает более существенные изменения. Возвращаясь к исходным обозначениям, с учетом (2.13) и принятого обозначения $u = i\tilde{u}$ запишем вещественные части формул (5.6) в виде

$$\begin{gathered} w = (1 + \mu^2 \boldsymbol{I}(c_\nu z_*)) \cos \mu x, \\ u = -(\mu z_* + \mu^3 (u_2 + \boldsymbol{I}(U_2))) \sin \mu x - \mu^2 (u_1 - \boldsymbol{I}(c_h z_*)) \cos \mu x. \end{gathered} \tag{5.12}$$

Гипотезам Кирхгофа—Лява соответствует соотношение $\partial u/\partial z + \partial w/\partial x = 0$, которому удовлетворяют лишь главные слагаемые в (5.12).

Как для анизотропной, так и для изотропной балок скорость v_b сильно зависит от длины волны L. В безразмерных переменных получаем

$$v_b = \mu\sqrt{D}\left(1 + \frac{\mu^2 B}{2D}\right) \tag{5.13}$$

и в исходных переменных —

$$v_b = \frac{2\pi h}{L}\sqrt{\frac{E_0 D}{\rho_0 h^2}}\left(1 + \frac{2\pi^2 h^2 B}{D L^2}\right). \tag{5.14}$$

На скорость волны v_b анизотропия влияет через коэффициенты E_0, D, B, не меняя качественной картины. Влияние на форму прогиба в соответствии с (5.12) более существенно.

6. Высокочастотные длинноволновые колебания. При построении колебаний в системе (2.15), по прежнему, параметр μ считаем малым. Ограничимся построением нулевого по μ приближения для однородной анизотропной балки. Тогда приходим к краевой задаче

$$\begin{aligned} &\sigma_{13}'' + \omega^2 c_g \sigma_{13} - \omega^2 c_1 \sigma_{33} = 0, \qquad && \sigma_{13}(0) = \sigma_{13}(1) = 0, \\ &\sigma_{33}'' - \omega^2 c_1 \sigma_{13} + \omega^2 c_3 \sigma_{33} = 0, \qquad && \sigma_{33}(0) = \sigma_{33}(1) = 0. \end{aligned} \tag{6.1}$$

(Для получения вещественного решения сделана обратная замена σ_{13} на $-i\sigma_{13}$.)

Для ортотропной балки имеем $c_1 = 0$, и задача (6.1) распадается на две. Одна из них описывает серию сдвиговых колебаний с $\omega_n^{(1)} = n\pi/\sqrt{c_g}$, $n = 1, 2, \ldots$, а другая — толщинных колебаний с $\omega_n^{(2)} = n\pi/\sqrt{c_3}$.

Для балки с косой анизотропией ($c_1 \neq 0$) также появляются две серии частот, в каждой из которых присутствуют оба напряжения σ_{13} и σ_{33}:

$$\omega_n^{(k)} = n\pi/\sqrt{\lambda^{(k)}}, \quad \sigma_{13}^{(k)} = c_1 \sin n\pi z, \quad \sigma_{33}^{(k)} = (c_g - \lambda^{(k)}) \sin n\pi z, \quad k = 1, 2, \tag{6.2}$$

где $\lambda^{(k)}$ — корни уравнения

$$\lambda^2 - (c_g + c_3)\lambda + c_g c_3 - c_1^2 = 0. \tag{6.3}$$

В силу неравенства $c_g c_3 - c_1^2 > 0$ оба корня уравнения (6.3) положительны.

На основании формул (6.2) отношение $\xi^{(k)}$ максимальных амплитуд толщинных и сдвиговых нвпряжений в нулевом приближении имеет вид

$$\xi^{(k)} = \frac{\max \sigma_{33}^{(k)}}{\max \sigma_{13}^{(k)}} = \frac{c_g - \lambda^{(k)}}{c_1}. \tag{6.4}$$

Слабая зависимость (порядка μ) этих частот от длины волны может быть найдена из первого приближения, которое здесь не рассматривается.

