

АСТРОНОМИЯ

УДК 521.135
MSC 70F15

ПОВЕРХНОСТИ МИНИМАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ И ИХ ОСОБЫЕ ТОЧКИ В ЗАДАЧЕ О ЗВЕЗДНЫХ СБЛИЖЕНИЯХ С СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМОЙ*

Маммадли Азад Гидаят оглы

Батабатская астрофизическая обсерватория Нахчыванского отделения НАН Азербайджана,
Азербайджан, 7000, Нахчыван, пр. Г. Алиева, 35

В рамках ограниченной задачи трех тел исследовано пространственное движение планеты при сближении пробной звезды с Солнечной системой. Использовано точное выражение силовой функции без разложения ее в ряд. Определены области возможного движения планеты. Построены поверхности минимальной энергии, являющиеся обобщением поверхностей нулевой скорости, определены особые точки этих поверхностей, установлены их тип и устойчивость в смысле Ляпунова. Полученные результаты приведены в виде рисунков и таблиц. Библиогр. 5 назв. Ил. 2. Табл. 1.

Ключевые слова: небесная механика, ограниченная задача трех тел, поверхности минимальной энергии, особые точки, устойчивость в смысле Ляпунова.

1. Постановка задачи. В работе [1] рассмотрено пространственное движение пассивно-гравитирующего тела (далее ПГТ или тело M_0) в рамках ограниченной задачи трех тел. Возмущающее тело при этом может совершать движение по параболической или гиперболической орбитам относительно центрального тела. Найдено интегральное инвариантное соотношение — квазиинтеграл и определены области возможного движения ПГТ. Исследована устойчивость движения планет по Хиллу при сближении с Солнечной системой на минимальное расстояние от 50 до 100 а. е. пробной звезды с массой от одной до пяти солнечных масс. Полученные результаты приведены в виде рисунков и таблиц.

В настоящей работе рассматривается аналогичная ограниченная задача трех тел с целью нахождения поверхностей минимальной энергии (ПМЭ), являющихся обобщением поверхностей нулевой скорости; определения особых точек ПМЭ, установления их типа и устойчивости в смысле Ляпунова; приложения полученных результатов к планетам Солнечной системы.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда развития науки при президенте Азербайджанской Республики (грант № EIF-2013-9(15)-46/14/1).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2017

Движение ПГТ будем изучать во вращающейся и пульсирующей системе координат $Gxyz$, в которой начало координат совпадает с барицентром G активно-гравитирующих тел M_1 (центральное тело) и M_2 (возмущающее тело) с массами m_1 и m_2 ($m_1 \geq m_2$). Уравнения движения тела M_0 в этой системе координат называются уравнениями ШАПНЕРА и имеют вид [1–3]

$$\frac{d^2x}{dv'^2} - 2\frac{dy}{dv'} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dv'^2} + 2\frac{dx}{dv'} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dv'^2} = \frac{\partial Q}{\partial z}. \quad (1)$$

В системе уравнений (1) за независимую переменную принята истинная аномалия возмущающего тела v' , а силовая функция Q является аналогом функции Якоби [1–3]:

$$Q = \rho' \left[\frac{1}{2} (x^2 + y^2 - e'z^2 \cos v') + p'^3 \left(\frac{\mu}{r_1} + \frac{1-\mu}{r_2} \right) \right], \quad (2)$$

где p', e' – фокальный параметр и эксцентриситет орбиты возмущающего тела относительно центрального тела M_1 соответственно. Расстояния r_1 и r_2 тела M_0 от основных тел M_1 и M_2 равны

$$r_1^2 = (x - p'\mu + p')^2 + y^2 + z^2, \quad r_2^2 = (x - p'\mu)^2 + y^2 + z^2, \quad (3)$$

соответственно. Кроме того, относительные массы μ и $1 - \mu$ основных тел M_1 и M_2 , а также расстояние r' между ними определяются равенствами

$$\mu = \frac{m_1}{m_1 + m_2}, \quad 1 - \mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad \left(\mu < \frac{1}{2} \right) \quad (4)$$

$$r' = p'\rho', \quad \rho' = \frac{1}{1 + e' \cos v'}, \quad p' = q'(1 + e'), \quad (5)$$

