УДК 517.925
MSC 34C20

Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 3

ДВУМЕРНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ КУБИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ: КЛАССИФИКАЦИЯ И НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ — IV

В. В. Басов, А. С. Чермных

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Данная статья является четвертой в цикле работ, посвященном двумерным однородным кубическим системам. В ней рассматривается случай, когда однородный векторный многочлен в правой части системы имеет квадратичный общий множитель с комплексными нулями. Множество таких систем разбивается на классы линейной эквивалентности, в каждом из которых на основании определенным образом введенных структурных и нормировочных принципов выделяется простейшая система — нормальная форма третьего порядка. Фактически, нормальная форма задается матрицей коэффициентов своей правой части, которая называется канонической формой (КФ). Каждая КФ имеет свою структуру расположения ненулевых элементов, их определенную нормировку и каноническое множество допустимых значений для ненормированных элементов, относящее КФ к выбранному классу эквивалентности. Помимо классификации для каждой КФ приводятся: a) условия на коэффициенты исходной системы, b) линейные неособые замены, преобразующие правую часть системы при этих условиях в выбранную КФ, c) получаемые значения ненормированных элементов КФ. Библиогр. 9 назв.

Ключевые слова: однородная кубическая система, нормальная форма, каноническая форма.

Введение. Статья посвящена нахождению канонических форм вещественных однородных кубических систем, имеющих общий множитель второй степени с комплексными нулями, и состоит из пяти разделов.

В первом разделе правая часть исходной системы, определяемая восемью коэффициентами, однозначно раскладывается в произведение общего множителя $P_0^2(x)$ с отрицательным дискриминантом D_0 и вектора Hx, где H — некая неособая матрица, дискриминант характеристического полинома которой обозначается через D. При этом в [1] была установлена инвариантность знаков D_0 и D. Приводится список нормированных структурных форм и канонических форм со своими множествами допустимых значений параметров, соответствующих случаю $D_0 < 0$.

Во втором и третьем разделах рассматриваются случаи $D \geq 0$ и $D < 0$ соответственно. Для каждого из этих случаев приводятся списки канонических форм со своими каноническими множествами допустимых значений параметров, введенными в [2]. Доказываются теоремы, подтверждающие линейную неэквивалентность приведенных КФ и демонстрирующие для каждой КФ в явном виде: a) все системы, относящиеся к классу линейной эквивалентности, порожденному данной КФ, b) линейную замену, сводящую любую такую систему к выбранной КФ, c) получаемые в результате замены значения параметров КФ из ее канонического множества.

В четвертом разделе выделяются минимальные канонические множества, введенные в [2], а в пятом — приведен единый список канонических форм и канонических множеств для систем с общим множителем второй степени, что являет собой суммарный результат работы [3] и данной статьи.

Дополнение освещает классификации систем с иными невозмущенными частями.

Эта работа является непосредственным продолжением работ [1–3], поэтому в ней

 DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.302

сохраняются все введенные ранее обозначения. В связи с большим количеством ссылок на формулы, полученные в [1–3], будем для краткости отмечать их номера верхним индексом. Например, систему (2.1) из [1] будем обозначать $(2.1)^1$.

1. Выделение $CF^{m,2}$ при отрицательном дискриминанте P_0^2. Система $(1.1)^3$, полученная после вынесения из правой части системы $(2.1)^1$ $\dot{x} = A\,q^{[3]}(x)$ общего множителя $P_0^2(x)$, при условии $D_0 = \beta^2 - \alpha\gamma < 0$ имеет вид

$$\dot{x} = P_0^2(x)Hx, \quad \begin{matrix} P_0^2 = x_1^2 + 2\beta x_1 x_2 + \gamma x_2^2, \\ D_0 = \beta^2 - \gamma < 0 \ \ (\alpha = 1), \end{matrix} \quad H = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}, \ \ \delta_{pq} = \det H \neq 0. \qquad (1.1^<)$$

Выделим из списка 1.1 работы [2] структурные формы до $SF_2^{7,2}$ включительно, относящиеся к случаю $l = 2$, $D_0 < 0$ (см. [2, определение 1.2]) и нормируем их согласно введенным НП в [2, разд. 1.2], попутно выделяя общий множитель P_0^2 с $\alpha = 1$, имеющий в силу $(2.19)^1$ дискриминант $D_0 < 0$, а также матрицу H с дискриминантом D ее характеристического многочлена и допустимые множества (см. [2, определение 1.8]). Кроме того, установим, какие из $NSF^{m,2,<}$ являются каноническими формами.

Список 1.1. Семнадцать $NSF^{m,2,<}$ и $CF^{m,2,<}$ до $CF_2^{7,2,<}$ включительно, для каждой указаны $(1, 2\beta, \gamma)$, H, D_0, D и нетривиальные $ps^{m,2,<}$ $(\sigma = \pm 1,\ u, v, w \neq 0)$.

$$CF_{8,+1}^{4,2,<,\geqslant} = \sigma\begin{pmatrix} u & 0 & u & 0 \\ 0 & 1 & 0 & +1 \end{pmatrix}, \ (1,0,1), \ \sigma\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \begin{matrix} -1, \\ (u-1)^2; \end{matrix}$$

$$CF_{34,+1}^{4,2,<,\gtrless} = \sigma\begin{pmatrix} 0 & u & 0 & u \\ 1 & 0 & +1 & 0 \end{pmatrix}, \ (1,0,1), \ \sigma\begin{pmatrix} 0 & u \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \begin{matrix} -1, \\ 4u; \end{matrix}$$

$$CF_{7}^{5,2,<,\geqslant} = \sigma\begin{pmatrix} u & -u & u & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ (1,-1,1), \ \sigma\begin{pmatrix} u & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ \begin{matrix} -3/4, \\ (u-1)^2; \end{matrix}$$

$$CF_{22}^{5,2,<,\gtreqqless} = \sigma\begin{pmatrix} 0 & u & -u & u \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ (1,-1,1), \ \sigma\begin{pmatrix} 0 & u \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ \begin{matrix} -3/4, \\ 4u+1; \end{matrix}$$

$$CF_{1}^{6,2,<,\geqslant} = \sigma\begin{pmatrix} u & u & uv & 0 \\ 0 & 1 & 1 & v \end{pmatrix}, \ (1,1,v), \ \sigma\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \begin{matrix} 1/4-v, \\ (u-1)^2; \end{matrix}$$

$$CF_{3}^{6,2,<,\geqslant} = \sigma\begin{pmatrix} u & u(1-v) & 0 & -uv^2 \\ 0 & 1 & 1 & v \end{pmatrix}, \ (1,1,v), \ \sigma\begin{pmatrix} u & -uv \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \begin{matrix} 1/4-v, \\ (u-1)^2; \end{matrix}$$

$$CF_{4,+1}^{6,2,<,\geqslant} = \sigma\begin{pmatrix} u & v & u & v \\ 0 & 1 & 0 & +1 \end{pmatrix}, \ (1,0,1), \ \sigma\begin{pmatrix} u & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \begin{matrix} -1, \\ (u-1)^2; \end{matrix}$$

$$CF_{6}^{6,2,<,\lesseqqgtr} = \sigma\begin{pmatrix} u & u(v^{-2}-v) & 0 & uv^{-3} \\ 1 & 0 & v^{-1}-v^2 & 1 \end{pmatrix}, (1,-v,v^{-1}), \sigma\begin{pmatrix} u & uv^{-2} \\ 1 & v \end{pmatrix}, \begin{matrix} (v^3/4-1)v^{-1}, \\ (u-v)^2 + 4uv^{-2}; \end{matrix}$$

$$CF_{7}^{6,2,<,\gtreqqless} = \sigma\begin{pmatrix} u & v & -v & u+v \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ (1,-1,1), \ \sigma\begin{pmatrix} u & u+v \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ \begin{matrix} -3/4, \\ (u+1)^2 + 4v; \end{matrix}$$

$$CF_{11,+1}^{6,2,<,\gtreqqless} = \sigma\begin{pmatrix} u & v & u & v \\ 1 & 0 & +1 & 0 \end{pmatrix}, \ (1,0,1), \ \sigma\begin{pmatrix} u & v \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \begin{matrix} -1, \\ u^2 + 4v; \end{matrix}$$

$$CF_{2}^{7,2,<,\gtreqqless} = \sigma\begin{pmatrix} u & w & uv^{-1} - v(uv+w) & u + wv^{-1} \\ 1 & 0 & v^{-1}-v^2 & 1 \end{pmatrix}, (1,-v,v^{-1}), \sigma\begin{pmatrix} u & uv+w \\ 1 & v \end{pmatrix}, \begin{matrix} (v^3/4-1)v^{-1}, \\ (u+v)^2 + 4w; \end{matrix}$$

$$NSF_{5}^{6,2,<,\geqslant} = \sigma\begin{pmatrix} u & 0 & u(v-1) & -uv \\ 0 & 1 & 1 & v \end{pmatrix}, \ (1,1,v), \ \sigma\begin{pmatrix} u & -u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \begin{matrix} 1/4-v, \\ (u-1)^2; \end{matrix}$$

$$NSF_{12}^{6,2,<,\gtreqqless} = \sigma\begin{pmatrix} 0 & -uv & u & -uv^2 \\ 1 & 0 & v-v^{-2} & 1 \end{pmatrix}, \ (1,v^{-1},v), \ \sigma\begin{pmatrix} 0 & -uv \\ 1 & v^{-1} \end{pmatrix}, \ \begin{matrix} (1/4-v^3)v^{-2}, \\ v^{-2} - 4uv; \end{matrix}$$

$$NSF_{13}^{6,2,<,\gtreqqless} = \sigma\begin{pmatrix} u & 0 & uv & uv^2(1+v) \\ 1 & 1 & 0 & v(1+v)^2 \end{pmatrix}, \ (1,-v,v^2+v), \ \sigma\begin{pmatrix} u & uv \\ 1 & 1+v \end{pmatrix}, \ \begin{matrix} -v(3v+4)/4, \\ (u+v+1)^2 - 4u; \end{matrix}$$

$$NSF_{15}^{6,2,<,\gtreqqless} = \sigma\begin{pmatrix} 0 & u & uv & uv(v-1) \\ 1 & 1 & 0 & -v(v-1)^2 \end{pmatrix}, \ (1,v,v^2-v), \ \sigma\begin{pmatrix} 0 & u \\ 1 & 1-v \end{pmatrix}, \ \begin{matrix} -v(3v-4)/4, \\ (v-1)^2 + 4u; \end{matrix}$$

$$NSF_{16}^{6,2,<,\gtrless} = \sigma\begin{pmatrix} 0 & u & u & uv \\ 1 & 1 & v & 0 \end{pmatrix}, \ (1,1,v), \ \sigma\begin{pmatrix} 0 & u \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \begin{matrix} 1/4-v, \\ 4u; \end{matrix}$$

$$NSF_1^{7,2,<,\geqslant} = \sigma \begin{pmatrix} u & w & uv-u+w & v(w-u) \\ 0 & 1 & 1 & v \end{pmatrix}, \quad (1,1,v), \quad \sigma \begin{pmatrix} u & w-u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} 1/4-v, \\ (u-1)^2; \end{matrix}$$

$ps_1^{6,2,<} = \{v > 1/4\}$, $ps_3^{6,2,<} = \{v > 1/4,\ v \neq 1\}$, $ps_5^{6,2,<} = \{v > 1/4,\ v \neq 1\}$,
$ps_6^{6,2,<} = \{v \in (0, \sqrt[3]{4}),\ v \neq 1\}$, $ps_7^{6,2,<} = \{v \neq -u\}$, $ps_{12}^{6,2,<} = \{v > 4^{-1/3}, v \neq 1\}$,
$ps_{13}^{6,2,<} = \{v \notin [-4/3, 0]\}$, $ps_{15}^{6,2,<} = \{v \notin [0, 4/3]\}$, $ps_{16}^{6,2,<} = \{v > 1/4\}$,
$ps_1^{7,2,<} = \{v > 1/4,\ w \neq u, u(1-v)\}$,
$ps_2^{7,2,<} = \{v \in (0, \sqrt[3]{4}),\ v \neq 1,\ w \neq -uv, -u(v - v^{-2})\}$.

Отметим, что в списке 1.1 только $CF_{8,+1}^{4,2,<}$ и $CF_1^{6,2,<}$ имеют диагональную матрицу H. Кроме того, канонические множества $CF_{8,+1}^{4,2,<}$ имеют вид $cs_{8,+1}^{4,2,<,>} = \{u \neq 1\}$ и $cs_{8,+1}^{4,2,<,=} = \{u = 1\}$, так как предшествующие формы с $D_0 < 0$ у нее отсутствуют.

2. Случай $D \geq 0$. Итак, будем предполагать сначала, что в системе $(1.1^<)$ матрица H имеет вещественные собственные числа λ_1, λ_2.

Набор 2.1. Константы и замены, используемые далее в разделе 2:

$\psi_1(u) = (u^2 - 3u + 3)^{1/2}(u-3)^{-1}$, $\psi_2(u) = (3u^2 - 3u + 1)(3u-1)^{-2}$,
$\psi_3(u) = (u^2 + 3u + 3)(3u^2 + 3u + 1)(3u^2 + 8u + 3)^{-2}$; $\psi_4 = \tilde{v}(\tilde{v} - (\tilde{v}^2 - 1)^{1/2})/2$;
$L_{8,+1}^{4,2,<,>} = \{r_1 = (\tilde{\alpha}|\lambda_2|)^{-1/2},\ s_1, r_2 = 0,\ s_2 = (\tilde{\gamma}|\lambda_2|)^{-1/2}\}$;
$L_{34,+1}^{4,2,<,>} = \{r_1 = -v^{1/2} r_2,\ s_1 = (v(4v-1))^{1/4}(2v^{1/2} + 1)^{-1},\ r_2 = (v(4v-1))^{-1/4}$,
$s_2 = v^{-1/2} s_1\}$;
$L1_7^{5,2,<,>} = \{r_1 = (\tilde{u}^2 - 3\tilde{u} + 3)^{1/2}(1 - \tilde{u})^{-1},\ s_1 = 0,\ r_2 = (1 - \tilde{u})^{-1} s_2,\ s_2 = \psi_1^{-1}(\tilde{u})\}$;
$L2_7^{5,2,<,>} = \{r_1 = \tilde{u}^{1/3}|\tilde{u}|^{1/6}(\tilde{u} - 1)^{-1},\ s_1 = |\tilde{u}|^{-1/2},\ r_2 = (3\tilde{u} - 1)\tilde{u}^{-1} r_1,\ s_2 = 0\}$;
$L_{22}^{5,2,<,>} = \{r_1 = -(\tilde{u}^2 + 3\tilde{u} + 3)^{1/2}(\tilde{u} - 1)^{-1}|\tilde{u} + 1|^{-1/2},\ s_1 = \tilde{u}(\tilde{u} + 1)^{-1} r_1$,
$r_2 = -(3\tilde{u}^2 + 8\tilde{u} + 3)(\tilde{u}^2 + 3\tilde{u} + 3)^{-1} r_1,\ s_2 = (\tilde{u} + 1)^{-1} r_2\}$;
$L_1^{6,2,<,>} = \{r_1 = (\tilde{\alpha}|\lambda_2|)^{-1/2},\ s_1, r_2 = 0,\ s_2 = \tilde{\alpha}(2\tilde{\beta})^{-1} r_1\}$;
$L_{8,+1}^{4,2,<,=} = \{r_1 = -\beta r_2,\ s_1 = |p_1|^{-1/2},\ r_2 = |p_1|^{-1/2}(\gamma - \beta^2)^{-1/2},\ s_2 = 0\}$;
$L_7^{5,2,<,=} = \{r_1 = 1/2,\ s_1 = -1,\ r_2 = \mp\sqrt{3}/2,\ s_2 = 0\}$;
$L_{22}^{5,2,<,=} = \{r_1 = \pm\sqrt{14}/7,\ s_1 = \mp 5\sqrt{14}/28,\ r_2 = \sqrt{42}/14,\ s_2 = \sqrt{42}/28\}$;
$L_3^{6,2,<,=} = \{r_1 = 1,\ s_1 = 1/2,\ r_2 = 0,\ s_2 = -(\tilde{v} + (\tilde{v}^2 - 1)^{1/2})/2\}$;
$L_{4,+1}^{6,2,<,=} = \{r_1 = 0,\ s_1 = \tilde{\gamma}^{1/2}|\nu|^{-1/2}\tilde{\varsigma}^{-1},\ r_2 = |\tilde{\gamma}\nu|^{-1/2},\ s_2 = -\tilde{\beta}\tilde{\gamma}^{-1} s_1\}$.

В [3] из системы $(1.1^<)$ с $\gamma - \beta^2 > 0$ при $D > 0$ $(\lambda_1, \lambda_2 \neq 0,\ \lambda_1 - \lambda_2 = \sigma_0\sqrt{D} \neq 0)$ заменой J_1^2 (см. набор $(1.1)^3$) получена система $(1.5)^3$, в которой согласно $(2.18)^1$ и $(2.19)^1$ $\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma} > 0$ и $\tilde{\varsigma} = (\tilde{\alpha}\tilde{\gamma} - \tilde{\beta}^2)^{1/2} > 0$, а при $D = 0$ $(\lambda_1, \lambda_2 = \nu = (p_1 + q_2)/2 \neq 0)$ и $[q_1 \neq 0 \vee q_1 = 0,\ p_2 \neq 0]$ заменой $[J_{2a}^2 \vee J_{2b}^2]$ получена система $(1.6)^3$ с $\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}, \tilde{\varsigma} > 0$. Наконец, система $(1.1^<)$ с $\gamma - \beta^2 > 0$ при $D = 0$ и $q_1, p_2 = 0$ сразу имеет вид $(1.5)^3$, но с $\lambda_1, \lambda_2 = \nu$, так как в этом случае H диагональна и в ней $p_1, q_2 = \nu \neq 0$.