7. Примеры. В качестве тестового примера рассмотрим колебания однородной анизотропной балки с безразмерными параметрами

$$c_0 = \rho = 1, \quad c_\nu = 0.3, \quad c_g = c_3 = \eta, \quad c_h = c_1 = 0.5\eta, \quad \mu = 0.1, \tag{7.1}$$

причем параметр η будем менять. В работах [16–18, 22] показано, что для трансверсально изотропных пластин и ортотропных балок уточнение, связанное со слагаемым второго порядка точности $\mu^6 B$ в (5.6), существенно лишь в случае малой жесткости в поперечном направлении. Поэтому в (7.1) введен параметр η (при $\eta \gg 1$ поперечная жесткость мала).

Таблица 1.

η	ω_1	ε_2	ε_0	ω_2	$\varepsilon_0 \sim \varepsilon_2$	ω_3	ε_0	ω_4	ε_0
1	0.002884	10^{-7}	0.1%	0.099996	10^{-7}	2.566	0.1%	4.443	0.1%
10	0.002860	10^{-4}	0.3%	0.099998	10^{-5}	0.815	0.5%	1.398	0.6%
50	0.002545	1.2%	13%	0.099998	10^{-5}	0.376	3.5%	0.579	8.5%
100	0.001839	4.7%	60%	0.099998	10^{-5}	0.280	7.5%	0.371	19%

В таблице 1 для ряда значений η приведены первые четыре частоты, найденные в результате численного решения краевой задачи (2.15), и относительные погрешности приближенных формул (4.3), (5.9) и (6.2). Через ε_0 и ε_2 обозначены, соответственно, погрешности нулевого и второго приближений. Частота изгибных колебаний ω_1 убывает с ростом η, а погрешности ε_2 и ε_0 формулы (5.9) растут. Частота продольных колебаний ω_2 практически не зависит от η и определяется по формуле (4.3) с высокой точностью.

Первые частоты ω_3 и ω_4 высокочастотной серии убывают вместе с η, а погрешности формул (6.2) растут. По формуле (6.4) для модулей (7.1) максимальные амплитуды толщинных и сдвиговых напряжений оказываются равными для обоих рассматриваемых форм колебаний ($\xi^{(3)} = \xi^{(4)} = 1$).

Рассмотрим балку, равномерно армированную системой малорастяжимых волокон, наклоненных под углом α к оси Ox. В [22] для упругих модулей в (2.3) приводятся следующие формулы:

$$
\begin{aligned}
&E_{11} = \frac{E(1-\delta)}{1-\nu^2} + E_n\delta\cos^4\alpha, && E_{13} = \frac{E\nu(1-\delta)}{1-\nu^2} + E_n\delta\sin^2\alpha\cos^2\alpha,\\
&E_{33} = \frac{E(1-\delta)}{1-\nu^2} + E_n\delta\sin^4\alpha, && G_{13} = \frac{E(1-\delta)}{2(1+\nu)} + E_n\delta\sin^2\alpha\cos^2\alpha,\\
&H_1 = E_n\delta\sin\alpha\cos^3\alpha, && H_3 = E_n\delta\sin^2\alpha\cos\alpha,
\end{aligned}
\tag{7.2}
$$

где E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона матрицы, E_n — модуль Юнга волокон, δ — доля обьема, занятого волокнами.

Рассмотрим изгибные колебания балки с безразмерными параметрами

$$
E = 1, \quad \nu = 0.3, \quad E_n = 1000, \quad \delta = 0.1, \quad \rho = 1. \tag{7.3}
$$

Угол α наклона волокон будем менять.

В таблице 2 для ряда значений α приведены: эквивалентная продольная жесткость c_0, найденная по формуле (2.6), коэффициент c_g податливости на поперечный сдвиг; изгибная частота колебаний ω_1, найденная при численном решении задачи (2.15); и относительные погрешности ε_2 и ε_0 формулы (5.9) во втором и в нулевом приближениях.

Таблица 2.