где q' – минимальное расстояние (перигелийное расстояние в Солнечной системе) возмущающего тела от центрального. Выражение для r' практически определяет орбиту возмущающего тела: при $e' > 1$ – гиперболическую, а при $e' = 1$ – параболическую. Кроме того, диапазон изменения истинной аномалии предполагается равным

$$|v'| \leq v_a, \quad \text{где } v_a = \pi \quad \text{при } e' = 1, \quad v_a = \arccos \left(-\frac{1}{e'} \right) \quad \text{при } e' > 1. \quad (6)$$

2. Поверхности минимальной энергии и их особые точки. В ограниченной круговой ($e' = 0$) задаче трех тел уравнения движения (1) ШАПНЕРА допускают первый интеграл – интеграл Якоби [2, 3]. В работе [3] показано, что в ограниченной эллиптической, гиперболической и параболической задачах трех тел не существует первого интеграла, подобного интегралу Якоби. Однако имеет место интегральное инвариантное соотношение – квазиинтеграл, который представляет собой закон сохранения энергии пассивно-гравитирующего тела [2, 3]. С помощью найденного квазиинтеграла находят область возможности движения тела M_0 . Границу этой области называют *поверхностью минимальной энергии*, уравнение которой записывается так [1–3]:

$$H \equiv x^2 + y^2 - e'z^2 \cos v' + 2p'^3 \left(\frac{\mu}{r_1} + \frac{1-\mu}{r_2} \right) - p'^3(3 - \mu + \mu^2) = C(1 + e' \cos v'), \quad (7)$$

где C — аналог постоянной Якоби. Очевидно, что функция $H \equiv H(x, y, z, p', e', v', \mu, C)$ зависит не только от координат x, y, z , но и от пяти параметров p', e', v', μ, C . Постоянная C характеризует энергию ПГТ, а фокальный параметр p' — линейный масштаб поверхностей. При заданных значениях параметров p', e', v', μ и C тело M_0 не может выйти за пределы поверхности (7). При $e' = 0$ поверхности минимальной энергии (7) преобразуются в поверхности нулевой относительной скорости ограниченной круговой задачи трех тел (более подробно см. [1]).

При фиксированных значениях параметров p', e', v' и μ особые точки семейства поверхностей (7) определяются из алгебраических уравнений

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial z} = 0, \quad (8)$$

которые совпадают с теми же уравнениями для определения точек либрации в ограниченной задаче трех тел [2, 3]. Особыми точками семейства (7) являются точки, в которых невозможно построить единственную касательную плоскость.

Решениями алгебраических уравнений (8) являются коллинеарные особые точки $L_1 = L_1(x_1, 0, 0)$, $L_2 = L_2(x_2, 0, 0)$, $L_3 = L_3(x_3, 0, 0)$ и две пары компланарных (треугольных) особых точек: $L_4 = L_4(x_4, y_4, 0)$, $L_5 = L_5(x_4, -y_4, 0)$ в плоскости $z = 0$ и $L_6 = L_6(x_6, 0, z_6)$, $L_7 = L_7(x_6, 0, -z_6)$ в плоскости $y = 0$ (см. ниже). Коллинеарная особая точка L_1 находится левее от основного тела M_1 меньшей массы, т. е. $x_1 < \bar{x}_1 = -p'(1 - \mu) < 0$, точка L_2 находится между основными телами, т. е. $\bar{x}_1 < x_2 < 0 < \bar{x}_2 = p'\mu$, а L_3 — правее основного тела M_2 большей массы, т. е. $x_3 > \bar{x}_2$. Треугольные особые точки L_4 и L_5 находятся в левой полуплоскости $x < 0$, ближе к основному телу M_1 меньшей массы и для них $x_4 < 0$. Кроме того, если массы основных тел равны $m_1 = m_2$, то $\mu = 1/2$ и особая точка L_2 будет находиться в центре масс основных тел — в начале координат, т. е. $x_2 = 0$.

Треугольные особые точки L_4 и L_5 находятся в плоскости $z = 0$ и существуют только при $r_1 = r_2 = p'$ [3]:

$$x = x_4 = -\frac{p'}{2} + p'\mu, \quad y = y_4 = \frac{\sqrt{3}}{2}p', \quad z = 0. \quad (9)$$

Очевидно, что абсцисса x_4 особой точки L_4 или L_5 зависит от фокального параметра p' орбиты пробной звезды и ее массы через μ , а ордината y_4 — только от p' .