Лемма 2.1. 1) *Система* $(1.5)^3$ *при* $\tilde{\beta} = 0$ *заменой* $L_{8,+1}^{4,2,<,>}$ *сводится к* $CF_{8,+1}^{4,2,<,>}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}\lambda_2$, $u = \lambda_1\lambda_2^{-1}$, *а при* $\tilde{\beta} \neq 0$ *заменой* $L_1^{6,2,<,>}$ *— к* $NSF_1^{6,2,<,>}$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}\lambda_2$, $u = \lambda_1\lambda_2^{-1}, v = \tilde{\alpha}\tilde{\gamma}(2\tilde{\beta})^{-2}$.

2) *Система* $(1.6)^3$ *заменой* $L_{4,+1}^{6,2,<,=}$ *сводится к* $NSF_{4,+1}^{6,2,<,=}$ $(u = 1)$ *с* $\sigma = \operatorname{sign}\nu$, $v = \tilde{\gamma}(\nu\tilde{\varsigma})^{-1}$.

3) *Система* $(1.1^<)$ *при* $D, q_1, p_2 = 0$ *заменой* $L_{8,+1}^{4,2,<,=}$ *сводится к* $CF_{8,+1}^{4,2,<,=}$ $(u = 1)$ *с* $\sigma = \operatorname{sign} p_1$.

Следствие 2.1. *Все шесть* $NSF^{m,2,<}$ *из списка 1.1 при* $D > 0$ *и* $D = 0$ *каноническими формами не являются.*

Утверждение 2.1. *Следующие формы из списка 1.1 с указанными значениями параметров сводятся к предшествующим согласно СП (см. в [2, разд. 1.1])* $SF_i^{m,2}$:

1) $NSF_{34,+1}^{4,2,<,>}$ *с* $ps_{34,+1}^{4,2,<,>} = \{u > 0\}$ *при* $u = 1$ *заменой* (2.2)[1] $L = \begin{pmatrix} r_1 & s_1 \\ r_2 & s_2 \end{pmatrix}$ $(\det L \neq 0)$ *с* $s_1 = s_2$, $r_2 = -r_1$ *сводится к* $SF_8^{4,2}$;

2) $NSF_7^{5,2,<,>}$ *с* $ps_7^{5,2,<,>} = \{u \neq 1\}$:
a) при $u = 3$ *заменой с* $r_1 = 0$, $s_1 = 2s_2$ *сводится к* $SF_8^{4,2}$;
b) при $u = -1$ *заменой с* $s_1 = s_2(1+\sqrt{7})/3$, $r_2 = -r_1(1+\sqrt{7})/2$ *сводится к* $SF_{34}^{4,2}$;

3) $NSF_{22}^{5,2,<,>}$ *с* $ps_{22}^{5,2,<,>} = \{u > -1/4\}$:
a) при $u = 3/2$ *заменой с* $r_1 = -r_2(\sqrt{7}+1)/2$, $s_1 = s_2(\sqrt{7}-1)/2$ *сводится к* $SF_8^{4,2}$;
b) при $u = [\,6 \vee 4 \mp \sqrt{13}\,]$ *заменой с* $r_1 = [\,4r_2/3 \vee (-1 \pm \sqrt{13})r_2/6\,]$, $s_2 = [\,-3s_1 \vee (-1 \mp \sqrt{13})s_1/6\,]$ *сводится к* $SF_7^{5,2}$;

4) $NSF_1^{6,2,<,>}(\tilde\sigma, \tilde u, v)$ *с* $ps_1^{6,2,<,>} = \{\tilde u \neq 1,\ v > 1/4\}$:
a) при $\tilde u = -1$ *заменой* $L_{34,+1}^{4,2,<,>}$ *сводится к* $NSF_{34,+1}^{4,2,<,>}$ *с* $\sigma = \tilde\sigma$, $u = (2v^{1/2}-1)(2v^{1/2}+1)^{-1}$;
b) при $\tilde u \neq -1, [3 \vee 1/3]$, $v = [\psi_1^2(\tilde u) \vee \psi_2(\tilde u)]$ *заменой* $[L1_7^{5,2,<,>} \vee L2_7^{5,2,<,>}]$ *сводится к* $NSF_7^{5,2,<,>}$ *с* $\sigma = [\tilde\sigma \vee \tilde\sigma\,\mathrm{sign}\,\tilde u]$, $u = [\tilde u \vee \tilde u^{-1}]$;
c) при $\tilde u \neq -1$, $v = \psi_3(\tilde u)$ *заменой* $L_{22}^{5,2,<,>}$ *сводится к* $NSF_{22}^{5,2,<,>}$ *с* $\sigma = \tilde\sigma\,\mathrm{sign}(\tilde u + 1)$, $u = -\tilde u(\tilde u+1)^{-2}$;

5) $NSF_3^{6,2,<,=}$ *с* $ps_3^{6,2,<,=} = \{u = 1,\ v > 1/4,\ v \neq 1\}$:
a) при $v = 1/3$ *заменой с* $r_2 = -3r_1$, $s_2 = 0$ *сводится к* $NSF_7^{5,2,<,=}$;
b) при $v = (49 \mp 7\sqrt{46})/6$ *заменой с* $r_1 = r_2(11 \mp 2\sqrt{46})/6$, $s_1 = s_2(-38 \pm 5\sqrt{46})/6$ *сводится к* $NSF_{22}^{5,2,<,=}$;

6) $NSF_{4,+1}^{6,2,<,=}(\tilde\sigma, 1, \tilde v)$ *с* $ps_{4,+1}^{6,2,<,=} = \{u = 1\}$:
a) при $v = \pm 2/\sqrt{3}$ *заменой* $L_7^{5,2,<,=}$ *сводится к* $NSF_7^{5,2,<,=}$ $(u = 1)$ *с* $\sigma = \tilde\sigma$;
b) при $v = \mp 7/\sqrt{3}$ *заменой* $L_{22}^{5,2,<,=}$ *сводится к* $NSF_{22}^{5,2,<,=}$ $(u = -1/4)$ *с* $\sigma = \tilde\sigma$;
c) при $|\tilde v| \geq 1$ *заменой* $L_3^{6,2,<,=}$ *сводится к* $NSF_3^{6,2,<,=}$ $(u = 1)$ *с* $\sigma = \tilde\sigma$, $v = \psi_4(\tilde v)$.

(См. [4, прил. 3.6.1, с. 141] к пунктам 1–3; [4, прил. 3.6.2, с. 148] к пункту 4; [4, прил. 3.6.3, с. 152] к пунктам 5, 6.)

Замечание 2.1. Здесь и в дальнейшем, следуя соглашению 1.3 из [2], запись «$\ldots\ \zeta = [\,\varsigma_1 \vee \upsilon_1\,]\ \ldots\ \eta = [\,\varsigma_2 \vee \upsilon_2\,]\ \ldots$» означает, что или $\zeta = \varsigma_1$, $\eta = \varsigma_2$, или $\zeta = \upsilon_1$, $\eta = \upsilon_2$, а ссылка на приложение к работе [4] выделяет в нем программу, символьными вычислениями в Maple подтверждающую получаемые результаты.

Приведенные выше утверждения позволяют в случае $l = 2$, $D_0 < 0$, $D \geq 0$ выписать все канонические формы со своими каноническими множествами.

Список 2.1. Пять $CF_i^{m,2,<,>}$, пять $CF_i^{m,2,<,=}$ и их $cs^{m,2,<,\geqslant}$ $(\sigma = \pm 1,\ u, v \neq 0)$.

$$CF_{8,+1}^{4,2,<,\geqslant} = \sigma \begin{pmatrix} u & 0 & u & 0 \\ 0 & 1 & 0 & +1 \end{pmatrix}, \qquad CF_{34,+1}^{4,2,<,>} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & 0 & u \\ 1 & 0 & +1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$CF_7^{5,2,<,\geqslant} = \sigma \begin{pmatrix} u & -u & u & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, CF_{22}^{5,2,<,\geqslant} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & -u & u \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, CF_1^{6,2,<,>} = \sigma \begin{pmatrix} u & u & uv & 0 \\ 0 & 1 & 1 & v \end{pmatrix},$$

$$CF_3^{6,2,<,=} = \sigma \begin{pmatrix} u & u(1-v) & 0 & -uv^2 \\ 0 & 1 & 1 & v \end{pmatrix}, \quad CF_{4,+1}^{6,2,<,=} = \sigma \begin{pmatrix} u & v & u & v \\ 0 & 1 & 0 & +1 \end{pmatrix};$$

$cs_{8,+1}^{4,2,<,>} = \{u \neq 1\}$, $cs_{8,+1}^{4,2,<,=} = \{u = 1\}$; $cs_{34,+1}^{4,2,<,>} = \{u > 0,\ u \neq 1\}$;
$cs_7^{5,2,<,>} = \{u \neq \pm 1, 3\}$, $cs_7^{5,2,<,=} = \{u = 1\}$;
$cs_{22}^{5,2,<,>} = \{u > -1/4,\ u \neq 3/2, 6, 4 \pm \sqrt{13}\}$,
$cs_{22}^{5,2,<,=} = \{u = -1/4\}$; $cs_1^{6,2,<,>} = \{u \neq \pm 1,\ v > 1/4,\ v \neq \psi_1^2(u), \psi_2(u), \psi_3(u)\}$;
$cs_3^{6,2,<,=} = \{u = 1,\ v > 1/4,\ v \neq 1/3, 1, (49 \mp 7\sqrt{46})/6\}$; $cs_{4,+1}^{6,2,<,=} = \{u = 1,\ |v| < 1\}$.

Теорема 2.1. *Любая система* $(2.1)^1$ *с* $l=2$, *записанная в виде* $(1.1^<)$ *согласно* $(2.15)^1$ *и имеющая* $D \geq 0$, *линейно эквивалентна системе, порожденной неким представителем соответствующей канонической формы из списка 2.1. Ниже для каждых* $CF_i^{m,2,<,>}$ *и* $CF_i^{m,2,<,=}$ *приведены: a) условия на коэффициенты системы* $(1.1^<)$, *b) замены* $(2.2)^1$, *преобразующие правую часть системы* $(1.1^<)$ *при указанных условиях в выбранную форму, c) получаемые при этом значения множителя* σ *и параметров из* $cs_i^{m,2,<,>}$ *или* $cs_i^{m,2,<,=}$:

$CF_{8,+1}^{4,2,<,>}$: *a)* $D>0$, *в* $(1.5)^3$ $\tilde\beta=0$; *b)* J_1^2, $L_{8,+1}^{4,2,<,>}$; *c)* $\sigma=\mathrm{sign}\lambda_2$, $u=\lambda_1\lambda_2^{-1}$;

$CF_{34,+1}^{4,2,<,>}$: *a)* $D>0$, *в* $(1.5)^3$ $\tilde\beta\neq 0$, $\nu=0$; *b)* J_1^2, $L_1^{6,2,<,>}$, $L_{34,+1}^{4,2,<,>}$ *с* $v=\tilde\alpha\tilde\gamma(2\tilde\beta)^{-2}$; *c)* $\sigma=\mathrm{sign}\lambda_2$, $u=(\tilde\alpha\tilde\gamma-|\tilde\beta|)(\tilde\alpha\tilde\gamma+|\tilde\beta|)^{-1}$;

$CF_7^{5,2,<,>}$: *a)* $D>0$, *в* $(1.5)^3$ $\tilde\beta\neq 0$, $\tilde\alpha\tilde\gamma(2\tilde\beta)^{-2}=[\,\psi_1^2(\tilde u)\vee\psi_2(\tilde u)\,]$, *где* $\tilde u=\lambda_1\lambda_2^{-1}\neq -1,[3\vee 1/3]$; *b)* J_1^2, $L_1^{6,2,<,>}$, $[\,L1_7^{5,2,<,>}\vee L2_7^{5,2,<,>}\,]$; *c)* $\sigma=[\,\mathrm{sign}\lambda_2\vee\mathrm{sign}\lambda_1\,]$, $u=[\,\tilde u\vee\tilde u^{-1}\,]$;

$CF_{22}^{5,2,<,>}$: *a)* $D>0$, *в* $(1.5)^3$ $\tilde\beta\neq 0$, $\tilde u=\lambda_1\lambda_2^{-1}\neq -1,(-5\pm\sqrt{13})/6,(-5\mp\sqrt{13})/2,(-4\pm\sqrt{7})/3,-3/2,-2/3$, $\tilde\alpha\tilde\gamma(2\tilde\beta)^{-2}=\psi_3(\tilde u)$; *b)* J_1^2, $L_1^{6,2,<,>}$, $L_{22}^{5,2,<,>}$; *c)* $\sigma=\mathrm{sign}\,\nu$, $u=-\delta_{pq}(2\nu)^{-2}$;

$CF_1^{6,2,<,>}$: *a)* $D>0$, *в* $(1.5)^3$ $\tilde\beta\neq 0$, $\tilde u=\lambda_1\lambda_2^{-1}\neq -1$, $\tilde v=\tilde\alpha\tilde\gamma(2\tilde\beta)^{-2}\neq\psi_1^2(\tilde u),\psi_2(\tilde u)$, $\psi_3(\tilde u)$; *b)* J_1^2, $L_1^{6,2,<,>}$; *c)* $\sigma=\mathrm{sign}\lambda_2$, $u=\tilde u$, $v=\tilde v$;

$CF_{8,+1}^{4,2,<,=}$: *a)* $D=0$, $q_1=0$, $p_2=0$; *b)* $L_{8,+1}^{4,2,<,=}$; *c)* $\sigma=\mathrm{sign}\,p_1$;

$CF_7^{5,2,<,=}$: *a)* $D=0$, $[\,q_1\neq 0\vee q_1=0,\,p_2\neq 0]$, $\tilde\gamma(\nu\tilde\varsigma)^{-1}=\pm 2/\sqrt{3}$, *где* $\tilde\alpha$, $\tilde\beta$, $\tilde\gamma$ *— из* $[(1.6_a)^3\vee(1.6_b)^3]$; *b)* $[J_{2a}^2\vee J_{2b}^2]$, $L_{4,+1}^{6,2,<,=}$, $L_7^{5,2,<,=}$; *c)* $\sigma=\mathrm{sign}\,\nu$;

$CF_{22}^{5,2,<,=}$: *a)* $D=0$, $[\,q_1\neq 0\vee q_1=0,\,p_2\neq 0]$, $\tilde\gamma(\nu\tilde\varsigma)^{-1}=\pm 7/\sqrt{3}$, *где* $\tilde\alpha$, $\tilde\beta$, $\tilde\gamma$ *— из* $[(1.6_a)^3\vee(1.6_b)^3]$; *b)* $[J_{2a}^2\vee J_{2b}^2]$, $L_{4,+1}^{6,2,<,=}$, $L_{22}^{5,2,<,=}$; *c)* $\sigma=\mathrm{sign}\,\nu$;

$CF_3^{6,2,<,=}$: *a)* $D=0$, $[q_1\neq 0\vee q_1=0,\,p_2\neq 0]$, $|\tilde v|\geq 1$, $|\tilde v|\neq 2/\sqrt{3},\,7/\sqrt{3}$, *где* $\tilde v=\tilde\gamma(\nu\tilde\varsigma)^{-1}$, $\tilde\alpha,\tilde\beta,\tilde\gamma$ *— из* $[(1.6_a)^3\vee(1.6_b)^3]$; *b)* $[J_{2a}^2\vee J_{2b}^2]$, $L_{4,+1}^{6,2,<,=}$, $L_3^{6,2,<,=}$; *c)* $\sigma=\mathrm{sign}\,\nu$, $v=\psi_4$;

$CF_{4,+1}^{6,2,<,=}$: *a)* $D=0$, $[q_1\neq 0\vee q_1=0,\,p_2\neq 0]$, $|\tilde v|<1$, *где* $\tilde v=\tilde\gamma(\nu\tilde\varsigma)^{-1}$, $\tilde\alpha$, $\tilde\beta$, $\tilde\gamma$ *— из* $[(1.6_a)^3\vee(1.6_b)^3]$; *b)* $[J_{2a}^2\vee J_{2b}^2]$, $L_{4,+1}^{6,2,<,=}$; *c)* $\sigma=\mathrm{sign}\,\nu$, $v=\tilde v$.

Доказательство. I. Рассмотрим случай $D>0$. По лемме 2.1, п. 1_2 при $\tilde\beta\neq 0$ система $(1.5)^3$, полученная из $(1.1^<)$ заменой J_1^2, всегда сводится к $NSF_1^{6,2,<,>}(\tilde\sigma,\tilde u,\tilde v)$ с $\tilde\sigma=\mathrm{sign}\lambda_2$, $\tilde u=\lambda_1\lambda_2^{-1}$, $v=\tilde\alpha\tilde\gamma(2\tilde\beta)^{-2}>1/4$ (см. [4, прил. 3.6.2, с. 148]). А эта $NSF_1^{6,2,<,>}$ по утверждению 2.1, п. 4 может быть сведена к одной из трех предшествующих $NSF^{m,2,<,>}$ из списка 2.1.

Остается уточнить ограничения, гарантирующие сведение к $CF^{m,2,<,>}$.

4_a) При $\tilde u=-1\Leftrightarrow\lambda_2=-\lambda_1\Leftrightarrow\nu=0$ получена $CF_{34,+1}^{4,2,<,>}$ с $\sigma=\tilde\sigma$, $u=(2v^{1/2}-1)(2v^{1/2}+1)^{-1}=(\tilde\alpha\tilde\gamma-|\tilde\beta|)(\tilde\alpha\tilde\gamma+|\tilde\beta|)^{-1}$. При этом $0<u<1$, и ограничений нет, так как $NSF_{34,+1}^{4,2,<,>}$ согласно утверждению 2.1, п. 1 сводится к $SF_8^{4,2}$ только при $u=1$.