α	c_0	c_g	ω_1	ε_2	ε_0
0	101	291	0.0255	3%	13.6%
2	74	160	0.0230	1%	8.7%
5	32	29	0.0159	0.6%	2.5%
10	11	3.3	0.0095	10^{-4}	0.6%
30	2	0.1	0.0041	10^{-4}	0.1%
60	1	0.1	0.0030	10^{-4}	0.05%
90	1	2.6	0.0027	10^{-4}	0.2%

С уменьшением угла α возрастают как продольная жесткость c_0, так и частота изгибных колебаний ω_1. Одновременно растет параметр c_g, что сопровождается ростом погрешности приближенных формул.

8. Заключение. Выведены уравнения второго порядка точности, описывающие длинноволновые колебания балки-полоски в случае анизотропии общего вида. Получена эквивалентная продольная жесткость, которая в рамках гипотез КЛ позволяет описать в нулевом приближении изгибные и продольные колебания анизотропной неоднородной по толщине балки. Как для ортотропной балки, так и в случае косой анизотропии первое приближение не дает поправки к частоте колебаний, а поправочное слагаемое второго приближения зависит от всех модулей упругости.

Что касается формы колебаний, в случае косой анизотропии при поперечных колебаниях появляется малая продольная составляющая перемещений нейтрального слоя. При продольных колебаниях влияние косой анизотропии на форму колебаний незначительно, малая поперечная составляющая перемещения связана, в основном, с эффектом Пуассона.

Для высокочастотной серии наличие косой анизотропии очень существенно. Толщинные и сдвиговые частоты и формы колебаний связаны уже в нулевом приближении и образуют единую высокочастотную серию.

Литература

1. *Kirchhoff G.* Vorlesungen über Matematische Physik // Mechanik. Leipzig, 1876.

2. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.; Л.: ОНТИ НКТП, СССР, 1935.

3. *Timoshenko S. P.* On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars // Philos. Mag. Vol. 4. Ser. 6, N 242. 1921.

4. *Reissner E.* The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates // Trans. ASME, J. Appl. Mech. 1945. Vol. 12. P. 69–77.

5. *Родионова В. Ф., Титаев В. Ф., Черных К. Ф.* Прикладная теория инизотропных пластин и оболочек. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1996.

6. *Векуа И. Н.* Об одном методе расчета призматических оболочек // Тр. Тбилисского мат. ин-та. 1955. Т. 21. С. 191–259.

7. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976.

8. *Аголовян Л. А.* Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997.

9. *Назаров С. А.* Асимптотический анализ тонких пластин и стержней. Т. 1. Новосибирск: Научная книга, 2002.

10. *Зимин Б. А., Зорин И. С.* К вопросу о формах равновесия неоднородных анизотропных упругих пластин и стержней // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2016. Т. 2(60). Вып. 1. С. 600–605.

11. *Vetyukov Y., Kuzin A., Krommer M.* Asymptotic splitting in the three-dimensional problem of elasticity for non-homogeneous piezoelectric plates // Int. J. Solids and Structures. 2011. Vol. 48. P. 12–23.

12. *Товстик П. Е.* Двухмерные модели пластин из анизотропного материала // Доклады РАН. 2009. Т. 54(4).

13. *Tovstik P. E., Tovstik T. P.* Two-dimensional models of shells made of an anisotropic material. Acta mechanica. 2014. Vol. 225(3). P. 647–661.

14. *Tovstik P. E., Tovstik T. P.* Two-dimensional model of plate made of anisotropic inhomogeneous material // Proceedings of the International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics. 2014 (ICNAAM-2014). Vol. 1648. 300011.

15. *Vijayakumar K.* Poisson's Theory for Analysis of Bending of Isotropic and Anisotropic Plates, ISRN Civil Engineering. Vol. 2013, Article ID 562482, 8 pages, 2013. doi: 10.1155/2013/562482

16. *Verma K. L.* Wave propagation in laminated composite plates Int. J. Adv. Struct. Eng., 2013, 5, 10. doi: 10.1186/2008-6695-5-10

17. *Kuznetsov S. V.* Lamb waves in anisotropic plates, Acoustical Physicsl. 2014. Vol. 60, N 1. P. 95–103.

18. *Kienzler R., Shneider P.* Comparison of various linear plate theories in the light of a consistent second order approximation. Shell Structures: Theory and Applications. Proc. 10th SSTA 2013 Conf. Vol. 3. P. 109–112 (2014).