Далее, из системы уравнений (8) при $y = 0$ находим два симметричных относительно оси x компланарные решения $L_6 = L_6(x_6, 0, z_6)$ и $L_7 = L_7(x_6, 0, -z_6)$. Очевидно, что $x_6 = x_6(v')$ и $z_6 = z_6(v')$, причем действительные решения L_6 и L_7 могут существовать только при $\cos v' < 0$ [3]. Заметим, что при $v' = \pm\pi/2$ компланарными особыми точками будут и две бесконечно удаленные особые точки $L_8 = L_8(0, 0, +\infty)$ и $L_9 = L_9(0, 0, -\infty)$, известные для круговой задачи [3]. При $e' \rightarrow 0$ бесконечно удаленные точки либрации стремятся к бесконечно удаленным особым точкам.

Уравнения (8) имеют также аналитическое решение в плоскости $y = 0$ при параболическом движении ($e' = 1$) пробной звезды и $\cos v' = -1$. Это решение также имеет вид $r_1 = r_2 = p'$ и в координатах по аналогии с (9) записывается так:

$$x = x_6 = -\frac{p'}{2} + p'\mu, \quad y = 0, \quad z = z_6 = \frac{\sqrt{3}}{2}p' \quad (\cos v' = -1, \quad e' = 1). \quad (10)$$

Следовательно, при параболическом движении пробной звезды и при $\cos v' = -1$ абсцисса особой точки L_6 или L_7 зависит от фокального параметра p' орбиты проб-

ной звезды и ее массы через μ , а аппликата z_6 — только от p' . В остальных случаях координаты компланарных особых точек L_6 или L_7 определяются только численно.

Таким образом, в ограниченной круговой задаче трех тел существуют всего семь точек либрации с учетом бесконечно удаленных, а в рассматриваемой нами не круговой задаче число особых точек больше семи.

В заключении отметим некоторые отличия особых точек семейства (7) от точек либрации. В каждой особой точке происходит бифуркация поверхностей минимальной энергии. Бифуркация происходит также при значениях истинной аномалии $v' = \pm\pi/2$ [3]. Координаты компланарных особых точек в отличие от координат точек либрации семейства поверхностей (7), не являются стационарными частными решениями уравнений (1) ШАПНЕРа, так как они не удовлетворяют этим уравнениям. Точки либрации являются коническими особыми точками, а компланарные точки семейства — особыми точками типа «центр». Тип особых точек и их устойчивость в смысле Ляпунова рассмотрены в следующем разделе.

3. Тип и устойчивость в смысле Ляпунова особых точек поверхностей минимальной энергии. Для определения типа и установления устойчивости в смысле Ляпунова особых точек ПМЭ (7) $L_n (n = 1, 2, \dots, 7)$, найденных в разделе 2, разложим функцию H в ряд Тейлора в окрестности L_n и рассмотрим движение вблизи нее [4]. При этом значение истинной аномалии v' считается фиксированным и соответствует тому значению, при котором были определены особые точки L_n . Разложение функции H можно представить в виде

$$H - H_0 = \frac{1}{2} (A_1\xi^2 + A_2\eta^2 + A_3\zeta^2) + A_4\xi\eta + A_5\xi\zeta + A_6\eta\zeta + \dots = C - C_0. \quad (11)$$

Здесь через ξ, η и ζ обозначены координаты текущей точки относительно особой точки L_n , а $H_0 = C_0$ — значение функции H в этой точке. Кроме того, в (11) учтено, что в силу (8) частные производные потенциала H первого порядка в особой точке L_n равны нулю. Коэффициенты $A_k, (k = 1, 2, \dots, 6)$ представляют собой значения вторых частных производных функции H , вычисленных в особой точке $L_n (n = 1, 2, \dots, 7)$ и равны

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\partial^2 H(L_n)}{\partial x^2}, & A_2 &= \frac{\partial^2 H(L_n)}{\partial y^2}, & A_3 &= \frac{\partial^2 H(L_n)}{\partial z^2}, \\ A_4 &= \frac{\partial^2 H(L_n)}{\partial x \partial y}, & A_5 &= \frac{\partial^2 H(L_n)}{\partial x \partial z}, & A_6 &= \frac{\partial^2 H(L_n)}{\partial y \partial z}. \end{aligned} \quad (12)$$

Если в разложении (11) сохранить члены до второго порядка включительно относительно координат ξ, η и ζ , то оно будет представлять собой поверхность второго порядка. С помощью поворота осей разложение (11) можно привести к виду [5]

$$H - H_0 = B_1\xi^2 + B_2\eta^2 + B_3\zeta^2 = C - C_0, \quad (13)$$

которое записано в новых координатах ξ, η, ζ .