4_b) При $\tilde u\neq -1,[3\vee 1/3]$, $v=[\,\psi_1^2(\tilde u)\vee\psi_2(\tilde u)\,]$ получена $CF_7^{5,2,<,>}$ с $\sigma=[\tilde\sigma\vee\tilde\sigma\,\mathrm{sign}\,\tilde u]$ ($\tilde\sigma\,\mathrm{sign}\,\tilde u=\mathrm{sign}\,\lambda_1$), $u=[\tilde u\vee\tilde u^{-1}]$. При этом $u\neq -1,3$, и ограничений нет, так как $NSF_7^{5,2,<,>}$ согласно 2.1, п. 2 сводится к предшествующим формам только при $u=-1,3$.

4_c) При $\tilde u\neq -1\Leftrightarrow\nu\neq 0$, $v=\psi_3(\tilde u)$ получена $NSF_{22}^{5,2,<,>}$ с $\sigma=\tilde\sigma\,\mathrm{sign}(\tilde u+1)=\mathrm{sign}\,\nu$, $u=-\tilde u(\tilde u+1)^{-2}=-\delta_{pq}(2\nu)^{-2}$. Кроме того, $\tilde u\neq(-4\pm\sqrt{7})/3$, иначе $u=3/2$, $\tilde u\neq -3/2,\,-2/3$, иначе $u=6$, $\tilde u\neq(-5\pm\sqrt{13})/6$, $(-5\mp\sqrt{13})/2$, иначе $u=4\mp\sqrt{13}$, так как $NSF_{22}^{5,2,<,>}$ по утверждению 2.1, п. 3 при таких u сводится к предшествующим формам.

II. Рассмотрим случай $D = 0$. По лемме 2.1, п. 2_1 при $[\,q_1 \neq 0 \vee q_1 = 0,\, p_2 \neq 0]$ система $(1.6)^3$, полученная из $(1.1^<)$ заменой $[J^2_{2a} \vee J^2_{2b}]$, всегда сводится к $NSF^{6,2,<,=}_{4,+1}(\tilde\sigma, 1, \tilde v)$ с $\tilde\sigma = \operatorname{sign}\nu$, $\tilde v = \tilde\gamma(\nu\varsigma)^{-1}$ (см. [4, прил. 3.6.3, с. 152]). А эта $NSF^{6,2,<,=}_{4,+1}$ согласно утверждению 2.1, п. 6 может быть сведена к одной из трех предшествующих ей $CF^{m,2,<,=}$ из списка 2.1.

В частности, в п. 6_c при $|\tilde v| \geq 1$ и, дополнительно, $|\tilde v| \neq 2/\sqrt{3}, 7/\sqrt{3}$ получена $CF^{6,2,<,=}_3$ с $\sigma = \operatorname{sign}\nu$, $v = \psi_4(\tilde v)$, так как $\tilde v = -2/\sqrt{3} \Leftrightarrow v = 1$ и $v = 1/3$ при $\tilde v = 2/\sqrt{3}$, $v = (49 \pm 7\sqrt{46})/6$ при $\tilde v = \mp 7/\sqrt{3}$, а $NSF^{6,2,<,=}_3$ согласно утверждению 2.1, п. 5 сводится к предшествующим формам только при таких значениях v.

Остальные результаты теоремы в достаточной степени очевидны. $\square$

3. Случай $D < 0$. Будем предполагать теперь, что в системе $(1.1^<)$ матрица H имеет комплексно сопряженные собственные числа λ_1, λ_2.

Набор 3.1. Константы, интервалы и замены, используемые далее в разделе 3:
$\psi_5 = 4\hat v^6(\hat u - 1)^2 + 4\hat v^3(2\hat u + 1) + 1$, $\psi_6 = \hat v^3(1 - \hat u) - 1 + \psi_5^{1/2}$; $\psi_7^\pm = (v^3 - 2 \pm 2(1 - v^3)^{1/2})v^{-2}$;
$\psi_8 = \tilde\gamma\nu + \tilde\beta\mu$, $\psi_9 = \tilde\gamma^2\nu^2 + 2\tilde\beta\tilde\gamma\nu\mu + (9\tilde\alpha\tilde\gamma - 8\tilde\beta^2)\mu^2$, $\psi_{10} = 2\tilde\gamma\nu - \tilde\beta\mu$,
$\psi_{11} = \tilde\gamma^3\nu^3 + 3\tilde\gamma(\tilde\gamma^2 + 2\tilde\alpha\tilde\gamma - 2\tilde\beta^2)\nu\mu^2 + \tilde\beta(4\tilde\beta^2 - 3\tilde\alpha\tilde\gamma + 3\tilde\gamma^2)\mu^3$, $\underline{\theta_1} \in \mathbb{R}^1$ — нуль $\psi_{11}(\nu, 1)$,
$\psi_{12} = \tilde\gamma^2\nu^2 - 4\tilde\beta\tilde\gamma\nu\mu + (4\tilde\beta^2 + 9\tilde\gamma^2)\mu^2$, $\psi_{13} = \tilde\gamma^2\nu^2 + 2\tilde\beta\tilde\gamma\nu\mu - (3\tilde\alpha\tilde\gamma - 4\tilde\beta^2)\mu^2$, $\psi_{14}^\pm = -\tilde\beta \pm \sqrt{3}\varsigma$,
$\psi_{15}^\pm = 2\varsigma \pm \sqrt{3}\tilde\beta$, $\psi_{16} = 4\tilde\alpha\tilde\gamma - 3\tilde\beta^2$, $\psi_{17} = \tilde v^2 - 3\tilde v + 9$, $\psi_{18} = 4\tilde v^2 - 3\tilde v + 9 + (4\tilde v + 3)\psi_{17}^{1/2}$,
$\psi_{19} = -(\tilde v^6 + 6\tilde v^{9/2} + 13\tilde v^3 + 12\tilde v^{3/2} + 4)(\tilde v^6 - 5\tilde v^3 + 4)^{-1}$, $\psi_{20}^\mp = \tilde u(3\tilde u \mp \sqrt{3})(2 \mp \sqrt{3}\tilde u)^{-1}$,
$\psi_{21} = (\tilde v - 3 + (\tilde v^2 - 3\tilde v + 9)^{1/2})^2(3\tilde v)^{-1}$; $\psi_{22} = \tilde v^2\tilde w^2 - 5\tilde v^4\tilde w + 2\tilde v\tilde w + 4\tilde v^6 + 4\tilde v^3 + 1$,
$\psi_{23} = 2\tilde v\tilde w - 5\tilde v^3 + 2 + 2\psi_{22}^{1/2}$, $\psi_{24} = \tilde v^3 - \tilde u\tilde v^2 + \tilde u^2\tilde v - 3$, $\underline{\theta_2(u)} > 0$ — нуль $\psi_{24}(u, \theta)$,
$\psi_{25}^\pm = (\tilde v^2 \pm (12\tilde v - 3\tilde v^4)^{1/2})(2\tilde v)^{-1}$, $\psi_{26} = 2\tilde v^3 + \tilde u\tilde v^2 - \tilde u^2\tilde v - 9$, $\underline{\theta_3(u)} \in \mathbb{R}^1$ — $\forall$ нуль $\psi_{26}(u, \theta)$,
$\psi_{27} = 4\tilde v^2\tilde w^2 - 4\tilde v\tilde w(2\tilde v^3 - 3\tilde u\tilde v^2 - 2) + (\tilde v^3 - 3\tilde u\tilde v^2 + 2)^2$, $\psi_{28} = 2\tilde v\tilde w - 2\tilde v^3 + 3\tilde u\tilde v^2 + 2 - \psi_{27}^{1/2}$,
$\psi_{29} = \tilde u\tilde v^2 - \tilde u^2\tilde v - 1$, $\psi_{30} = \theta_3^2(\tilde u)(2\tilde u - \theta_3(\tilde u))^2\psi_{29}^{-1}(\tilde u, \theta_3(\tilde u))(8\theta_3^3(\tilde u) - 5\psi_{29}(\tilde u, \theta_3(\tilde u)) - 32)^{-1}$,
$\psi_{31} = -\psi_{29}(\tilde u, \theta_3(\tilde u))(3\tilde w + 4\tilde u^2 + 2\theta_3(\tilde u)\tilde u - 2\theta_3^2(\tilde u))(\theta_3(\tilde u)(2\tilde u - \theta_3(\tilde u))\tilde w)^{-1}$,
$\psi_{32} = 3(\tilde u^3 - 3\tilde u^2 + 6\tilde u + 1)(\tilde u^2 - \tilde u + 1)((\tilde u - 2)(2\tilde u - 1)(\tilde u + 1))^{-1}$,
$\psi_{33} = 3(\tilde u\tilde v^6 - 2\tilde u^2\tilde v^5 + (4\tilde u^3 - 1)\tilde v^4 - \tilde u(4\tilde u^3 + 1)\tilde v^3 + \tilde u^2(\tilde u^3 - 6)\tilde v^2 + (6\tilde u^3 + 2)\tilde v + 5\tilde u)(\tilde v(2\tilde u - \tilde v)\psi_{24})^{-1}$, $\psi_{34} = (\tilde v^4 - \tilde u\tilde v^3 + 3\tilde u^2\tilde v^2 - \tilde u^3\tilde v - 2\tilde v - 5\tilde u)\psi_{29}^{-1}$,
$\psi_{35} = (2\tilde u - \theta_2(\tilde u))(3\theta_2(\tilde u)\tilde u^3 - 3\theta_2^2(\tilde u)\tilde u^2 + \theta_2^3(\tilde u)\tilde u - \tilde u + \theta_2^4(\tilde u) - 4\theta_2(\tilde u))$,
$\psi_{36} = -(3\psi_{26}(\tilde u, \theta_3(\tilde u))\tilde w + 2(2\tilde u - \theta_3(\tilde u))(3\theta_3(\tilde u)\tilde u^3 - 6\theta_3^2(\tilde u)\tilde u^2 + 5(\theta_3^3(\tilde u) - 1)\tilde u + 2\theta_3^4(\tilde u) - 11\theta_3(\tilde u)))((8\theta_3^3(\tilde u) - 5\psi_{29}(\tilde u, \theta_3(\tilde u)) - 32)\tilde w)^{-1}$;

$\hat a_1^* = ((\hat u^2\hat v^6 - 2\hat v^3(\hat v^3 - 1)\hat u + \hat v^6 + 10\hat v^3 - 2)\psi_5^{1/2} + 2\hat u^3\hat v^9 - 6\hat v^6(\hat v^3 - 1)\hat u^2 + 6\hat v^3(\hat v^3 - 1)^2\hat u - 2(\hat v^3 - 1)^3)(9\hat v^3\psi_6)^{-1}$, $\hat b_1^* = ((\hat v^3\hat u^2 - (10\hat v^3 - 4)\hat u + 9\hat v^3)\psi_5^{1/2} + 2\hat v^6\hat u^3 + \hat v^3(14\hat v^3 + 1)\hat u^2 - 2(\hat v^3 - 1)(17\hat v^3 - 2)\hat u + 9\hat v^3(2\hat v^3 + 1))(6\psi_6)^{-1}$, $\hat a_2^* = -((4\hat v^9\hat u^3 - 3\hat v^6(4\hat v^3 - 3)\hat u^2 + 6\hat v^6(2\hat v^3 + 1)\hat u - (4\hat v^3 - 1)(\hat v^3 + 2)^2)\psi_5^{1/2} + 8\hat v^{12}\hat u^4 - 2\hat v^9(16\hat v^3 - 13)\hat u^3 + 3\hat v^6(16\hat v^6 - 6\hat v^3 + 5)\hat u^2 - 2\hat v^3(\hat v^3 - 1)(16\hat v^6 + 37\hat v^3 - 8)\hat u + (2\hat v^3 + 1)(4\hat v^3 - 1)(\hat v^3 + 2)^2)(54\hat v^3\psi_6)^{-1}$, $\hat c_2^* = ((9\hat v^6\hat u^2 - 2\hat v^3(5\hat v^3 - 8)\hat u + (\hat v^3 + 2)^2)\psi_5^{1/2} - 18\hat v^9\hat u^3 + \hat v^6(34\hat v^3 - 49)\hat u^2 - 2\hat v^3(7\hat v^6 - 5\hat v^3 + 16)\hat u - (2\hat v^3 + 1)(\hat v^3 + 2)^2)(6\hat v^3\psi_6)^{-1}$;

$\tilde a_1^* = (\tilde v^3 - 4)(\tilde u + \tilde v)((2\tilde v\tilde w - 2\tilde v^3 + 3\tilde u\tilde v^2 + 2)\psi_{27} - 4\tilde v^2\tilde w^2 - 4\tilde v(-2\tilde v^3 + 3\tilde u\tilde v^2 + 2)\tilde w - 2\tilde v^6 + 7\tilde u\tilde v^5 - 7\tilde u^2\tilde v^4 + 8\tilde u\tilde v^2 - 8\tilde u^2\tilde v - 4)(2\tilde v)^{-1}\psi_{28}^{-2}$, $\tilde b_1^* = (\tilde v^3 - 4)((\tilde v\tilde w - \tilde u\tilde v^2 + \tilde u^2\tilde v + 1)\psi_{27} - 2\tilde v^2\tilde w^2 + \tilde v(3\tilde v^3 - 5\tilde u\tilde v^2 + 2\tilde u^2\tilde v - 4)\tilde w + (\tilde v^3 - 3\tilde u\tilde v^2 + 2)(\tilde u\tilde v^2 - \tilde u^2\tilde v - 1))\tilde v^{-2}(2\tilde v - 4\tilde u)^{-1}\psi_{28}^{-1}$, $\tilde a_2^* = (\tilde v - 2\tilde u)(\tilde v^3 - 4)((4\tilde v\tilde w^2 - (7\tilde v^3 - 12\tilde u\tilde v^2 - 4)\tilde w + (2\tilde v^3 + 1)(\tilde v - 2\tilde u)^2)\psi_{27} - 8\tilde v^2\tilde w^3 + 2\tilde v(11\tilde v^3 - 18\tilde u\tilde v^2 - 8)\tilde w^2 - (15\tilde v^6 - 55\tilde u\tilde v^5 + 52\tilde u^2\tilde v^4 - 8\tilde v^3 + 4\tilde u\tilde v^2 + 8\tilde u^2\tilde v + 8)\tilde w + (2\tilde v^3 + 1)(\tilde v^3 - 3\tilde u\tilde v^2 + 2)(\tilde v - 2\tilde u)^2)\psi_{28}^{-3}/2$, $\tilde c_2^* = \psi_{28}^2(\tilde v(\tilde v - 2\tilde u)^2(4 - \tilde v^3))^{-1}\tilde a_2^*$;
$I_* = (-1, \theta_*) \cup (1/2, 2)$, где $\theta_* \approx -0.17$ — нуль $14\theta^5 - 47\theta^4 + 113\theta^3 - 103\theta^2 + 61\theta + 14$;
$I_1^+ = (-7 - \sqrt{37}, -2) \cup (-7 + \sqrt{37}, 0)$, $I_1^- = (0, 7 - \sqrt{37}) \cup (2, 7 + \sqrt{37})$, $I_2^+ = (0, 1)$,