19. *Товстик П. Е., Товстик Т. П.* Уравнение изгиба тонкой пластины второго порядка точности // Доклады РАН. 2014. Т. 59(8).

20. *Морозов Н. Ф., Товстик П. Е., Товстик Т. П.* Обобщенная модель Тимошенко—Рейсснера для многослойной пластины // Изв. РАН. МТТ. 2016. №5. С. 22–35.

21. *Tovstik P. E., Tovstik T. P.* Generalized Timoshenko—Reissner models for beams and plates, strongly heterogeneous in the thickness direction // ZAMM (to be published).

22. *Бабич В. М., Киселев А. П.* Упругие волны // Высокочастотная теория. СПб.: БХВ-Петербург, 2014. 320 с.

23. *Pochhammer L.* Biegung des Kreiscylinders-Fortpflanzungs-Geschwindigkeit kleiner Schwingungen in einem Kreiscylinder // J. reine angew. Math. 1876. Vol. 81.

24. *Chree C.* Longitudinal vibrations in solid and hollow cylinders // Phil. Mag. 1899. Vol. 47(5). P. 333–349.

25. *Товстик П. Е., Товстик Т. П.* Двухмерные модели пластин из анизотропного материала // Тр. семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2008. С. 4–16.

Статья поступила в редакцию 7 октября 2016 г.; рекомендована в печать 22 декабря 2016 г.

Сведения об авторах

Товстик Петр Евгеньевич — доктор физико-математических наук, профессор; peter.tovstik@mail.ru

Товстик Татьяна Петровна — кандидат физико-математических наук, научный сотрудник; tovstik t@mail.ru

Наумова Наталья Владимировна — кандидат физико-математических наук, доцент; n.v.naumova@spbu.ru

lONG-WAVE VIBRATIONS AND WAVES IN ANISOTROPIC BEAM

Petr E. Tovstik[1], *Tatiana P. Tovstik*[2], *Natalia V. Naumova*[1]

[1] St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; peter.tovstik@mail.ru, n.v.naumova@spbu.ru

[2] Institute of Problems of Mekhanical Engineering RAS, Bolshoy pr. V. O., 61, St. Petersburg, 199178, Russian Federation; tovstik t@mail.ru

Long-wave vibrations and waves in infinite non-homogeneous in thickness of anisotropic beam-belt are investigated by using asymptotic methods. Dispersion equation of second order accuracy on the relative beam thickness are obtained. Additional quality effect related to anisotropy are noticed. Refs 25. Tables 2.

Keywords: vibrations, waves, anisotropic beam-belt, asymptotic methods.

References

1. Kirchhoff G., "Vorlesungen über Matematische Physik", *Mechanik* (Leipzig, 1876).

2. Love A. E. H., *A treatise on the mathematical theory elasticity* (Dover, New York. 1927).

3. Timoshenko S. P., "On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars", *Philos. Mag. Ser. 6* **4**(242), (1921).

4. Reissner E., "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates", *Trans. ASME, J. Appl. Mech.* **12**, 69–77 (1945).

5. Chernykh K. F., Rodionova V. A., Titaev B. F., *Applied theory of anisotropic plates and shells* (St. Petersburg University Press, 1996) [in Russian].

6. Vekua I. N., "On one method of calculating prismatic shells", *Trudy Tbilis. Mat. Inst.* **21**, 191–259 (1955) [in Russian].

7. Goldenweizer A. L., *Theory of Elastic Thin Shells* (Nauka, Moscow, 1976) [in Russian].

8. Agalovyan L. A., *Asymptotic theory of anisotropic plates and shells* (Nauka, Moscow, 1997) [in Russian].

9. Nazarov S. A., *Asymptotic analysis of thin plates and rods* **1** (Nauch. Kn., Novosibirsk, 2002) [in Russian].

10. Zimin B. A., Zorin I. S., "On the stability of a flat shape balance inhomogeneous anisotropic elastic plates and rods", *Vestnik SPbSU. Series 1* **2(60)**(1), 600–605 (2016) [in Russian].