Для коллинеарных особых точек $L_k(x_k, 0, 0)$ ($k = 1, 2, 3$) в разложении (11) коэффициенты $A_4 = 0, A_5 = 0$ и $A_6 = 0$. Следовательно, тип этих особых точек определяется знаками коэффициентов A_1, A_2 и A_3 (см. ниже). Для треугольных особых точек $L_{4,5}(x_4, \pm y_4, 0)$ коэффициенты $A_4 \neq 0, A_5 = 0$ и $A_6 = 0$, а для $L_{6,7}(x_6, 0, \pm z_6)$ коэффициенты $A_4 = 0, A_5 \neq 0$ и $A_6 = 0$. Поэтому для особых точек L_4 и L_5 связь между старыми и новыми коэффициентами имеет вид

$$B_1 = \frac{1}{4} (A_1 + A_2 + 2P), \quad B_2 = \frac{1}{4} (A_1 + A_2 - 2P), \quad (14)$$

$$B_0 = A_0, \quad B_3 = \frac{A_3}{2}, \quad P = \frac{1}{2} \sqrt{(A_1 - A_2)^2 + 4A_4^2}, \quad (15)$$

а для особых точек L_6 и L_7 —

$$B_1 = \frac{1}{4} (A_1 + A_3 + 2Q), \quad B_3 = \frac{1}{4} (A_1 + A_3 - 2Q), \quad (16)$$

$$B_0 = A_0, \quad B_2 = \frac{A_2}{2}, \quad Q = \frac{1}{2} \sqrt{(A_1 - A_3)^2 + 4A_5^2}. \quad (17)$$

При $C = C_0$ из (13) получим поверхность, проходящую через точку L_n . Эта поверхность представляет собой асимптотический конус вне или внутри поверхности:

$$B_1\xi^2 + B_2\eta^2 + B_3\zeta^2 = 0. \quad (18)$$

Особые точки могут быть двух типов (исключая особые линии): конические и изолированные. Если коэффициенты B_n ($n = 1, 2, 3$) в равенстве (13) имеют разные знаки, то особая точка — коническая. Осью конуса является та ось ξ , η или ζ , которой в (13) соответствует член, имеющий знак, не совпадающий со знаками двух других слагаемых. Если же коэффициенты в этих равенствах имеют одинаковые знаки, то особая точка — изолированная (мнимый конус).

Для построения семейства (7) ПМЭ необходимо знать: а) особые точки семейства поверхностей и их тип, б) значения постоянной C , вычисленные в каждой особой точке, и знаки неравенства между ними и в) поведение силовой функции на бесконечности и в центрах притяжения. Зная тип особой точки, можно сразу установить поведение поверхностей нулевой скорости в окрестности этой точки $C \neq C_0$. Для конической особой точки внутри конуса — это поверхность, близкая к двуполостному гиперboloиду, а вне конуса — близкая к однополостному гиперboloиду, при этом сам конус для обоих гиперboloидов является асимптотическим. В окрестности изолированной особой точки при $C < C_0$ поверхность нулевой скорости близка к эллипсоиду, а при $C > C_0$ поверхности не существует. Знаки неравенства здесь могут быть противоположными.

Для исследования устойчивости особой точки L_n в смысле Ляпунова в первом приближении (или в линейной постановке) запишем линеаризованные уравнения движения вблизи этой точки. Эти уравнения называются *линейными уравнениями в вариациях*, и в силу уравнений (1) и разложения (11) функции H имеют вид [4]

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dv'^2} - 2\frac{d\eta}{dv'} &= A_1\xi + A_4\eta + A_5\zeta, \\ \frac{d^2\eta}{dv'^2} + 2\frac{d\xi}{dv'} &= A_4\xi + A_2\eta + A_6\zeta, \\ \frac{d^2\zeta}{dv'^2} &= A_5\xi + A_6\eta + A_3\zeta. \end{aligned} \quad (19)$$

В зависимости от корней характеристического уравнения системы (19), которое имеет вид