$I_2^- = (0, 7^{2/3}13^{-1/3})$, $I_3 = (-13\cdot 7^{-1/3}, -7^{-1/3})$, $I_4 = (-\infty, -1)\cup(5\cdot 91^{-1/3}, +\infty)$;
$L1_{34,+1}^{4,2,<,<} = \{r_1, s_2 = 0,\ s_1 = -\tilde\gamma(\tilde\alpha\tilde\gamma)^{-3/2}\mu^{-1/2},\ r_2 = (\tilde\alpha\tilde\gamma)^{-1/2}\mu^{-1/2}\}$;
$L1_{22}^{5,2,<,<} = \{r_1 = 0,\ s_1 = \tilde\gamma|\tilde\beta|^{-3/2}\mu^{-1/2},\ r_2 = -\tilde\beta|\tilde\beta|^{-3/2}\mu^{-1/2},\ s_2 = r_2/2\}$;
$L1_{6}^{6,2,<,<} = L1_2^{7,2,<,<}$ с $\nu = \theta_1\mu$;
$L1_{7}^{6,2,<,<} = \{r_1 = 0,\ s_1 = 3^{3/4}\tilde\gamma(2\tilde\varsigma)^{-3/2}\mu^{-1/2},\ r_2 = \mp 3^{1/4}(2\tilde\varsigma)^{-1/2}\mu^{-1/2}$,
$s_2 = 3^{1/4}(-\sqrt{3}\tilde\beta \pm \tilde\varsigma)(2\tilde\varsigma\mu)^{-3/2}\mu^{-1/2}\}$;
$L1_{11,+1}^{6,2,<,<} = \{r_1 = 0,\ s_1 = -\tilde\gamma\tilde\varsigma^{-3/2}\mu^{-1/2},\ r_2 = \tilde\varsigma^{-1/2}\mu^{-1/2},\ s_2 = -\tilde\beta\tilde\gamma^{-1}s_1\}$;
$L\hat{1}_{11,+1}^{6,2,<,<} = \{r_1 = (2\hat v^3(1+\hat u) + 1 - \psi_5^{1/2})(2\hat v^3(1-\hat u) - 2 - \psi_5^{1/2})(6\hat v(4\hat v^3 - 1))^{-1}r_2$,
$s_1 = (2\hat v^3(1-\hat u) - 1 + \psi_5^{1/2})(2\hat v)^{-1}s_2,\ r_2 = (\hat a_2^*\hat c_2^*)^{-1/4},\ s_2 = (\hat a_2^*\hat c_2^*)^{1/4}/\hat c_2^*\}$;
$L1_{12}^{6,2,<,<} = \{r_1 = 0,\ s_1 = 2\tilde\gamma(|\tilde\beta|\mu\psi_{16})^{-1/2},\ r_2 = -(2\tilde\beta)^{1/3}(|\tilde\beta|\mu)^{-1/2}\psi_{16}^{-1/6}$,
$s_2 = -\tilde\beta(|\tilde\beta|\mu\psi_{16})^{-1/2}\}$;
$L1_{2}^{7,2,<,<} = \{r_1 = 0,\ s_1 = 3^{3/2}\tilde\gamma\mu(2|\psi_8|\psi_9)^{-1/2},\ r_2 = -3^{1/2}(2|\psi_8|\psi_9)^{-1/6}\operatorname{sign}\psi_8$,
$s_2 = (\tilde\gamma\nu - 2\tilde\beta\mu)(3\tilde\gamma\mu)^{-1}s_1\}$;
$L2_{34,+1}^{4,2,<,<} = \{r_1 = (\tilde v + \psi_{17}^{1/2})r_2/3,\ s_1 = (\tilde v - \psi_{17}^{1/2})s_2/3,\ r_2 = 3(\psi_{17}\psi_{18}(3 - \tilde v + \psi_{17}^{1/2}))^{-1/4}$,
$s_2 = \psi_{17}^{-1/4}\psi_{18}^{1/4}(3 - \tilde v + \psi_{17}^{1/2})^{-3/4}\}$;
$L3_{34,+1}^{4,2,<,<} = \{r_1 = -\tilde v^{-1/2}r_2,\ s_1 = -\tilde v^{1/4}(2 - \tilde v^{3/2} - \tilde v^3)^{1/4}(2 - 3\tilde v^{3/2} + \tilde v^3)^{-3/4}$,
$r_2 = \tilde v^{3/4}(2 - \tilde v^{3/2} - \tilde v^3)^{-1/4}(2 - 3\tilde v^{3/2} + \tilde v^3)^{-1/4},\ s_2 = \tilde v^{1/2}s_1\}$;
$L4_{34,+1}^{4,2,<,<} = \{r_1 = \tilde v(\tilde v\tilde w - \tilde v^3 - 5 - \psi_{22}^{1/2})\psi_{23}^{-1}r_2,\ s_1 = (\tilde v\tilde w - \tilde v^3 + 1 - \psi_{22}^{1/2})\tilde v^{-2}s_2/3$,
$r_2 = (\tilde a_2^*(\varrho)\tilde c_2^*(\varrho))^{-1/4}, s_2 = (\tilde a_2^*(\varrho)\tilde c_2^*(\varrho))^{1/4}/\tilde c_2^*(\varrho)\}$, где $(\varrho) = (-\tilde v, \tilde v, \tilde w)$;
$L2_{22}^{5,2,<,<} = \{r_1 = \mp\tilde u s_2,\ s_1 = -(2\tilde u \mp \sqrt{3})s_2,\ r_2 = -(2 \mp \sqrt{3}\tilde u)\tilde u^{-1}r_1$,
$s_2 = (\tilde u^2 \mp \sqrt{3}\tilde u + 1)^{-1/2}(\pm 4\tilde u)^{-1/2}\}$;
$L3_{22}^{5,2,<,<} = \{r_1 = (\tilde u + 2)\tilde u^{-1}r_2,\ s_1 = -r_2,\ r_2 = -\tilde u((\tilde u + 1)(\tilde u^2 + 2\tilde u + 4))^{-1/2}$,
$s_2 = 2\tilde u^{-1}r_2\}$;
$L4_{22}^{5,2,<,<} = \{r_1 = -s_2,\ s_1 = (\tilde u + 3)s_2,\ r_2 = (\tilde u + 2)s_2,\ s_2 = ((-\tilde u - 1)(\tilde u^2 + 5\tilde u + 7))^{-1}\}$;
$L5_{22}^{5,2,<,<} = \{r_1 = -2^{1/3}r_2,\ s_1 = 2^{1/3}((\sqrt{5} \pm 1)/5)^{1/2},\ r_2 = \pm((\sqrt{5} \mp 1)/5)^{1/2}$,
$s_2 = (2(\sqrt{5} \mp 2)/5)^{1/2}\}$;
$L6_{22}^{5,2,<,<} = \{r_1 = -7^{-1/3}r_2,\ s_1 = -3r_1,\ r_2 = 7^{1/2}(-7^{1/3}\tilde u - 1)^{-1/2}/3,\ s_2 = 0\}$;
$L7_{22}^{5,2,<,<} = \{r_1 = \tilde u r_2,\ s_1 = (\theta_2(\tilde u) - \tilde u)s_2,\ r_2 = |\theta_2(\tilde u)(\tilde u + \theta_2(\tilde u))^{-1}\psi_{29}^{-1}|^{1/2},\ s_2 = r_2\}$;
$L8_{22}^{5,2,<,<} = \{r_1 = \tilde v r_2/2,\ s_1 = \psi_{25}^{-}s_2,\ r_2 = -2s_2,\ s_2 = (12 - 3\tilde v^3)^{-1/2}\}$;
$L9_{22}^{5,2,<,<} = \{r_1 = \psi_{25}^{\mp}r_2,\ s_1 = \psi_{25}^{\pm}s_2,\ r_2 = (4 - \tilde v^3)^{-1/2}(\mp(\tilde v^{-1}\psi_{25}^{\mp} + 1))^{-1/2},\ s_2 = r_2\}$;
$L2_{6}^{6,2,<,<} = \{r_1 = -(\tilde u^2 + 3)(2\tilde u)^{-1}r_2,\ s_1 = \tilde u s_2,\ r_2 = (2\tilde u)^{4/3}(\tilde u^2 + 9)^{-2/3}s_2$,
$s_2 = (-\tilde u^2 + 3)^{1/2}(\tilde u^2 + 1)^{-1}|2\tilde u|^{-1/2}\}$;
$L3_{6}^{6,2,<,<} = \{r_1 = -(\tilde u^2 - 2\tilde u + 3)(2\tilde u - 1)^{-1}r_2,\ s_1 = \tilde u s_2,\ r_2 = (2\tilde u - 1)^{4/3}(\tilde u^2 - \tilde u + 7)^{-2/3}s_2$,
$s_2 = |(\tilde u - 2)(\tilde u + 1)|^{1/2}|2\tilde u - 1|^{-1/2}(\tilde u^2 - \tilde u + 1)^{-1}\}$;
$L4_{6}^{6,2,<,<} = \{r_1 = -(2\tilde u\tilde v^2 - \tilde u^2\tilde v - 3)(\tilde v(\tilde v - 2\tilde u))^{-1}r_2,\ s_1 = \tilde u s_2$,
$r_2 = \tilde v^{2/3}(\tilde v - 2\tilde u)^{4/3}\psi_{26}^{-2/3}s_2,\ s_2 = -\tilde v^{1/2}|\psi_{24}|^{1/2}\psi_{29}^{-1}|\tilde v - 2\tilde u|^{-1/2}\}$;
$L2_{7}^{6,2,<,<} = \{r_1 = \psi_{25}^{\mp}r_2,\ s_1 = \psi_{25}^{\pm}s_2,\ r_2 = 3^{1/4}\tilde v^{1/4}(4 - \tilde v^3)^{-1/4}(-\tilde w)^{-1/2},\ s_2 = r_2\}$;
$L3_{7}^{6,2,<,<} = \{r_1 = \tilde u r_2,\ s_1 = (\theta_2(\tilde u) - \tilde u)s_2,\ r_2 = |\theta_2(\tilde u)(2\tilde u - \theta_2(\tilde u))\psi_{29}^{-1}(\tilde u, \theta_2(\tilde u))\tilde w^{-1}|^{1/2}$,
$s_2 = r_2\}$;
$L2_{11,+1}^{6,2,<,<} = \{r_1 = (2\tilde v^2\tilde w - \tilde v^4 + \tilde u\tilde v^3 - 2\tilde v + 8\tilde u - \tilde v\psi_{27}^{1/2})(2\psi_{28})^{-1}r_2,\ r_2 = (\tilde a_2^*\tilde c_2^*)^{-1/4}$,
$s_1 = (2\tilde v\tilde w - \tilde v^3 + \tilde u\tilde v^2 + 2 - \psi_{27}^{1/2})(2\tilde v(\tilde v - 2\tilde u))^{-1}s_2,\ s_2 = (\tilde a_2^*\tilde c_2^*)^{1/4}/\tilde c_2^*\}$;
$L3_{11,+1}^{6,2,<,<} = \{r_1 = \tilde v r_2/2,\ s_1 = (\tilde w r_2)^{-1},\ r_2 = \sqrt{2}\tilde v^{1/4}(-\tilde w)^{-1/2}(4 - \tilde v^3)^{-1/4},\ s_2 = 0\}$;
$L4_{11,+1}^{6,2,<,<} = \{r_1 = \tilde u r_2,\ s_1 = (2\theta_3(\tilde u) - \tilde u)s_2/3,\ r_2 = \sqrt{2}\psi_{30}^{1/4}(-\tilde w)^{-1/2}$,
$s_2 = -3\sqrt{2}\psi_{30}^{3/4}\psi_{29}(\tilde u, \theta_3(\tilde u))(\theta_3(\tilde u)(2\tilde u - \theta_3(\tilde u)))^{-1}(-\tilde w)^{-1/2}\}$;
также будут использоваться константы и замены, собранные в наборе $(1.1)^3$.

Из системы $(1.1^<)$ с $\gamma-\beta^2>0$ при $D<0$ $(p_2q_1<0,\ \nu^2+\mu^2=\delta_{pq},\ \mu>0)$ заменой J_3^2 получена система $(1.7)^3$, в которой согласно $(2.18)^1$ и $(2.19)^1$ имеем $\tilde\alpha,\tilde\gamma,\tilde\varsigma>0$.

Осуществим разбиение элементов $\tilde\alpha,\tilde\beta,\tilde\gamma,\nu,\mu$ системы $(1.7)^3$ на непересекающиеся множества, в каждом из которых $(1.7)^3$ сводится к определенной форме из списка 1.1.

Лемма 3.1. *Система* $(1.7)^3$ *сводится:*
1_1) *при* $\nu=-\tilde\beta\tilde\gamma^{-1}\mu,\ \tilde\beta=0$ *заменой* $L1^{4,2,<,<}_{34,+1}$ *к* $CF^{4,2,<,<}_{34,+1}$ *с* $\sigma=1,\ u=\tilde\gamma^2\tilde\varsigma^{-2}$;
1_2) *при* $\nu=-\tilde\beta\tilde\gamma^{-1}\mu,\ \tilde\beta\neq0$ *заменой* $L1^{6,2,<,<}_{11,+1}$ *к* $NSF^{6,2,<,<}_{11,+1}$ *с* $\sigma=1,\ u=-2\tilde\beta\tilde\varsigma^{-1}$, $v=-(\tilde\beta^2+\tilde\gamma^2)\tilde\varsigma^{-2}$;
2_1) *при* $\nu=\tilde\beta(2\tilde\gamma)^{-1}\mu,\ \tilde\beta=0$ *имеем случай* 1_1;
2_2^a) *при* $\nu=\tilde\beta(2\tilde\gamma)^{-1}\mu,\ \tilde\beta\neq0,\ \tilde\alpha=7\tilde\beta^2(4\tilde\gamma)^{-1}$ *заменой* $L1^{5,2,<,<}_{22}$ *к* $CF^{5,2,<,<}_{22}$ *с* $\sigma=\operatorname{sign}\tilde\beta$, $u=-(\tilde\beta^2+4\tilde\gamma^2)(2\tilde\beta)^{-2}$;
2_2^b) *при* $\nu=\tilde\beta(2\tilde\gamma)^{-1}\mu,\ \tilde\beta\neq0,\ \tilde\alpha\neq7\tilde\beta^2(4\tilde\gamma)^{-1}$ *заменой* $L1^{6,2,<,<}_{12}$ *к* $NSF^{6,2,<,<}_{12}$ *с* $\sigma=\operatorname{sign}\tilde\beta$, $u=(\tilde\beta^2+4\tilde\gamma^2)\psi_{16}^{-1}$, $v=\psi_{16}^{1/3}(2\tilde\beta)^{-2/3}$;
3) *при* $\nu=\theta_1\mu$ *заменой* $L1^{6,2,<,<}_{6}$ *к* $NSF^{6,2,<,<}_{6}$ *с* $\sigma=\operatorname{sign}\psi_8(\cdot)$, *где* $(\cdot)=(\theta_*\mu,\mu)$, $u=2(2\psi_8(\cdot)\psi_9(\cdot))^{-1/3}\psi_{10}(\cdot)$, $v=-(2\psi_8(\cdot)\psi_{10}(\cdot))^{1/3}\psi_{12}^{-1/3}(\cdot)$;
4_1) *при* $\nu=\psi_{14}^{\pm}\tilde\gamma^{-1}\mu,\ \psi_{15}^{\mp}=0\ (\tilde\beta\neq0)$ *имеем случай* 2_2^a;
4_2) *при* $\nu=\psi_{14}^{\pm}\tilde\gamma^{-1}\mu,\ \psi_{15}^{\mp}\neq0$ *заменой* $L1^{6,2,<,<}_{7}$ *к* $NSF^{6,2,<,<}_{7}$ *с* $\sigma=\pm1$, $u=\psi_{15}^{\mp}\tilde\varsigma^{-1}$, $v=-3({\psi_{14}^{\pm}}^2+\tilde\gamma^2)(2\tilde\varsigma)^{-2}$;
5) *при* $\nu\neq-\tilde\beta\tilde\gamma^{-1}\mu,\theta_1\mu,\psi_{14}^{\pm}\tilde\gamma^{-1}\mu,\tilde\beta(2\tilde\gamma)^{-1}\mu$ *заменой* $L1^{7,2,<,<}_{2}$ *к* $NSF^{7,2,<,<}_{2}$ *с* $\sigma=\operatorname{sign}\psi_8$, $u=2(2\psi_8\psi_9)^{-1/3}\psi_{10}$, $v=(2\psi_8)^{2/3}\psi_9^{-1/3}$, $w=-9\tilde\gamma^2(2\psi_8\psi_9)^{-2/3}\delta_{pq}$.

Доказательство. Любая замена $(2.2)^1$ $L=(r_1,s_1;\,r_2,s_2)$ $(\det L\neq0)$ с

$$r_1=0,\quad s_2=(\tilde\gamma\nu-2\tilde\beta\mu)(3\tilde\gamma\mu)^{-1}s_1\quad(s_1,r_2\neq0),\tag{3.1}$$

сводит $(1.7)^3$ к системе

$$\begin{pmatrix}\hat a_1&\hat b_1&\hat c_1&\hat d_1\\ \hat a_2&0&\hat c_2&\hat d_2\end{pmatrix},\tag{3.2}$$

у которой, в частности, $\hat a_2=-\tilde\gamma\mu r_1^3s_1^{-1}\neq0$, $\hat d_2=2(\tilde\gamma\mu)^{-2}\psi_8\psi_9s_1^2/27$.

В выражении для $\hat d_2$ однородный многочлен удовлетворяет неравенству $\psi_9(\nu,\mu)=\tilde\gamma^2\nu^2+2\tilde\beta\tilde\gamma\nu\mu+(9\tilde\alpha\tilde\gamma-8\tilde\beta^2)\mu^2>0$, так как имеет нули $\nu_{1,2}=(-\tilde\beta\pm3\varsigma\mathrm{i})\tilde\gamma^{-1}\mu$. Поэтому $\hat d_2=0\Leftrightarrow\psi_8=\tilde\gamma\nu+\tilde\beta\mu=0$.

1) $\psi_8=0\Leftrightarrow\nu=-\tilde\beta\tilde\gamma^{-1}\mu$. При $s_1=-\tilde\gamma\tilde\varsigma^{-3/2}\mu^{-1/2}$, $r_2=\tilde\varsigma^{-1/2}\mu^{-1/2}$, $s_2=-\tilde\beta\tilde\gamma^{-1}s_1$ замена $L1^{6,2,<,<}_{11,+1}$ сводит систему (3.2) к следующему виду: $\begin{pmatrix}-2\tilde\beta\tilde\varsigma^{-1}&-(\tilde\beta^2+\tilde\gamma^2)\tilde\varsigma^{-2}&-2\tilde\beta\tilde\varsigma^{-1}&-(\tilde\beta^2+\tilde\gamma^2)\tilde\varsigma^{-2}\\ 1&0&1&0\end{pmatrix}$.

1_1) $\tilde\beta=0\Rightarrow\nu=0$. При $s_1=-\tilde\gamma(\tilde\alpha\tilde\gamma)^{-3/2}\mu^{-1/2}$, $r_2=(\tilde\alpha\tilde\gamma)^{-1/2}\mu^{-1/2}$ замена $L1^{4,2,<,<}_{34,+1}$ с учетом (3.1) приводит к $CF^{4,2,<,<}_{34,+1}$ с $\sigma=1$, $u=-\tilde\alpha^{-1}\tilde\gamma\ (=D/4<0)$.

1_2) $\tilde\beta\neq0$, тогда получена $NSF^{6,2,<,<}_{11,+1}$ с $\sigma=1$, $u=-2\tilde\beta\tilde\varsigma^{-1}$, $v=-(\tilde\beta^2+\tilde\gamma^2)\tilde\varsigma^{-2}<0$.