11. Vetyukov Y., Kuzin A., Krommer M., "Asymptotic splitting in the three-dimensional problem of elasticity for non-homogeneous piezoelectric plates", *Int. J. Solids and Structures* **48**, 12–23 (2011).

12. Tovstik P. E., "Two-dimensional models of plates made of an anisotropic material", *Doklady Physics* **54**(4), 205–209 (2009).

13. Tovstik P. E., Tovstik T. P., "Two-dimensional models of shells made of an anisotropic material", *Acta mechanica* **225**(3), 647–661 (2014).

14. Tovstik P. E., Tovstik T. P., "Two-dimensional model of plate made of anisotropic inhomogeneous material", *Proceedings of the International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics 2014 (ICNAAM-2014)* **1648**, 300011.

15. Vijayakumar K., Poisson's Theory for Analysis of Bending of Isotropic and Anisotropic Plates, ISRN Civil Engineering, vol. 2013, Article ID 562482, 8 pages, 2013. doi:10.1155/2013/562482

16. Verma K. L., Wave propagation in laminated composite plates Int. J. Adv. Struct. Eng., 2013, 5, 10. doi: 10.1186/2008-6695-5-10

17. Kuznetsov S. V., Lamb waves in anisotropic plates, Acoustical Physicsl **60**(1), 95–103 (2014).

18. Kienzler R., Shneider P., Comparison of various linear plate theories in the light of a consistent second order approximation. Shell Structures: Theory and Applications. Proc. 10th SSTA 2013 Conf. **3**, 109–112 (2014).

19. Tovstik P. E., Tovstik T. P., "A thin-plate bending equation of second-order accuracy", *Doklady Physics* **59**(8), 389–392 (2014).

20. Morozov N. F., Tovstik P. E., Tovstik T. P., "Generalized Timoshenko—Reissner models for multilayered plate", *Izv. RAN. MTT* (5), 22–35 (2016) [in Russian].

21. Tovstik P. E., Tovstik T. P., Generalized Timoshenko—Reissner models for beams and plates, strongly heterogeneous in the thickness direction. ZAMM (to be published).

22. Babich V. M., Kiselev A. P., Elastic waves. High-frequency theory (SPb. BHV-Petersburg. 2014, 320 p.) [in Russian].

23. Pochhammer L., "Biegung des Kreiscylinders-Fortpflanzungs-Geschwindigkeit kleiner Schwingungen in einem Kreiscylinder", *J. reine angew. Math.* **81** (1876).

24. Chree C., "Longitudinal vibrations in solid and hollow cylinders", *Phil. Mag.* **47**(5), 333–349 (1899).

25. Tovstik P. E., Tovstik T. P., "Two-dimensional models of anisotropic plates", *Tr. seminara "Computer methods in Continuum mechanics"*, 4–16 (St. Petersburg University Press, 2008) [in Russian].

Для цитирования: Товстик П. Е., Товстик Т. П., Наумова Н. В. Длинноволновые колебания и волны в анизотропной балке // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 2. С. 323–335. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.216

For citation: Tovstik P. E., Tovstik T. P., Naumova N. V. Long-wave vibrations and waves in anisotropic beam. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2017, vol. 4 (62), issue 2, pp. 323–335. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.216

ХРОНИКА

23 ноября 2016 г. на заседании секции теоретической механики им. проф. Н. Н. Поляхова в Санкт-Петербургском Доме Ученых РАН выступили заслуженный деятель науки РФ, доктор физ.-мат. наук, профессор П. Е. Товстик (Санкт-Петербургский государственный университет) и кандидат физ.-мат. наук Т. П. Товстик (ИПМаш РАН) с докладом на тему «Модели деформации балок и пластин».

Краткое содержание доклада:

В докладе рассматривались одномерные модели деформации балок типа Бернулли—Эйлера и двухмерные модели пластин типа Кирхгофа—Лява и Тимошенко—Рейсснера. Путем сравнения с результатами асимптотического интегрирования уравнений трехмерной теории упругости обсуждались области применимости этих моделей и их погрешности. Особое внимание уделено многослойным, анизотропным и функционально градиентным балкам и пластинам.