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 - A_1 & -2\lambda - A_4 & -A_5 \\ 2\lambda - A_4 & \lambda^2 - A_2 & -A_6 \\ -A_5 & -A_6 & \lambda^2 - A_3 \end{vmatrix} = \lambda^6 + \alpha_4\lambda^4 + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_0 = 0, \quad (20)$$

определим характер устойчивости в смысле Ляпунова в первом приближении. В характеристическом уравнении (20) принято

$$\alpha_4 = 4 - A_1 - A_2 - A_3, \quad \alpha_2 = -A_4^2 - A_5^2 - A_6^2 + A_1A_2 + A_1A_3 + A_2A_3,$$

$$\alpha_0 = A_1A_6^2 + A_2A_5^2 + A_3A_4^2 - A_1A_2A_3 - 2A_4A_5A_6.$$

Заметим, что в уравнениях в вариациях (19) и в характеристическом уравнении (20) следует учесть, что для коллинеарных особых точек $L_k(x_k, 0, 0)$ ($k = 1, 2, 3$), коэффициенты $A_4 = A_5 = A_6 = 0$. Поэтому характеристическое уравнение (20) для них принимает вид

$$(\lambda^2 - A_1)(\lambda^2 - A_2)(\lambda^2 - A_3) = 0. \quad (21)$$

Кроме того, при одновременном выполнении неравенств

$$A_1 < 0, \quad A_2 < 0, \quad A_3 < 0 \quad (22)$$

характеристическое уравнение (21) имеет 6 чисто мнимых корней. Согласно известной теореме Ляпунова это соответствует случаю устойчивости коллинеарной особой точки L_n в первом приближении, или в линейной постановке. Заметим, что одновременное выполнение условия (22) соответствует изолированной особой точке. Следовательно, только такая особая точка будет устойчива в смысле Ляпунова в первом приближении.

4. Примеры. В качестве примера возьмем пробную звезду с массой m' , перигелийным расстоянием q' (в а. е.) и эксцентриситетом e' , изменяющимися в пределах

$$M_\odot \leq m' \leq 5M_\odot, \quad 50 \leq q' \leq 100, \quad 1 \leq e' \leq 5,$$

где M_\odot — масса Солнца, $e' = 1$ соответствует параболическому движению пробной звезды.

В табл. 1 приведены координаты особых точек (в а. е.) $L_k(x_k, 0, 0)$, $k = 1, 2, 3$, $L_4(x_4, y_4, 0)$, $L_5(x_4, -y_4, 0)$ и $L_6(x_6, 0, z_6)$, $L_7(x_6, 0, -z_6)$ поверхностей минимальной энергии в задаче трех тел; планета — Солнце — звезда, в зависимости от фокального параметра $p' = q'(1 + e')$ при гиперболической ($e' = 1.15$), параболической ($e' = 1$) орбитах пробной звезды и от ее массы m' . Координаты особых точек L_1, L_2, \dots, L_5 вычислены при $v' = 0$, а координаты L_6 и L_7 — при $v' = 3\pi/4$ ($\cos v' < 0$), причем знак плюс перед координатами соответствует особым точкам L_4 и L_6 , а минус — L_5 и L_7 . Кроме того, в случае параболической ($e' = 1$) орбиты пробной звезды при $v' = \pm\pi$ значения координат особых точек L_4 и L_5 совпадают со значениями L_6 и L_7 соответственно, т. е. $x_4 = x_6$ и $y_4 = z_6$. Это связано с тем, что аналог функции Якоби Q при $v' = \pm\pi$ и $e' = 1$ имеет симметричный вид относительно y и z .

Приведенные в табл. 1 значения координат особых точек зависят только от масс Солнца и пробной звезды, а также от ее перигелийного расстояния и эксцентриситета орбиты и не зависят от значений параметра орбиты планеты.

Теперь установим устойчивость в смысле Ляпунова особых точек. Для коллинеарных особых точек $L_n(x_n, 0, 0)$ ($n = 1, 2, 3$) ПМЭ характеристическое уравнение (21) имеет действительные и комплексные корни с вещественной частью, т. е. одновременно не удовлетворяются неравенства (22). Поэтому коллинеарные особые точки не устойчивы в смысле Ляпунова.