2) $\psi_8=\tilde\beta\mu+\tilde\gamma\nu\neq0$. При $s_1=3^{3/2}\tilde\gamma\mu(2|\psi_8|\psi_9)^{-1/2}$, $r_2=-3^{1/2}(2|\psi_8|\psi_9)^{-1/6}\operatorname{sign}\psi_8$ замена $L^{7,2,<,<}_2$ с учетом (3.1) позволяет записать систему (3.2) в виде

$$\hat\sigma\begin{pmatrix}2(2\psi_8\psi_9)^{-1/3}\psi_{10}&-9\tilde\gamma^2(2\psi_8\psi_9)^{-2/3}\delta_{pq}&3(\psi_8\psi_9)^{-1}\psi_{11}&-(2\psi_8)^{-4/3}\psi_9^{-1/3}\psi_{12}\\ 1&0&-3(2\psi_8\psi_9)^{-2/3}\psi_{13}&1\end{pmatrix},\tag{3.3}$$

где $\hat\sigma = \operatorname{sign}\psi_8$, однородные многочлены $\psi_{10}(\nu,\mu) = 2\tilde\gamma\nu - \tilde\beta\mu$, $\psi_{11}(\nu,\mu) = \tilde\gamma^3\nu^3 + 3\tilde\gamma(\tilde\gamma^2+2\tilde\alpha\tilde\gamma-2\tilde\beta^2)\nu\mu^2+\tilde\beta(4\tilde\beta^2-3\tilde\alpha\tilde\gamma+3\tilde\gamma^2)\mu^3$, $\psi_{12}(\nu,\mu) = \tilde\gamma^2\nu^2-4\tilde\beta\tilde\gamma\nu\mu+(4\tilde\beta^2+9\tilde\gamma^2)\mu^2$, $\psi_{13}(\nu,\mu) = \tilde\gamma^2\nu^2+2\tilde\beta\tilde\gamma\nu\mu-(3\tilde\alpha\tilde\gamma-4\tilde\beta^2)\mu^2$. При этом имеем $\psi'_{11}(\nu,1) = \tilde\gamma(\tilde\gamma^2(\nu^2+1)+2(\tilde\alpha\tilde\gamma-\tilde\beta^2)) > 0$, поэтому θ_1 — единственный вещественный нуль $\psi_{11}(\nu,1)$; $\psi_{12}(\nu,\mu) > 0$, поскольку имеет нули $\nu_{1,2} = (2\tilde\beta \pm 3\tilde\gamma\mathrm{i})\tilde\gamma^{-1}\mu$; $\psi_{13}(\nu,\mu)$ имеет нули $\nu_{1,2} = \psi^{\pm}_{14}\tilde\gamma^{-1}\mu$, $\psi^{\pm}_{14} = -\tilde\beta \pm \sqrt{3}\tilde\varsigma$.

2_1) $\hat a_1 = 0 \Leftrightarrow \psi_{10} = 0 \Leftrightarrow \nu = \tilde\beta(2\tilde\gamma)^{-1}\mu$.

2^1_1) $\tilde\beta = 0$, тогда $\psi_{10} = 0 \Leftrightarrow \psi_8 = 0$ $(\nu = 0)$ и попадаем в случай 1_1.

2^2_1) $\tilde\beta \neq 0$. При $s_1 = 2\tilde\gamma(|\tilde\beta|\mu\psi_{16})^{-1/2}$, $r_2 = -(2\tilde\beta)^{1/3}(|\tilde\beta|\mu)^{-1/2}\psi_{16}^{-1/6}$ $(4\tilde\alpha\tilde\gamma-3\tilde\beta^2 > 0)$ замена $L1^{6,2,<,<}_{12}$ с учетом (3.1) приводит систему (3.3) к виду

$$\operatorname{sign}\tilde\beta\begin{pmatrix}0 & -(\tilde\beta^2+4\tilde\gamma^2)(2\tilde\beta\psi_{16})^{-2/3} & (\tilde\beta^2+4\tilde\gamma^2)\psi_{16}^{-1} & -(\tilde\beta^2+4\tilde\gamma^2)(2\tilde\beta)^{-4/3}\psi_{16}^{-1/3}\\ 1 & 0 & (4\tilde\alpha\tilde\gamma-7\tilde\beta^2)(2\tilde\beta\psi_{16})^{-2/3} & 1\end{pmatrix}.$$

2^{2a}_1) $\hat c_2 = 0 \Leftrightarrow \tilde\alpha = 7\tilde\beta^2(4\tilde\gamma)^{-1}$. При $s_1 = \tilde\gamma|\tilde\beta|^{-3/2}\mu^{-1/2}$, $r_2 = -\tilde\beta|\tilde\beta|^{-3/2}\mu^{-1/2}$ имеем замену $L1^{5,2,<,<}_{22}$ с учетом (3.1) и получаем $NSF^{5,2,<,<}_{22}$ с $\sigma = \operatorname{sign}\tilde\beta$, $u = -(\tilde\beta^2+4\tilde\gamma^2)(2\tilde\beta)^{-2} < -1/4$.

2^{2b}_1) $4\tilde\alpha\tilde\gamma - 7\tilde\beta^2 \neq 0$, тогда получаем $NSF^{6,2,<,<}_{12}$ с $\sigma = \operatorname{sign}\tilde\beta$, $u = (\tilde\beta^2+4\tilde\gamma^2)\psi_{16}^{-1}$, $v = \psi_{16}^{1/3}(2\tilde\beta)^{-2/3}$.

2_2) $\hat c_1 = 0 \Leftrightarrow \psi_{11} = 0 \Leftrightarrow \nu = \theta_1\mu$, где $\theta_1 \in \mathbb{R}^1$ — $\forall$ нуль $\psi_{11}(\nu,1)$. Тогда система (3.3) при $\nu = \theta_1\mu$ — это $NSF^{6,2,<,<}_6$ с $\sigma = \operatorname{sign}\psi_8(\cdot)$, $u = 2(2\psi_8(\cdot)\psi_9(\cdot))^{-1/3}\psi_{10}(\cdot)$, $v = -(2\psi_8(\cdot)\psi_{10}(\cdot))^{1/3}\psi_{12}(\cdot)^{-1/3}$, $(\cdot) = (\theta_1\mu,\mu)$, так как $v \neq 1$ и $\psi_{10}(\cdot)$, $\psi_{12}(\cdot) \neq 0$. А приводящая к $NSF^{6,2,<,<}_6$ замена $L1^{6,2,<,<}_6$ — это $L^{7,2,<,<}_2$ с $\nu = \theta_1\mu$.

2_3) $\hat c_2 = 0 \Leftrightarrow \psi_{13} = 0 \Leftrightarrow \nu = \psi^{\pm}_{14}\tilde\gamma^{-1}\mu$. Система (3.3) при $s_1 = 3^{3/4}\tilde\gamma(2\tilde\varsigma)^{-3/2}\mu^{-1/2}$, $r_2 = \mp 3^{1/4}(2\tilde\varsigma\mu)^{-1/2}$ с помощью замены $L1^{6,2,<,<}_7$ с учетом (3.1) принимает вид

$$\pm\begin{pmatrix}\psi^{\mp}_{15}\tilde\varsigma^{-1} & -3({\psi^{\pm}_{14}}^2+\tilde\gamma^2)(2\tilde\varsigma)^{-2} & 3({\psi^{\pm}_{14}}^2+\tilde\gamma^2)(2\tilde\varsigma)^{-2} & -((\tilde\varsigma\mp\sqrt{3}\tilde\beta)^2+3\tilde\gamma^2)(2\tilde\varsigma)^{-2}\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

2^1_3) $\hat a_1 = 0 \Leftrightarrow \psi^{\mp}_{15} = 0$ $(\tilde\beta \neq 0) \Leftrightarrow \{\operatorname{sign}\tilde\beta = \pm 1,\ \tilde\alpha = 7\tilde\beta^2(4\tilde\gamma)^{-1}\} \Rightarrow$ попадаем в 2^{2a}_1).

2^2_3) $\psi^{\mp}_{15} \neq 0 \Rightarrow$ получена $NSF^{6,2,<,<}_7$ с $\sigma = \pm 1$, $u = \psi^{\mp}_{15}\tilde\varsigma^{-1}$, $v = -3({\psi^{\pm}_{14}}^2+\tilde\gamma^2)(2\tilde\varsigma)^{-2}$.

2_4) $\hat a_1, \hat c_1, \hat c_2 \neq 0 \Leftrightarrow \psi_{10}, \psi_{11}, \psi_{13} \neq 0$, тогда (3.3) — это $NSF^{7,2,<,<}_2$ с $\sigma = \operatorname{sign}\psi_8$, $u = 2(2\psi_8\psi_9)^{-1/3}\psi_{10}$, $w = -9\tilde\gamma^2(2\psi_8\psi_9)^{-2/3}(\nu^2+\mu^2) < 0$, $v = (2\psi_8)^{2/3}\psi_9^{-1/3} > 0$. $\square$

В списке 1.1 имеются четыре $NSF^{m,2,<}$, у которых D может быть отрицателен. Покажем, что все они не являются $CF^{m,2,<}$ (см. [2, определение 1.10]).

Утверждение 3.1. $NSF^{6,2,<,<}_{12}$, $NSF^{6,2,<,<}_{13}$, $NSF^{6,2,<,<}_{15}$ *при всех допустимых значениях параметров заменами* $(2.2)^1$ *сводятся к предшествующей согласно СП* $SF^{6,2}_{11}$, *а* $NSF^{6,2,<,<}_{16}$ *сводится к* $SF^{4,2}_{34}$.

Доказательство. Приводимые ниже рассуждения подтверждены символьными вычислениями в [4, прил. 3.6.4, с. 155].

1) Любая замена $(2.2)^1$ с $\hat u = -(\hat v s_1 + s_2)(s_1 - 2\hat v^2 s_2)(\hat v^2(2\hat v s_1 - s_2)s_2)^{-1}$ и $r_1 = (s_1 - 2\hat v^2 s_2)(2\hat v s_1 - s_2)^{-1}r_2$ сводит $NSF^{6,2,<,<}_{12}(\hat\sigma,\hat u,\hat v)$ именно к $SF^{6,2}_{11}$ при $(\hat u,\hat v) \in ps^{6,2,<,<}_{12} = \{\hat v > 4^{-1/3},\ \hat v \neq 1,\ 4\hat u > \hat v^{-3}\}$, причем $\delta_{rs} \neq 0$.

Равенство для $\hat u$ является квадратным уравнением относительно s_1 и имеет корни $s^{\pm}_1 = (2\hat v^3(1-\hat u)-1\pm\psi_5^{1/2})(2\hat v)^{-1}s_2 \in \mathbb{R}^1$, так как дискриминант $\psi_5(\hat u) = 4\hat v^6\hat u^2 - 8\hat v^3(\hat v^3-1)\hat u + (2\hat v^3+1)^2$ отрицателен. Кроме того, $\psi_6 = \hat v^3(1-\hat u) - 1 + \psi_5^{1/2} \neq 0$ $(\Leftrightarrow \delta_{rs} \neq 0)$.

В результате замена, в которой, например, $r_1 = (2\hat v^3(1+\hat u)+1-\psi_5^{1/2})(2\hat v^3(1-\hat u)-2-\psi_5^{1/2})(6\hat v(4\hat v^3-1))^{-1}r_2$, $s_1 = (2\hat v^3(1-\hat u)-1+\psi_5^{1/2})(2\hat v)^{-1}s_2$, сводит $NSF^{6,2,<,<}_{12}$

к $SF_{11}^{6,2} = \begin{pmatrix} \hat{a}_1^* r_2^2 & \hat{b}_1^* r_2 s_2 & \hat{c}_1^* s_2^2 & \hat{d}_1^* r_1^{-1} s_2^3 \\ \hat{a}_2^* r_2^3 s_2^{-1} & 0 & \hat{c}_2^* r_2 s_2 & 0 \end{pmatrix}$. Теперь при $r_2 = (\hat{a}_2^* \hat{c}_2^*)^{-1/4}$, $s_2 = (\hat{a}_2^* \hat{c}_2^*)^{1/4}/\hat{c}_2^*$ с помощью замены $L\hat{1}_{11,+1}^{6,2,<,<}$ получаем $NSF_{11,+1}^{6,2,<,<}$ с $\sigma = \hat{\sigma}$, $u = \hat{a}_1^*(\hat{a}_2^*\hat{c}_2^*)^{1/2}$, $v = \hat{b}_1^*/\hat{c}_2^*$.

Здесь следует иметь в виду, что в силу инвариантности степени общего множителя l и знаков дискриминантов D_0, D ($l = 2$, $D_0, D < 0$) должны выполняться трудно проверяемые из-за объема формул соотношения $\hat{a}_2^*\hat{c}_2^* > 0$, $\hat{c}_1^* = \hat{a}_1^*\hat{c}_2^*/\hat{a}_2^*$, $\hat{d}_1^* = \hat{b}_1^*\hat{c}_2^*/\hat{a}_2^*$.

2) Любая замена $(2.2)^1$ с $s_1 = (v(u+v+1) + \varrho^{1/2})(2v-4u)^{-1}s_2$, $r_2 = (3uv + v + \varrho^{1/2})(8u - 3v + 9uv - 3v^2 - \varrho^{1/2})(2uv(3v+4)(3v+2)(2u-v))^{-1}r_1$, где $\varrho(u) = 9v^2u^2 - 2v(9v^2+15v+8)u + 9v^2(1+v)^2$, сводит $NSF_{13}^{6,2,<,<}$ к $SF_{11}^{6,2}$. При этом $\varrho(u) > 0$, так как $ps_{13}^{6,2,<,<} = \{v < -4/3,\ 4u > (u+v+1)^2\}$, а значит, дискриминант $27v^3 + 72v^2 + 60v + 16$ многочлена ϱ, имея нули $-4/3, -2/3, -2/3$, отрицателен.

3) Любая замена $(2.2)^1$ с $s_1 = (v - v^2 - 2u + \varrho^{1/2})(2v)^{-1}s_2$, $r_2 = (2u - v - \varrho^{1/2})(2u + 3v - 3v^2 + \varrho^{1/2})(2uv^2(3v-4))^{-1}r_1$, где $\varrho(u) = 4u^2 - 4uv + 9v^2(v-1)^2$, сводит $NSF_{15}^{6,2,<,<}$ к $SF_{11}^{6,2}$. При этом $\varrho(u) > 0$, так как $ps_{15}^{6,2,<,<} = \{v \notin [0, 4/3],\ 4u < -(v-1)^2\}$, а значит, дискриминант $-(9v^2 - 18v + 8)$ многочлена ϱ при $v \notin [2/3, 4/3]$ отрицателен.

4) Любая замена $(2.2)^1$ с $s_1 = -(u + v + ((u+v)^2 - u)^{1/2})s_2$, $r_1 = -(u + v - ((u+v)^2 - u)^{1/2})r_2$ сводит $NSF_{16}^{6,2,<,<}$ к $SF_{34}^{4,2}$, поскольку $ps_{16}^{6,2,<,<} = \{v > 1/4,\ u < 0\}$. $\square$

Рассмотрим $NSF^{m,2,<,<}$ из списка 1.1. Непосредственной проверкой устанавливается, что $NSF_{22}^{5,2,<,<}$ является $CF_{22}^{5,2,<,<}$, а для остальных форм $ps^{m,2,<,<} \neq cs^{m,2,<,<}$.