Для треугольных особых точек $L_{4,5}(x_0, \pm y_0, 0)$ и $L_{6,7}(x_0, 0, \pm z_0)$ ПМЭ характеристическое уравнение (20) также имеет действительные и комплексные корни с вещественной частью. Следовательно, они также не устойчивы в смысле Ляпунова.

Далее, о типах особых точек. Для коллинеарных особых точек $L_n(x_n, 0, 0)$ ($n = 1, 2, 3$) удовлетворяются неравенства $A_1 > 0$, $A_2 < 0$ и $A_3 < 0$. Поэтому они конические особые точки с осью конуса OX .

Таблица 1. Координаты (в а. е.) коллинеарных $L_k(x_k, 0, 0)$ ($k = 1, 2, 3$) и треугольных $L_{4,5}(x_4, \pm y_4, 0)$, $L_{6,7}(x_6, 0, \pm z_6)$ особых точек ПМЭ в задаче трех тел: планета — Солнце — звезда

e'	p' в (а. е.)	m'	L_1	L_2	L_3	$L_{4,5}$ ($x_4, \pm y_4$)	$L_{6,7}$ ($x_6, \pm z_6$)
1.15	107.5	M_\odot	-128.829	0	128.829	(0, ± 93.098)	(0, ± 101.861)
		$3M_\odot$	-136.080	-38.780	118.590	(-26.875, ± 93.098)	(-17.734, ± 104.143)
		$5M_\odot$	-136.677	-52.878	114.935	(-35.833, ± 93.098)	(-20.170, ± 106.656)
	161.25	M_\odot	-193.243	0	193.243	(0, ± 139.647)	(0, ± 152.791)
		$3M_\odot$	-204.120	-58.170	177.886	(-40.313, ± 139.647)	(-26.601, ± 156.215)
		$5M_\odot$	-205.015	-79.317	172.403	(-53.750, ± 139.647)	(-30.255, ± 159.984)
	215	M_\odot	-257.657	0	257.657	(0, ± 186.196)	(0, ± 203.721)
		$3M_\odot$	-272.160	-77.560	237.181	(-53.750, ± 186.196)	(-35.467, ± 208.287)
		$5M_\odot$	-273.353	-105.756	229.871	(-71.667, ± 186.196)	(-40.340, ± 213.312)
1	100	M_\odot	-119.841	0	119.841	(0, ± 86.603)	(0, ± 100.495)
		$3M_\odot$	-126.586	-36.074	110.317	(-25.0, ± 86.603)	(-12.148, ± 103.370)
		$5M_\odot$	-127.141	-49.189	106.917	(-33.333, ± 86.603)	(-12.697, ± 105.987)
	150	M_\odot	-179.761	0	179.761	(0, ± 129.904)	(0, ± 150.742)
		$3M_\odot$	-189.879	-54.112	165.475	(-37.50, ± 129.904)	(-18.223, ± 155.055)
		$5M_\odot$	-190.712	-73.784	160.375	(-50.0, ± 129.904)	(-19.046, ± 158.981)
	200	M_\odot	-239.681	0	239.681	(0, ± 173.205)	(0, ± 200.989)
		$3M_\odot$	-253.172	-72.149	220.633	(-50.0, ± 173.205)	(-24.297, ± 206.7401)
		$5M_\odot$	-254.282	-98.378	213.833	(-66.667, ± 173.205)	(-25.395, ± 211.974)

Для треугольных особых точек $L_{4,5}(x_0, \pm y_0, 0)$ в силу (14) и (15) имеет место неравенство $B_1 > 0$, $B_2 > 0$ и $B_3 = A_3/2 < 0$. Следовательно, это конические особые точки с осью конуса OZ .

Наконец, для треугольных особых точек $L_{6,7}(x_0, 0, \pm z_0)$ в силу (16) и (17) удовлетворяются неравенства $B_1 > 0$, $B_2 = A_2/2 > 0$, $B_3 > 0$, т. е. это изолированные особые точки.

На рис. 1 и 2 приведены поверхности минимальной энергии и их особые точки L_n , ($n = 1, 2, \dots, 7$) в задаче планета — Солнце — звезда: вверху в плоскости $z = 0$, внизу в плоскости $y = 0$. Солнце обозначено через M_1 , звезда — через M_2 , а их барицентр — через G , который совпадает с началом координат. Рис. 1 соответствует гиперболической орбите пробной звезды с эксцентриситетом $e' = 1.15$ и фокальным параметром $p' = 107.5$ а. е. при $v' = 0$, а рис. 2 — параболической орбите $e' = 1$ с фокальным параметром $p' = 100$ а. е. при $v' = 3\pi/4$. Качественно эти рисунки не

изменяется, если взять другие значения v' , причем в плоскости $y = 0$ должно удовлетворяться условие $\cos v' < 0$.