Утверждение 3.2. *Следующие формы из списка 1.1 с указанными значениями параметров сводятся к предшествующим согласно СП структурным формам:*

1) $NSF_6^{6,2,<,<}(\tilde{\sigma}, \tilde{u}, \tilde{v})$ *с* $ps_6^{6,2,<,<} = \{\tilde{v} \in (0,1),\ \tilde{u} \in (\psi_7^-(\tilde{v}), \psi_7^+(\tilde{v}))\}$: *a) при* $\tilde{u} = -2^{-5/3}(3 \pm \sqrt{5})$, $\tilde{v} = 2^{-2/3}$ *заменой* $L5_{22}^{5,2,<,<}$ *сводится к* $CF_{22}^{5,2,<,<}$ *с* $\sigma = \mp\tilde{\sigma}$, $u = -3$; *b) при* $\tilde{u} = -\tilde{v}$ *заменой* $L3_{34,+1}^{4,2,<,<}$ *сводится к* $CF_{34,+1}^{4,2,<,<}$ *с* $\sigma = \tilde{\sigma}$, $u = \psi_{19}(\tilde{v})$;

2) $NSF_7^{6,2,<,<}(\tilde{\sigma}, \tilde{u}, \tilde{v})$ *с* $ps_7^{6,2,<,<} = \{\tilde{v} \neq -\tilde{u},\ 4\tilde{v} < -(\tilde{u}+1)^2)\}$:
a) при $\tilde{u} = -1$ *заменой* $L2_{34,+1}^{4,2,<,<}$ *сводится к* $CF_{34,+1}^{4,2,<,<}$ *с* $\sigma = \tilde{\sigma}$, $u = \psi_{21}(\tilde{v})$;
b) при $\tilde{v} = [\,-3(\tilde{u}+1),\ \tilde{u} \in (-1, 11) \vee 3(\tilde{u}+1)(\tilde{u}+2)^{-1},\ \tilde{u} \in (-2,-1)\,]$ *заменой* $[L3_{22}^{5,2,<,<} \vee L4_{22}^{5,2,<,<}]$ *сводится к* $CF_{22}^{5,2,<,<}$ *с* $\sigma = [\tilde{\sigma} \vee -\tilde{\sigma}]$, $u = [-3(\tilde{u}+1)^{-1} \vee 3((\tilde{u}+1)(\tilde{u}+2))^{-1}]$;
c) при $\tilde{v} = \psi_{32}(\tilde{u})$, $\tilde{u} \in I_*$, *заменой* $L3_6^{6,2,<,<}$ *сводится к* $NSF_6^{6,2,<,<}$ *с* $\sigma = \tilde{\sigma}\,\mathrm{sign}\,(1 - 2\tilde{u})$, $u = -(\tilde{u}^3 - 3\tilde{u}^2 + 6\tilde{u} + 1)(\tilde{u}^2 - \tilde{u} + 1)^{-1}((\tilde{u}^2 - \tilde{u} + 7)(2\tilde{u} - 1))^{-1/3}$, $v = (2\tilde{u} - 1)^{2/3}(\tilde{u}^2 - \tilde{u} + 7)^{-1/3}$;

3) $NSF_{11,+1}^{6,2,<,<}(\tilde{\sigma}, \tilde{u}, \tilde{v})$ *с* $ps_{11,+1}^{6,2,<,<} = \{4\tilde{v} < -\tilde{u}^2\}$:
a) при $\tilde{v} = \psi_{20}^{\mp}$, $\sqrt{3}\tilde{u} \in I_1^{\mp}$ *заменой* $L2_{22}^{5,2,<,<}$ *сводится к* $CF_{22}^{5,2,<,<}$ *с* $\sigma = \pm\tilde{\sigma}$, $u = \psi_{20}^{\mp}\tilde{u}^{-2}$;
b) при $\tilde{v} = 3(\tilde{u}^2 + 5)(\tilde{u}^2 + 1)(2(\tilde{u}^2 - 3))^{-1}$, $\tilde{u} \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ *заменой* $L2_6^{6,2,<,<}$ *сводится к* $NSF_6^{6,2,<,<}$ *с* $\sigma = -\tilde{\sigma}\,\mathrm{sign}\,\tilde{u}$, $u = -(\tilde{u}^2 + 5)\tilde{u}^{2/3}(2(\tilde{u}^2 + 1)(\tilde{u}^2 + 9))^{-1/3}$, $v = (2\tilde{u})^{2/3}(\tilde{u}^2 + 9)^{-1/3}$;

4) $NSF_2^{7,2,<,<}(\tilde{\sigma}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$ *с* $ps_2^{7,2,<,<} = \{\tilde{v} \in (0,1) \cup (1, \sqrt[3]{4}), \tilde{w} \neq -\tilde{u}(\tilde{v} - \tilde{v}^{-2}),\ 4\tilde{w} < -(\tilde{u} + \tilde{v})^2\}$:
a) при $\tilde{u} = -\tilde{v}$, *заменой* $L4_{34,+1}^{4,2,<,<}$ — *к* $CF_{34,+1}^{4,2,<,<}$ *с* $\sigma = \tilde{\sigma}$, $u = \tilde{b}_1^*(-\tilde{v}, \tilde{v}, \tilde{w})/\ \tilde{c}_2^*(-\tilde{v}, \tilde{v}, \tilde{w})$;
b^1) *при* $\tilde{v} = [7^{-1/3} \vee \theta_2(\tilde{u})]$, $\tilde{w} = [3(7^{-1/3}\tilde{u} + 7^{-2/3}) \vee (\tilde{u} + \theta_2(\tilde{u}))(\theta_2(\tilde{u}) - 2\tilde{u})]$, $\tilde{u} \in [I_3 \vee I_4]$, *заменой* $[L6_{22}^{5,2,<,<} \vee L7_{22}^{5,2,<,<}]$ *сводится к* $CF_{22}^{5,2,<,<}$ *с* $\sigma = [-\tilde{\sigma} \vee \mathrm{sign}\,\tilde{u}]$, $u = [3(7^{1/3}\tilde{u} + 1)^{-1} \vee (2\tilde{u} - \theta_2(\tilde{u}))(\tilde{u} + \theta_2(\tilde{u}))^{-1}]$;

b^2) *при* $\tilde u=[-4\tilde v\vee\psi_{25}^{\mp}]$, $\tilde w=[3\tilde v(4\tilde v+\psi_{25}^{-})/2\vee 3(\tilde v\psi_{25}^{\pm}-2\tilde v^{-1})]$, $\tilde v\in[(0,(2/7)^{2/3})\vee I_2^{\pm}]$ *заменой* $[L8_{22}^{5,2,<,<}\vee L9_{22}^{5,2,<,<}]$ *сводится к* $CF_{22}^{5,2,<,<}$ *с* $\sigma=[-\tilde\sigma\vee\mp\tilde\sigma]$, $u=[(4+\psi_{25}^{-}\tilde v^{-1})/6\vee(4-\tilde v^3)(\tilde v^2\psi_{25}^{\pm}-2)^{-1}]$;
c) *при* $\tilde w=\psi_{33}(\tilde u,\tilde v)$ *заменой* $L4_6^{6,2,<,<}$ *сводится к* $NSF_6^{6,2,<,<}$ *с* $\sigma=\tilde\sigma\,\mathrm{sign}((2\tilde u-\tilde v)\psi_{24})$, $u=(\tilde v(2\tilde u-\tilde v)^{-1}\psi_{26}^{-1})^{1/3}\psi_{34}$, $v=-(\tilde v(2\tilde u-\tilde v)^2\psi_{26}^{-1})^{1/3}$;
d) *при* $[\tilde u=\psi_{25}^{\mp}\vee\tilde v=\theta_2(\tilde u)\neq 2^{2/3}]$ *заменой* $[L2_7^{6,2,<,<}\vee L3_7^{6,2,<,<}]$ *сводится к* $NSF_7^{6,2,<,<}$ *с* $\sigma=[\mp\tilde\sigma\vee\tilde\sigma\mathrm{sign}\,(\tilde u-2^{-1/3})]$, $u=[-(\tilde v\tilde w-3\tilde v^2\psi_{25}^{\pm}+6)(\tilde v\tilde w)^{-1}\vee-(\tilde w+2\tilde u^2+\theta_2(\tilde u)\tilde u-\theta_2^2(\tilde u))\tilde w^{-1}]$, $v=[3(4-\tilde v^3)(\tilde v\tilde w)^{-1}\vee-(\psi_{24}(\tilde u,\theta_2(\tilde u))\tilde w+\psi_{35})(\psi_{29}(\tilde u,\theta_2(\tilde u))\tilde w)^{-1}]$;
e^1) *при* $\psi_{27}\geq 0$, $\tilde u\neq\tilde v/2$ *заменой* $L2_{11,+1}^{6,2,<,<}$ *сводится к* $NSF_{11,+1}^{6,2,<,<}$ *с* $\sigma=\tilde\sigma$, $u=\tilde a_1^*(\tilde a_2^*\tilde c_2^*)^{-1/2}$, $v=\tilde b_1^*/\tilde c_2^*$;
e^2) *при* $[\tilde u=\tilde v/2\vee\tilde v=\theta_3(\tilde u)]$ *заменой* $[L3_{11,+1}^{6,2,<,<}\vee L4_{11,+1}^{6,2,<,<}]$ *сводится к* $NSF_{11,+1}^{6,2,<,<}$ *с* $\sigma=\tilde\sigma$, $u=[-3(4\tilde v-\tilde v^4)^{1/2}(4\tilde w)^{-1}\vee-\psi_{30}^{1/2}\psi_{31}]$, $v=[(4-\tilde v^3)(4\tilde v\tilde w)^{-1}\vee\psi_{36}]$.

Доказательство. Рассуждения, приводимые ниже в пп. 1–3, подтверждены символьными вычислениями в [4, прил. 3.6.5, с. 161], а в п. 4 — в [4, прил. 3.6.6, с. 172].

1) $NSF_6^{6,2,<,<}(\tilde\sigma,\tilde u,\tilde v)$ в случае a) заменой с $r_1=-2^{1/3}r_2$, $s_1=2^{-2/3}(3\pm\sqrt5)s_2$ сводится к $SF_{22}^{5,2}$, в b) заменой с $r_1=-\tilde v^{-1/2}r_2$, $s_2=\tilde v^{1/2}s_1$ сводится к $SF_{34}^{4,2}$;

2) $NSF_7^{6,2,<,<}(\tilde\sigma,\tilde u,\tilde v)$ в a) заменой с $r_1=(\tilde v\pm\psi_{17}^{1/2})r_2/3$, $s_1=(\tilde v\mp\psi_{17}^{1/2})s_2/3$ сводится к $SF_{34}^{4,2}$, в b) заменой с $r_1=[\,(\tilde u+2)\tilde u^{-1}r_2\vee-(\tilde u+2)^{-1}r_2\,]$, $s_1=[\,-\tilde us_2/2\vee(\tilde u+3)s_2\,]$ сводится к $SF_{22}^{5,2}$, в c) заменой с $r_1=-(\tilde u^2-2\tilde u+3)(2\tilde u-1)^{-1}r_2$, $s_1=\tilde us_2$ сводится к $SF_6^{6,2}$;

3) $NSF_{11,+1}^{6,2,<}(\tilde\sigma,\tilde u,\tilde v)$ в a) заменой с $s_1=-(2\tilde u\mp\sqrt3)s_2$, $r_2=-(2\mp\sqrt3\tilde u)\tilde u^{-1}r_1$ сводится к $SF_{22}^{5,2}$, в b) заменой с $r_1=-(\tilde u^2+3)(2\tilde u)^{-1}r_2$, $s_1=\tilde us_2$ сводится к $SF_6^{6,2}$.

4) Подробнее рассмотрим получение предшествующих форм из
$$NSF_2^{7,2,<,<}=\tilde\sigma\begin{pmatrix}\tilde u & \tilde w & \tilde u\tilde v^{-1}-\tilde v(\tilde u\tilde v+\tilde w) & \tilde u+\tilde w\tilde v^{-1}\\ 1 & 0 & \tilde v^{-1}-\tilde v^2 & 1\end{pmatrix}\quad(\tilde u+\tilde w\tilde v^{-1}\neq 0).$$

a) При $\tilde u=-\tilde v$, $\tilde w=(3\tilde v^2s_1^2+2(\tilde v^3-1)s_1s_2-\tilde v(\tilde v^3+2)s_2^2)(\tilde vs_2(2s_1-\tilde vs_2))^{-1}$ $NSF_2^{7,2,<,<}$ любой заменой (2.2)[1] с $r_1=(\tilde v^2s_1-2s_2)(\tilde v(2s_1-\tilde vs_2))^{-1}r_2$ сводится к $SF_{34}^{4,2}$. Равенство для $\tilde w$ является квадратным уравнением относительно s_1 и имеет вещественные корни $s_1^{\pm}=(\tilde v\tilde w-\tilde v^3+1\pm\psi_{22}^{1/2})\tilde v^{-2}s_2/3$, поскольку $\psi_{22}=(\tilde v\tilde w+1)^2+\tilde v^3(4\tilde v^3-5\tilde v\tilde w+4)>0$, так как $\tilde w<0$. Кроме того, $\psi_{23}\neq0\Leftrightarrow 2s_1-\tilde vs_2\neq0$.

Замена с $r_1=\tilde v(\tilde w\tilde v-\tilde v^3-5-\psi_{22}^{1/2})\psi_{23}^{-1}r_2$, $s_1=(\tilde w\tilde v-\tilde v^3+1-\psi_{22}^{1/2})\tilde v^{-2}s_2/3$ сводит $NSF_2^{7,2,<,<}$ к $SF_{34}^{4,2}=\begin{pmatrix}0 & \tilde b_1^*(-\tilde v,\tilde v,\tilde w)r_2s_2 & 0 & \tilde d_1^*r_1^{-1}s_2^3\\ \tilde a_2^*(-\tilde v,\tilde v,\tilde w)r_2^3s_2^{-1} & 0 & \tilde c_2^*(-\tilde v,\tilde v,\tilde w)r_2s_2 & 0\end{pmatrix}$.
Выбор нормировки и связанные с ней вопросы приведены в утверждении 3.1, п. 1.

В b^1) $NSF_2^{7,2,<,<}$ заменой с $r_1=[-7^{-1/3}r_2\vee\tilde ur_2]$, $[s_2=0\vee s_1=(\theta_2(\tilde u)-\tilde u)s_2]$ сводится к $SF_{22}^{5,2}$.

В b^2) $NSF_2^{7,2,<,<}$ заменой с $r_1=[\tilde vr_2/2\vee\psi_{25}^{\mp}r_2]$, $s_1=[\psi_{25}^{-}s_2\vee\psi_{25}^{\pm}s_2]$ сводится к $SF_{22}^{5,2}$; случай $\tilde u=-4\tilde v$, $\tilde w=3\tilde v(4\tilde v+\psi_{25}^{+})/2$ невозможен, так как в нем $D>0$.

В c) $NSF_2^{7,2,<,<}$ заменой с $r_1=-(2\tilde u\tilde v^2-\tilde u^2\tilde v-3)(\tilde v(\tilde v-2\tilde u))^{-1}r_2$, $s_1=\tilde us_2$ сводится к $SF_6^{6,2}$. При этом $\psi_{26}\neq0$, так как является нормировочным множителем.

В d) $NSF_2^{7,2,<,<}$ заменой с $r_1=[\psi_{25}^{\mp}r_2\vee\tilde ur_2]$, $s_1=[\psi_{25}^{\pm}s_2\vee(\theta_2(\tilde u)-\tilde u)s_2]$ сводится к $SF_7^{6,2}$; если $2\tilde u=\theta_2(\tilde u)\Leftrightarrow\tilde u=2^{-1/3}$, то $\delta_{rs}=0$, при этом $\mathrm{sign}\,(\tilde u-2^{-1/3})=\mathrm{sign}\,((2\tilde u-\theta_2(\tilde u))\psi_{29}^{-1}(\tilde u,\theta_2(\tilde u)))$.

e^1) При $\tilde w=(\tilde v(\tilde v-2\tilde u)s_1^2+(\tilde v^3-\tilde u\tilde v^2-2)s_1s_2+\tilde v(\tilde u\tilde v^2-2)s_2^2)(\tilde vs_2(2s_1-\tilde vs_2))^{-1}$ $NSF_2^{7,2,<,<}$ любой заменой (2.2)[1] с $r_1=(\tilde v^2s_1-2s_2)(\tilde v(2s_1-\tilde vs_2))^{-1}r_2$ сводится к $SF_{11}^{6,2}$. Равенство для $\tilde w$ является квадратным уравнением относительно s_1 и имеет вещественные корни $s_1^{\pm} = (2\tilde{v}\tilde{w} - \tilde{v}^3 + \tilde{u}\tilde{v}^2 + 2 \pm \psi_{27}^{1/2})(2\tilde{v}(\tilde{v} - 2\tilde{u}))^{-1}s_2$ при $\psi_{27} \geq 0$ и $\tilde{u} \neq \tilde{v}/2$. Кроме того, $\psi_{28} \neq 0 \Leftrightarrow 2s_1 - \tilde{v}s_2 \neq 0$. В результате замена, например, с $r_1 = (2\tilde{v}^2\tilde{w} - \tilde{v}^4 + \tilde{u}\tilde{v}^3 - 2\tilde{v} + 8\tilde{u} - \tilde{v}\psi_{27}^{1/2})(2\psi_{28})^{-1}r_2$, $s_1 = (2\tilde{v}\tilde{w} - \tilde{v}^3 + \tilde{u}\tilde{v}^2 + 2 - \psi_{27}^{1/2})(2\tilde{v}(\tilde{v} - 2\tilde{u}))^{-1}s_2$ сводит $NSF_2^{7,2,<,<}$ к $SF_{11}^{6,2} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_1^* r_2^2 & \tilde{b}_1^* r_2 s_2 & \tilde{c}_1^* s_2^2 & \tilde{d}_1^* r_1^{-1} s_2^3 \\ \tilde{a}_2^* r_2^3 s_2^{-1} & 0 & \tilde{c}_2^* r_2 s_2 & 0 \end{pmatrix}$. И далее, как в утверждении 3.1, п. 1.

В e^2) $NSF_2^{7,2,<,<}$ заменой с $r_1 = [\tilde{v}r_2/2 \vee \tilde{u}r_2]$, $[s_2 = 0 \vee s_1 = (2\theta_3(\tilde{u}) - \tilde{u})s_2/3]$ сводится к $SF_{11}^{6,2}$. При этом $\psi_{30} > 0$, так как является нормировочным множителем.

Наконец, $NSF_2^{7,2,<,<}$ может сводиться к предшествующим $NSF_i^{6,2,<,<}$ $(i = \overline{12,16})$ из списка 1.1, а те, в свою очередь, сводятся к $SF_{11}^{6,2}$ или $SF_{34}^{4,2}$ (см. утверждение 3.1). Но все «прямые» замены к $NSF_{11,+1}^{6,2,<,<}$ и $NSF_{34,+1}^{4,2,<,<}$ уже найдены выше. □

Полученные результаты позволяют в случае $l = 2,\ D_0 < 0,\ D < 0$ выписать все канонические формы со своими каноническими множествами.

Список 3.1. Шесть $CF_i^{m,2,<,<}$ и их $cs_i^{m,2,<,<}$ $(\sigma = \pm 1,\ u, v, w \neq 0)$.

$$CF_{34,+1}^{4,2,<,<} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & 0 & u \\ 1 & 0 & +1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad CF_{22}^{5,2,<,<} = \sigma \begin{pmatrix} 0 & u & -u & u \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$CF_6^{6,2,<,<} = \sigma \begin{pmatrix} u & u(v^{-2} - v) & 0 & uv^{-3} \\ 1 & 0 & v^{-1} - v^2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad CF_7^{6,2,<,<} = \sigma \begin{pmatrix} u & v & -v & u + v \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$CF_{11,+1}^{6,2,<,<} = \sigma \begin{pmatrix} u & v & u & v \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad CF_2^{7,2,<,<} = \sigma \begin{pmatrix} u & w & uv^{-1} - v(uv + w) & u + wv^{-1} \\ 1 & 0 & v^{-1} - v^2 & 1 \end{pmatrix};$$

$cs_{34,+1}^{4,2,<,<} = \{u < 0\}, \quad cs_{22}^{5,2,<,<} = \{u < -1/4\}$,
$cs_6^{6,2,<,<} = \{v \in (0,1),\ u \in (\psi_7^-(v), \psi_7^+(v)),\ u \neq -v,\ (u,v) \neq (-2^{-5/3}(3 \pm \sqrt{5}),\ 2^{-2/3})\}$,
$cs_7^{6,2,<,<} = \{4v < -(u+1)^2,\ u \neq -1,\ v \neq -u,\ -3(u+1),\ 3(u+1)(u+2)^{-1},\ \psi_{32}(u)\}$,
$cs_{11,+1}^{6,2,<,<} = \{4v < -u^2,\ v \neq \psi_{20}^{\mp}(u),\ 3(u^2+5)(u^2+1)(2(u^2-3))^{-1}\}$,
$cs_2^{7,2,<,<} = \{v \in (0, \sqrt[3]{4}),\ v \neq 1, -u, 2u, \theta_3(u),\ w \neq -uv, -u(v - v^{-2}), \psi_{33}(u,v),\ 4w < -(u+v)^2,\ \psi_{27}(u,v,w) < 0,\ (u,w) \neq ([-4v \vee \psi_{25}^{\mp}(v)], [3v(4v + \psi_{25}^-(v))/2 \vee 3(v\psi_{25}^{\pm}(v) - 2v^{-1})]),\ (v,w) \neq ([7^{-1/3} \vee \theta_2(u)], [3(7^{-1/3}u + 7^{-2/3}) \vee (u + \theta_2(u))(\theta_2(u) - 2u)])\}$.

Теорема 3.1. *Любая система* $(2.1)^1$ *с* $l = 2$, *записанная в виде* $(1.1^<)$ *согласно* $(2.15)^1$ *и имеющая* $D < 0$, *линейно эквивалентна системе, порожденной неким представителем соответствующей канонической формы из списка 3.1. Ниже для каждой* $CF_i^{m,2,<,<}$ *приведены: a) условия на коэффициенты системы* $(1.1^<)$; *b) замены* $(2.2)^1$, *преобразующие правую часть системы* $(1.1^<)$ *при указанных условиях в выбранную форму; c) получаемые при этом значения* σ *и параметров из* $cs_i^{m,2,<,<}$:

A. $CF_{34,+1}^{4,2,<,<}$: $1_a)$ $\nu = 0,\ \tilde{\beta} = 0$, $1_b)$ $J_3^2,\ L1_{34,+1}^{4,2,<,<}$, $1_c)$ $\sigma = 1,\ u = \tilde{\gamma}^2\tilde{\varsigma}^{-2}$;
$2_a)$ $\nu = \theta_1\mu,\ \psi_8^2(\cdot)\psi_9(\cdot)) = 2\psi_{10}^2(\cdot)\psi_{12}(\cdot)$, *где* $(\cdot) = (\theta_1\mu, \mu)$, $2_b)$ $J_3^2, L1_6^{6,2,<,<}, L3_{34,+1}^{4,2,<,<}$, $2_c)$ $\sigma = \operatorname{sign}\psi_8(\cdot)$, $u = \psi_{19}(\tilde{v})$, *где* $\tilde{v} = -(2\psi_8(\cdot)\psi_{10}(\cdot))^{1/3}\psi_{12}^{-1/3}(\cdot)$;
$3_a)$ $\nu = \psi_{14}^{\pm}\tilde{\gamma}^{-1}\mu,\ \psi_{15}^{\mp} = -\tilde{\varsigma}$, $3_b)$ $J_3^2,\ L1_7^{6,2,<,<},\ L2_{34,+1}^{4,2,<,<}$, $3_c)$ $\sigma = \pm 1,\ u = \psi_{21}(\tilde{v})$, *где* $\tilde{v} = -3({\psi_{14}^{\pm}}^2 + \tilde{\gamma}^2)(2\tilde{\varsigma})^{-2}$;
$4_a)$ $\nu = 0,\ \tilde{\beta},\ 4\tilde{\beta}^2 - 3\tilde{\alpha}\tilde{\gamma},\ 4\tilde{\beta}^2 - 3\tilde{\alpha}\tilde{\gamma} + 3\tilde{\gamma}^2 \neq 0$, $4_b)$ $J_3^2,\ L1_2^{7,2,<,<},\ L4_{34,+1}^{4,2,<,<}$, $4_c)$ $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{\beta}$, $u = \tilde{b}_1^*(-\tilde{v}, \tilde{v}, \tilde{w})/\tilde{c}_2^*(-\tilde{v}, \tilde{v}, \tilde{w})$, *где* $\tilde{v} = (2\psi_8)^{2/3}\psi_9^{-1/3}$, $\tilde{w} = -9\tilde{\gamma}^2(2\psi_8\psi_9)^{-2/3}(\nu^2 + \mu^2)$;

B. $CF_{22}^{5,2,<,<}$: $1_a)$ $\nu = \tilde{\beta}(2\tilde{\gamma})^{-1}\mu,\ \tilde{\beta} \neq 0,\ \tilde{\alpha} = 7\tilde{\beta}^2(4\tilde{\gamma})^{-1}$, $1_b)$ $J_3^2,\ L1_{22}^{5,2,<,<}$, $1_c)$ $\sigma = \operatorname{sign}\tilde{\beta},\ u = -(\tilde{\beta}^2 + 4\tilde{\gamma}^2)(2\tilde{\beta})^{-2}$;
$2_a)$ $\nu = \theta_1\mu,\ 2^{7/3}\psi_{10}(\cdot) = -(3 \pm \sqrt{5})(\psi_8(\cdot)\psi_9(\cdot))^{1/3},\ \psi_{12}(\cdot) = -8\psi_8(\cdot)\psi_{10}(\cdot)$ $((\cdot) = (\theta_1\mu, \mu))$, $2_b)$ $J_3^2,\ L1_6^{6,2,<,<},\ L5_{22}^{5,2,<,<}$, $2_c)$ $\sigma = \mp\operatorname{sign}\psi_8(\cdot)$, $u = -3$;

$3_a)$ $\nu=\psi_{14}^{\pm}\tilde\gamma^{-1}\mu,\ \psi_{15}^{\mp}\tilde\varsigma^{-1}=[\,-3(\tilde u+1),\ \tilde u\in(-1,11)\vee 3(\tilde u+1)(\tilde u+2)^{-1},\ \tilde u\in(-2,-1)\,]$, *где* $\tilde v=-3(\psi_{14}^{\pm\,2}+\tilde\gamma^2)(2\varsigma)^{-2}$, $3_b)$ J_3^2, $L1_7^{6,2,<,<}$, $[L3_{22}^{5,2,<,<}\vee L4_{22}^{5,2,<,<}]$, $3_c)$ $\sigma=[\pm1\vee\mp1]$, $u=[-3(\tilde u+1)^{-1}\vee 3((\tilde u+1)(\tilde u+2))^{-1}]$;
$4_a)$ $\nu=-\tilde\beta\tilde\gamma^{-1}\mu,\tilde\beta\neq0,-(\tilde\beta^2+\tilde\gamma^2)\tilde\varsigma^{-2}=\psi_{20}^{\mp}(\tilde u),\ \tilde u=-2\tilde\beta\tilde\varsigma^{-1},\ \sqrt3\tilde u\in I_1^{\mp}$, $4_b)$ J_3^2, $L1_{11,+1}^{6,2,<,<}$, $L2_{22}^{5,2,<,<}$, $4_c)$ $\sigma=\pm1,\ u=-2\tilde\beta\tilde\varsigma^{-1}$,
$5_a)$ $\nu=\tilde\beta(2\tilde\gamma)^{-1}\mu,\ \tilde\beta\neq0,\ \tilde\alpha\neq7\tilde\beta^2(4\tilde\gamma)^{-1},\ \hat b_1^*/\hat c_2^*=\psi_{20}^{\mp}(\tilde u),\ \sqrt3\tilde u\in I_1^{\mp},\ \tilde u=\hat a_1^*(\hat a_2^*\hat c_2^*)^{1/2}$, $\hat u=\hat a_1^*(\hat a_2^*\hat c_2^*)^{1/2},\ \hat v=\hat b_1^*/\hat c_2^*$, $5_b)$ $J_3^2, L1_{12}^{6,2,<,<}, L\hat1_{11,+1}^{6,2,<,<}, L2_{22}^{5,2,<,<}$, $5_c)$ $\sigma=\pm\operatorname{sign}\tilde\beta,\ u=\psi_{20}^{\mp}(\tilde u)\tilde u^{-2}$;
$6_a)$ $\nu\neq-\tilde\beta\tilde\gamma^{-1}\mu,\theta_1\mu,\psi_{14}^{\pm}\tilde\gamma^{-1}\mu,\tilde\beta(2\tilde\gamma)^{-1}\mu$, $[7^{-1/3}\vee\theta_2(\tilde u)]=(2\psi_8)^{2/3}\psi_9^{-1/3}$, $[3(7^{-1/3}\tilde u+7^{-2/3})\vee(\theta_2(\tilde u)-2\tilde u)(\tilde u+\theta_2(\tilde u))]=-9\tilde\gamma^2(2\psi_8\psi_9)^{-2/3}(\nu^2+\mu^2)$, $\tilde u=2(2\psi_8\psi_9)^{-1/3}\psi_{10}\in[I_3\vee I_4]$, $6_b)$ J_3^2, $L1_2^{7,2,<,<}[L6_{22}^{5,2,<,<}\vee L7_{22}^{5,2,<,<}]$, $6_c)$ $\sigma=[-\operatorname{sign}\psi_8\vee\operatorname{sign}\tilde u]$, $u=[3(7^{1/3}\tilde u+1)^{-1}\vee(2\tilde u-\theta_2(\tilde u))(\tilde u+\theta_2(\tilde u))^{-1}]$;
$7_a)$ $\nu\neq-\tilde\beta\tilde\gamma^{-1}\mu,\theta_1\mu,\psi_{14}^{\pm}\tilde\gamma^{-1}\mu,\tilde\beta(2\tilde\gamma)^{-1}\mu$, $[-4\tilde v\vee\psi_{25}^{\mp}]=2(2\psi_8\psi_9)^{-1/3}\psi_{10}$, $[3\tilde v(4\tilde v+\psi_{25}^{-})/2\vee3(\tilde v\psi_{25}^{\pm}-2\tilde v^{-1})]=-9\tilde\gamma^2(2\psi_8\psi_9)^{-2/3}(\nu^2+\mu^2)$, $\tilde v=(2\psi_8)^{2/3}\psi_9^{-1/3}\in[(0,(2/7)^{2/3})\vee I_2^{\pm}]$, $7_b)$ J_3^2, $L1_2^{7,2,<,<}$, $[L8_{22}^{5,2,<,<}\vee L9_{22}^{5,2,<,<}]$, $7_c)$ $\sigma=[-\operatorname{sign}\psi_8\vee\mp\operatorname{sign}\psi_8]$, $u=[(4+\psi_{25}^{-}\tilde v^{-1})/6\vee(4-\tilde v^3)(\tilde v^2\psi_{25}^{\pm}-2)^{-1}]$;

C. $CF_6^{6,2,<,<}$: $1_a)$ $\nu=\theta_1\mu$, $\neg(A2_a,B2_a)$, $1_b)$ J_3^2, $L1_6^{6,2,<,<}$, $1_c)$ $\sigma=\operatorname{sign}\psi_8(\cdot)$, $u=2(2\psi_8(\cdot)\psi_9(\cdot))^{-1/3}\psi_{10}(\cdot)$, $v=-(2\psi_8(\cdot)\psi_{10}(\cdot))^{1/3}\psi_{12}^{-1/3}(\cdot)$, $(\cdot)=(\theta_1\mu,\mu)$;
$2_a)$ $\nu=\psi_{14}^{\pm}\tilde\gamma^{-1}\mu,\ -3(\psi_{14}^{\pm\,2}+\tilde\gamma^2)(2\tilde\varsigma)^{-2}=\psi_{32}(\tilde u),\ \tilde u=\psi_{15}^{\mp}\tilde\varsigma^{-1}\in I_*,\neg(B3_a)$, $2_b)$ J_3^2, $L1_7^{6,2,<,<}$, $L3_6^{6,2,<,<}$, $2_c)$ $\sigma=\pm\operatorname{sign}(1-2\tilde u)$, $u=-(\tilde u^3-3\tilde u^2+6\tilde u+1)(\tilde u^2-\tilde u+1)^{-1}((\tilde u^2-\tilde u+7)(2\tilde u-1))^{-1/3}$, $v=(2\tilde u-1)^{2/3}(\tilde u^2-\tilde u+7)^{-1/3}$;
$3_a)$ $\nu=-\tilde\beta\tilde\gamma^{-1}\mu,\ \tilde\beta\neq0,\ -2(\tilde\beta^2+\tilde\gamma^2)\tilde\varsigma^{-2}=3(\tilde u^2+5)(\tilde u^2+1)(\tilde u^2-3)^{-1},\ \tilde u=-2\tilde\beta\tilde\varsigma^{-1}\in(-\sqrt3,\sqrt3)$, $\neg(B4_a)$, $3_b)$ $J_3^2, L1_{11,+1}^{6,2,<,<}, L2_6^{6,2,<,<}$, $3_c)$ $\sigma=-\operatorname{sign}\tilde u$, $2u=-(\tilde u^2+5)(\tilde u^2+1)^{-1/3}v$, $v=(2\tilde u)^{2/3}(\tilde u^2+9)^{-1/3}$;
$4_a)$ $\nu=\tilde\beta(2\tilde\gamma)^{-1}\mu,\ \tilde\beta\neq0,\ \tilde\alpha\neq7\tilde\beta^2(4\tilde\gamma)^{-1},\ \hat b_1^*/\hat c_2^*=3(\tilde u^2+5)(\tilde u^2+1)(2(\tilde u^2-3))^{-1}$, $\tilde u=\hat a_1^*(\hat a_2^*\hat c_2^*)^{1/2}\in(-\sqrt3,\sqrt3)$, $\hat u=(\tilde\beta^2+4\tilde\gamma^2)\psi_{16}^{-1}$, $\hat v=\psi_{16}^{1/3}(2\tilde\beta)^{-2/3}$, $\neg(B5_a)$, $4_b)$ J_3^2, $L1_{12}^{6,2,<,<}$, $L\hat1_{11,+1}^{6,2,<,<}, L2_6^{6,2,<,<}$, $4_c)$ $\sigma=-\operatorname{sign}(\tilde\beta\tilde u)$, $2u=-(\tilde u^2+5)(\tilde u^2+1)^{-1/3}v$, $v=(2\tilde u)^{2/3}(\tilde u^2+9)^{-1/3}$;
$5_a)$ $\nu\neq-\tilde\beta\tilde\gamma^{-1}\mu,\ \theta_1\mu,\ \psi_{14}^{\pm}\tilde\gamma^{-1}\mu,\ \tilde\beta(2\tilde\gamma)^{-1}\mu,\ -9\tilde\gamma^2(2\psi_8\psi_9)^{-2/3}(\nu^2+\mu^2)=\psi_{33}(\tilde u,\tilde v)$, $\tilde u=2(2\psi_8\psi_9)^{-1/3}\psi_{10}$, $\tilde v=(2\psi_8)^{2/3}\psi_9^{-1/3}$, $\neg(A4_a,B6_a,B7_a)$, $5_b)$ J_3^2, $L1_2^{7,2,<,<}$, $L4_6^{6,2,<,<}$, $5_c)$ $\sigma=\operatorname{sign}((2\tilde u-\tilde v)\psi_8\psi_{24})$, $u=(\tilde v(2\tilde u-\tilde v)^{-1}\psi_{26}^{-1})^{1/3}\psi_{34}$, $v=-(\tilde v(2\tilde u-\tilde v)^2\psi_{26}^{-1})^{1/3}$;

D. $CF_7^{6,2,<,<}$: $1_a)$ $\nu=\psi_{14}^{\pm}\tilde\gamma^{-1}\mu,\ \psi_{15}^{\mp}\neq0,-\tilde\varsigma$, $\neg(B3_a,C2_a)$, $1_b)$ J_3^2, $L1_7^{6,2,<,<}$, $1_c)$ $\sigma=\pm1$, $u=\psi_{15}^{\mp}\tilde\varsigma^{-1}$, $v=-3(\psi_{14}^{\pm\,2}+\tilde\gamma^2)(2\tilde\varsigma)^{-2}$;
$2_a)$ $\nu\neq-\tilde\beta\tilde\gamma^{-1}\mu,\theta_1\mu,\psi_{14}^{\pm}\tilde\gamma^{-1}\mu,\tilde\beta(2\tilde\gamma)^{-1}\mu$, $[\tilde u=\psi_{25}^{\mp}\vee\tilde v=\theta_2(\tilde u)\neq2^{2/3}]$, $\tilde u=2(2\psi_8\psi_9)^{-1/3}\psi_{10}$, $\tilde v=(2\psi_8)^{2/3}\psi_9^{-1/3}$, $\tilde w=-9\tilde\gamma^2(2\psi_8\psi_9)^{-2/3}(\nu^2+\mu^2)$, $\neg(A4_a,B6_a,B7_a,C5_a)$, $2_b)$ J_3^2, $L1_2^{7,2,<,<}$, $[L2_7^{6,2,<,<}\vee L3_7^{6,2,<,<}]$, $2_c)$ $\sigma=[\mp\operatorname{sign}\psi_8\vee\operatorname{sign}((\tilde u-2^{-1/3})\psi_8)]$, $u=[-(\tilde v\tilde w-3\tilde v^2\psi_{25}^{\pm}+6)(\tilde v\tilde w)^{-1}\vee-(\tilde w+2\tilde u^2+\theta_2(\tilde u)\tilde u-\theta_2^2(\tilde u))\tilde w^{-1}]$, $v=[3(4-\tilde v^3)(\tilde v\tilde w)^{-1}\vee(\psi_{24}(\tilde u,\theta_2(\tilde u))\tilde w+\psi_{35}]$;