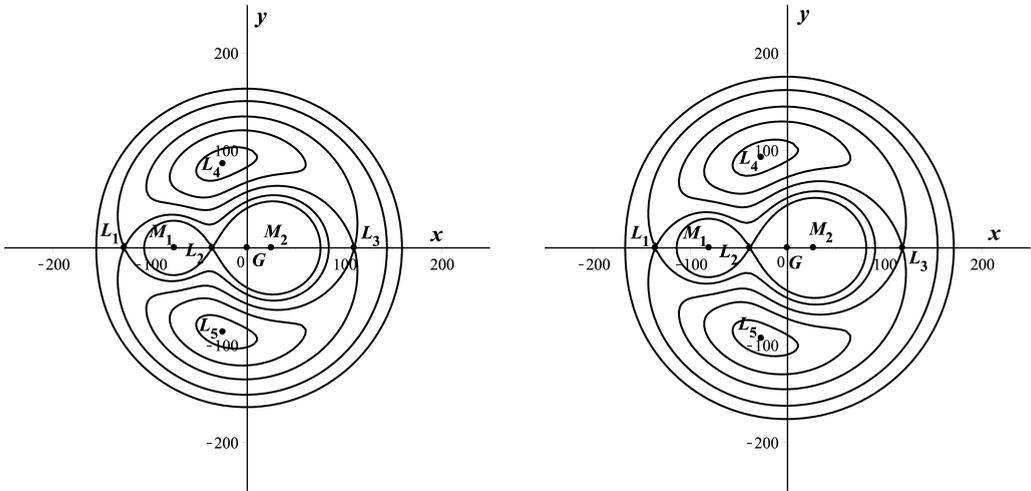


Рис. 1. ПМЭ и их коллинеарные L_n ($n = 1, 2, 3$) и треугольные L_4, L_5 особые точки в плоскости $z = 0$: слева в ОПЗ ($e' = 1, p' = 100$ а. е.), справа в ОГЗ ($e' = 1.15, p' = 107.5$ а. е.) трех тел: планета — Солнце — звезда с массой звезды $m' = 3M_\odot$. Обозначения: M_1 — Солнце, M_2 — звезда, G — начало координат и барицентр Солнца и звезды.

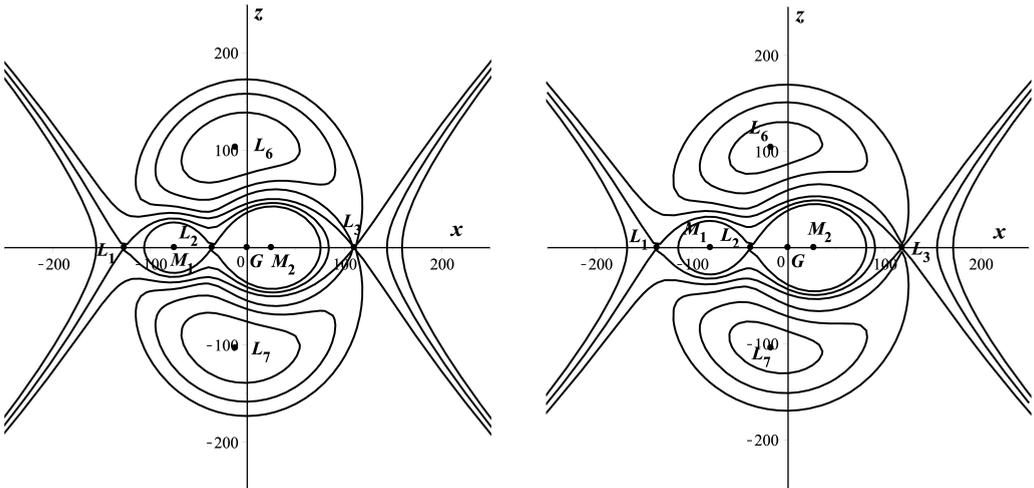


Рис. 2. ПМЭ и их коллинеарные L_n ($n = 1, 2, 3$) и треугольные L_6, L_7 особые точки в плоскости $y = 0$: слева в ОПЗ, справа в ОГЗ трех тел: планета — Солнце — звезда. Обозначения и значения параметров см. рис. 1.

Масса пробной звезды в обоих случаях равна $m' = 3M_\odot$. Абсциссы координат Солнца и пробной звезды относительно их барицентра G определяются значением фокального параметра $p' = q'(1 + e')$ при гиперболической орбите пробной звезды и значением $p' = 2q'$ при параболической. Координаты Солнца $M_1(-p' + p'\mu, 0, 0)$ и пробной звезды $M_2(p'\mu, 0, 0)$. При этом расстояние между Солнцем и пробной звезды равно $r' = p'\rho'$.

Закключение. Построены поверхности минимальной энергии, являющиеся обобщением поверхностей нулевой относительной скорости в задаче о пространственном движении пассивно-гравитирующего тела при сближении с центральным телом звезды, которая может совершать движение по параболической или по гиперболической орбитам. Определены особые точки, установлены их тип и устойчивость в смысле Ляпунова. При этом использовалось точное выражение силовой функции без ее разложения в ряд.

Литература

1. Маммадли А. Г. Устойчивость движения планет по Хиллу при звездных сближениях // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2016. Т. 3(61). Вып. 3. С. 498–505.
2. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М.: Наука, 1964.
3. Лукьянов Л. Г. Аналог поверхностей нулевой скорости в ограниченной эллиптической, параболической и гиперболической задачах трех тел // Письма в Астрон. журн. 2010. Т. 36, № 11. С. 869–880.
4. Себелей В. Теория орбит. Ограниченная задача трех тел. М.: Наука, 1982.
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1984.

Статья поступила в редакцию 5 октября 2016 г.; рекомендована в печать 22 декабря 2016 г.

Сведения об авторе

Маммадли Азад Гидаят оглы — кандидат физико-математических наук, доцент;
azad_mammadli@yahoo.com

SURFACES OF MINIMAL ENERGY AND THEIR SINGULAR POINTS IN THE PROBLEM OF STELLAR APPROACHES TOWARD THE SOLAR SYSTEM

Mammadli Azad Hidayat oglu

The Batabat astrophysical observatory of the Nakhzivan department of Nationale Academy Science of Azerbaijan, pr. H. Aliyev avenue, 35, Nakhzivan, 7000, Azerbaijan;
azad_mammadli@yahoo.com

Planetary motion during stellar approaches toward the Solar System is examined in the framework of the three-dimensional restricted three-body problem. The exact expression of the force function without a series expansion is used. Regions of possible motion of a planet are determined. Surfaces of minimal energy, which are generalizations of surfaces of zero velocity, are plotted. Singular (exceptional) points of these surfaces are determined, and their type and Lyapunov stability are ascertained. The results thus obtained are shown in the form of figures and tables. Refs 5. Figs 2. Table 1.

Keywords: celestial mechanics, restricted three-body problem, surfaces of minimal energy, singular (exceptional) points, Lyapunov stability.

References

1. Mamadli A. H., “The Hill stability of planetary motion under stellar approaches”, *Vestn. St. Petersburg University. Series 1* **3(61)**, issue 3, 498–505 (2016) [in Russian].
2. Duboshin G. N., *Cebestial mechanics. Analytical and qualitative methods* (Nauka, Moscow, 1964, 560 p.) [in Russian].
3. Lukyanov L. G., “Analog of the Surfaces of Zero Velocity in the Restricted Elliptic, Parabolic, and Hyperbolic Three-Body Problem”, *Astron. Let.* **36(11)**, 823–833 (2010).
4. Szebehely V., *Theory of Orbits. The Restricted Problem of Three Bodies* (Nauka, Moscow, 1982, 656 p.) [in Russian].
5. Korn G. A., Korn T. M., *Mathematical Handbook. For Scientists and Engineers* (Nauka, Moscow, 1984, 831 p.) [in Russian].

Для цитирования: Маммадли А. Г. Поверхности минимальной энергии и их особые точки в задаче о звездных сближениях с солнечной системой // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 2. С. 336–344. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.217

For citation: Mammadli A. H. Surfaces of minimal energy and their singular points in the problem of stellar approaches toward the solar system. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2017, vol. 4 (62), issue 2, pp. 336–344. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.217