E. $CF_{11,+1}^{6,2,<,<}$: $1_a)$ $\nu=-\tilde\beta\tilde\gamma^{-1}\mu,\ \tilde\beta\neq0$, $\neg(B4_a,C3_a)$, $1_b)$ J_3^2, $L1_{11,+1}^{6,2,<,<}$, $1_c)$ $\sigma=1$, $u=-2\tilde\beta\tilde\varsigma^{-1}$, $v=-(\tilde\beta^2+\tilde\gamma^2)\tilde\varsigma^{-2}$;
$2_a)$ $\nu=\tilde\beta(2\tilde\gamma)^{-1}\mu,\ \tilde\beta\neq0,\ \tilde\alpha\neq7\tilde\beta^2(4\tilde\gamma)^{-1}$, $\neg(B5_a,C4_a)$, $2_b)$ J_3^2, $L1_{12}^{6,2,<,<}$, $L\hat1_{11,+1}^{6,2,<,<}$, $2_c)$ $\sigma=\operatorname{sign}\tilde\beta$, $u=\hat a_1^*(\hat a_2^*\hat c_2^*)^{1/2}$, $v=\hat b_1^*/\hat c_2^*$, *где* $\hat u=(\tilde\beta^2+4\tilde\gamma^2)\psi_{16}^{-1}$, $\hat v=\psi_{16}^{1/3}(2\tilde\beta)^{-2/3}$;
$3_a)$ $\nu\neq-\tilde\beta\tilde\gamma^{-1}\mu,\ \theta_1\mu,\ \psi_{14}^{\pm}\tilde\gamma^{-1}\mu,\ \tilde\beta(2\tilde\gamma)^{-1}\mu$, $[\,\tilde u\neq\tilde v/2,\ \psi_{27}\geq0\vee\tilde u=\tilde v/2\vee\tilde v=\theta_3(\tilde u)]$, *где* $\tilde u=2(2\psi_8\psi_9)^{-1/3}\psi_{10}$, $\tilde v=(2\psi_8)^{2/3}\psi_9^{-1/3}$, $\tilde w=-9\tilde\gamma^2(2\psi_8\psi_9)^{-2/3}(\nu^2+\mu^2)$, $\neg(A4_a,B6_a,$

$B7_a, C5_a, D2_a)$, $3_b)$ J_3^2, $L1_2^{7,2,<,<}$, $[L2_{11,+1}^{6,2,<,<} \vee L3_{11,+1}^{6,2,<,<} \vee L4_{11,+1}^{6,2,<,<}]$, $3_c)$ $\sigma = \operatorname{sign}\psi_8$, $u = [\tilde a_1^*(\tilde a_2^*\tilde c_2^*)^{-1/2} \vee -3(4\tilde v - \tilde v^4)^{1/2}(4\tilde w)^{-1} \vee -\psi_{30}^{1/2}\psi_{31}]$, $v = [\tilde b_1^*/\tilde c_2^* \vee (4-\tilde v^3)(4\tilde v\tilde w)^{-1} \vee \psi_{36}]$;

F. $CF_2^{7,2,<,<}$: *a)* $\nu \ne -\tilde\beta\tilde\gamma^{-1}\mu$, $\theta_1\mu$, $\psi_{14}^{\pm}\tilde\gamma^{-1}\mu$, $\tilde\beta(2\tilde\gamma)^{-1}\mu$, $\neg(A4_a, B6_a, B7_a, C5_a, D2_a, E3_a)$, *b)* J_3^2, $L1_2^{7,2,<,<}$, *c)* $\sigma = \operatorname{sign}\psi_8$, $u = 2(2\psi_8\psi_9)^{-1/3}\psi_{10}$, $v = (2\psi_8)^{2/3}\psi_9^{-1/3}$, $w = -9\tilde\gamma^2(\nu^2+\mu^2)(2\psi_8\psi_9)^{-2/3}$.

Здесь запись $\neg(\ldots)$ *означает, что не выполняются условия, указанные в скобках.*

Доказательство теоремы вытекает из леммы 3.1 и утверждений 3.1, 3.2.

4. Выделение $\boldsymbol{mcs^{m,2,<}}$. Продемонстрируем теперь линейные неособые замены, которые для CF из списка 1.1 позволят выделить минимальные канонические множества (см. [2, определение 1.11]).

Утверждение 4.1. *Только для следующих* $CF^{m,2,<}$ *из списков 2.1 и 3.1 удается ограничить значения параметров в* $cs^{m,2,<}$, *а именно:*

1) в $CF_{8,+1}^{4,2,<}$ *при* $\tilde\sigma = \sigma$, $\tilde u = u$ *замена с* $r_1, s_2 = 0$, $s_1, r_2 = |\tilde u|^{-1/2}$ *дает* $\sigma = \tilde\sigma\operatorname{sign}\tilde u$, $u = \tilde u^{-1}$;

2) в $CF_{34,+1}^{4,2,<}$ *нормировка* $(2.6)^1$ *с* $r_1, -s_2 = 1$ *изменяет знак* σ; *при* $\tilde u = u$ *замена с* $s_1, r_2 = |\tilde u|^{-1/2}$, $r_1, s_2 = 0$ *дает* $u = \tilde u^{-1}$ *без изменения* σ;

3) в $CF_1^{6,2,<,>}$ *при* $\tilde\sigma = \sigma$, $\tilde u = u$ *замена с* $r_1, s_2 = 0$, $s_1 = v^{1/2}|\tilde u|^{-1/2}$, $r_2 = v^{-1/2}|\tilde u|^{-1/2}$ *дает* $\sigma = \tilde\sigma\operatorname{sign}\tilde u$, $u = \tilde u^{-1}$ *без изменения* v;

4) в $CF_3^{6,2,<,=}$ $(u = 1)$ *при* $\tilde v = v > 1/2$ *замена с* $r_1 = 1$, $s_1 = (2\tilde v - 1)s_2$, $r_2 = 0$, $s_2 = (4\tilde v - 1)^{-1}$ *дает* $v = \tilde v(4\tilde v - 1)^{-1} < 1/2$ $(v > 1/4)$;

5) в $CF_{4,+1}^{6,2,<,=}$ $(u = 1)$ *при* $\tilde v = v < 0$ *нормировка с* $r_1, -s_2 = 1$ *дает* $v = -\tilde v$;

6) в $CF_6^{6,2,<,<}$ $(u < 0)$ *при* $\tilde\sigma = \sigma$, $\tilde u = u \le -1$ *замена с* $r_1, s_2 = 0$, $s_1 = (-\tilde u)^{-1/2}$, $r_2 = \tilde v s_1$ *дает* $\sigma = -\tilde\sigma$, $u = \tilde u^{-1}v^2 > -1$;

7) в $CF_7^{6,2,<,<}$ $(v < 0)$ *при* $\tilde\sigma = \sigma$, $\tilde u = u$, $\tilde v = v < -3$ *замена с* $r_1 = -(2\tilde v + 3\tilde u)\varrho$, $s_1 = (\tilde v + 3)\varrho$, $r_2 = -s_1$, $s_2 = -(\tilde v + 3\tilde u - 3)\varrho$, *где* $\varrho = (-\tilde v(\tilde v^2 + 3\tilde u\tilde v + 3(\tilde u^2 - \tilde u + 1)))^{-1/2}$, *дает* $u = -(3\tilde u + \tilde v + 3)\tilde v^{-1}$, $v = 9\tilde v^{-1} > -3$ *без изменения* σ;

8) в $CF_{11,+1}^{6,2,<,<}$ $(v < 0)$ *при* $\tilde\sigma = \sigma$, $\tilde u = u < 0$, $\tilde v = v$ *нормировка с* $r_1, -s_2 = 1$ *дает* $\sigma = -\tilde\sigma$, $u = -\tilde u > 0$ *без изменения* v; *при* $\tilde\sigma = \sigma$, $\tilde u = u$, $\tilde v = v < -1$ *замена с* $r_1, s_2 = \tilde u\varrho$, $s_1 = -r_2$, $r_2 = (\tilde v + 1)\varrho$, *где* $\varrho = (-\tilde v(\tilde u^2 + (\tilde v + 1)^2))^{-1/2}$, *дает* $u = -\tilde u\tilde v^{-1}$, $v = \tilde v^{-1} > -1$ *без изменения* σ.

Следствие 4.1. *Согласно определению 1.12 из [2] имеем:*
$acs_{8,+1}^{4,2,<,>} = \{|u| > 1\}$, $acs_{34,+1}^{4,2,<,>} = \{\sigma = -1,\ u > 1\}$, $acs_{34,+1}^{4,2,<,<} = \{\sigma = -1,\ u < -1\}$,
$acs_1^{6,2,<,>} = \{|u| > 1\}$, $acs_3^{6,2,<,=} = \{v > 1/2\}$, $acs_{4,+1}^{6,2,<,=} = \{v < 0\}$,
$acs_6^{6,2,<,<} = \{u \le -1\}$, $acs_7^{6,2,<,<} = \{v < -3\}$, $acs_{11,+1}^{6,2,<,<} = \{u < 0,\ v < -1\}$;
для остальных канонических форм из списка 2.1 $mcs^{m,2,<,*} = cs^{m,2,<,*}$.

5. Канонические формы и канонические множества при $\boldsymbol{l = 2}$. Приведем единый список канонических форм и канонических множеств для случая $l = 2$. Они получены в работе [3] и в данной статье.

Список 5.1. Двадцать две $CF_i^{m,2}$ и их $cs_i^{m,2}$ системы $(2.1)^1$ при $l = 2$ $(\sigma, \kappa = \pm 1)$.

$$CF_3^{2,2,=,\geqslant} = \sigma\begin{pmatrix} u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ CF_4^{2,2,>,\geqslant} = \sigma\begin{pmatrix} 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ CF_{7,\kappa}^{2,2,=,\gtrless} = \sigma\begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$CF_{8,\kappa}^{2,2,>,\gtrless} = \sigma\begin{pmatrix} 0 & 0 & \kappa & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ CF_7^{3,2,=,\geqslant} = \sigma\begin{pmatrix} u & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ CF_{10}^{3,2,>,\geqslant} = \sigma\begin{pmatrix} 0 & u & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$CF_{12}^{3,2,=,<} = \sigma\begin{pmatrix} 1 & u & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ CF_{13}^{3,2,=,=} = \sigma\begin{pmatrix} 0 & 0 & u & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ CF_{16}^{3,2,>} = \sigma\begin{pmatrix} 0 & 1 & u & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$CF_{8,\kappa}^{4,2,\gtrless,>} = \sigma\begin{pmatrix} u & 0 & \kappa u & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \kappa \end{pmatrix},\ CF_{14,-1}^{4,2,>,>} = \sigma\begin{pmatrix} 0 & u & u & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ CF_{23}^{4,2,>} = \sigma\begin{pmatrix} 0 & u & v & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$CF_{34,+1}^{4,2,<,\gtrless} = \sigma\begin{pmatrix} 0 & u & 0 & u \\ 1 & 0 & +1 & 0 \end{pmatrix}; CF_{7}^{5,2,<,\geqslant} = \sigma\begin{pmatrix} u & -u & u & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, CF_{22}^{5,2,<} = \sigma\begin{pmatrix} 0 & u & -u & u \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$

$CF_{1}^{6,2,<,>} = \sigma\begin{pmatrix} u & u & uv & 0 \\ 0 & 1 & 1 & v \end{pmatrix}, \quad CF_{3}^{6,2,<,=} = \sigma\begin{pmatrix} u & u(1-v) & 0 & -uv^2 \\ 0 & 1 & 1 & v \end{pmatrix},$

$CF_{4,+1}^{6,2,<,=} = \sigma\begin{pmatrix} u & v & u & v \\ 0 & 1 & 0 & +1 \end{pmatrix}, \quad CF_{6}^{6,2,<,<} = \sigma\begin{pmatrix} u & u(v^{-2}-v) & 0 & uv^{-3} \\ 1 & 0 & v^{-1}-v^2 & 1 \end{pmatrix},$

$CF_{7}^{6,2,<,<} = \sigma\begin{pmatrix} u & v & -v & u+v \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad CF_{11,+1}^{6,2,<,<} = \sigma\begin{pmatrix} u & v & u & v \\ 1 & 0 & +1 & 0 \end{pmatrix},$

$CF_{2}^{7,2,<,<} = \sigma\begin{pmatrix} u & w & uv^{-1}-v(uv+w) & u+wv^{-1} \\ 1 & 0 & v^{-1}-v^2 & 1 \end{pmatrix};$

$cs_{3}^{2,2,=,>} = \{u \neq 1\},\ cs_{3}^{2,2,=,=} = \{u = 1\};\ cs_{4}^{2,2,>,>} = \{u \neq 1\},\ cs_{4}^{2,2,>,=} = \{u = 1\};$
$cs_{7,\kappa}^{2,2,=,>} = \{\kappa = 1\},\ cs_{7,\kappa}^{2,2,=,<} = \{\kappa = -1\};\ cs_{8,\kappa}^{2,2,>,>} = \{\kappa = 1\},\ cs_{8,\kappa}^{2,2,>,<} = \{\kappa = -1\};$
$cs_{7}^{3,2,=,>} = \{u \neq \pm 1\},\ cs_{7}^{3,2,=,=} = \{u = 1\}; cs_{10}^{3,2,>,>} = \{u \neq 1\},\ cs_{10}^{3,2,>,=} = \{u = 1\};$
$cs_{12}^{3,2,=,<} = \{u < -1/4\}; cs_{13}^{3,2,=,=} = \{u = 1\};$
$cs_{16}^{3,2,>,>} = \{u > -1/4\},\ cs_{16}^{3,2,>,=} = \{u = -1/4\},\ cs_{16}^{3,2,>,<} = \{u < -1/4\};$
$cs_{8,-1}^{4,2,>,>} = \{u \neq \pm 1\},\ cs_{8,+1}^{4,2,<,>} = \{u \neq 1\},\ cs_{8,+1}^{4,2,<,=} = \{u = 1\};$
$cs_{14,-1}^{4,2,>,>} = \{u \neq -1, -2, -3\};$
$cs_{23}^{4,2,>,>} = \{u \neq 1,\ v > -(1-u)^2/4,\ v \neq u,\ (2u-1)/4,\ u(2-u)/4\},$
$cs_{23}^{4,2,>,=} = \{u \neq -1,\ v = -(1-u)^2/4\},\ cs_{23}^{4,2,>,<} = \{v < -(1-u)^2/4\};$
$cs_{34,+1}^{4,2,<,>} = \{u > 0,\ u \neq 1\},\ cs_{34,+1}^{4,2,<,<} = \{u < 0\}; cs_{7}^{5,2,<,>} = \{u \neq \pm 1, 3\},\ cs_{7}^{5,2,<,=} = \{u = 1\};$
$cs_{22}^{5,2,<,>} = \{u > -1/4,\ u \neq 3/2, 6, 4 \pm \sqrt{13}\},\ cs_{22}^{5,2,<,=} = \{u = -1/4\},$
$cs_{22}^{5,2,<,<} = \{u < -1/4\};$
$cs_{1}^{6,2,<,>} = \{u \neq \pm 1,\ v > 1/4,\ v \neq \psi_1^2(u), \psi_2(u), \psi_3(u)\};$
$cs_{3}^{6,2,<,=} = \{u = 1,\ v > 1/4,\ v \neq 1/3, 1, (49 \mp 7\sqrt{46})/6\};\ cs_{4,+1}^{6,2,<,=} = \{u = 1,\ |v| < 1\};$
$cs_{6}^{6,2,<,<} = \{v \in (0,1),\ u \in (\psi_7^-(v), \psi_7^+(v)),\ u \neq -v,\ (u,v) \neq (-2^{-5/3}(3 \pm \sqrt{5}),\ 2^{-2/3})\};$
$cs_{7}^{6,2,<,<} = \{4v < -(u+1)^2,\ u \neq -1,\ v \neq -u,\ -3(u+1),\ 3(u+1)(u+2)^{-1},\ \psi_{32}(u)\};$
$cs_{11,+1}^{6,2,<,<} = \{4v < -u^2,\ v \neq \psi_{20}^{\mp}(u),\ 3(u^2+5)(u^2+1)(2(u^2-3))^{-1}\};$
$cs_{2}^{7,2,<,<} = \{v \in (0, \sqrt[3]{4}),\ v \neq 1, -u, 2u, \theta_3(u),\ w \neq -uv, -u(v-v^{-2}), \psi_{33}^{\mp}(u,v),\ 4w < -(u+v)^2, \psi_{27}(u,v,w) < 0,\ (u,w) \neq ([-4v \vee \psi_{25}^{\mp}(v)],\ [3v(4v+\psi_{25}^-(v))/2 \vee 3(v\psi_{25}^{\pm}(v) - 2v^{-1})]),\ (v,w) \neq ([7^{-1/3} \vee \theta_2(u)],\ [3(7^{-1/3}u + 7^{-2/3}) \vee (u+\theta_2(u))(\theta_2(u)-2u)])\}.$

Дополнение. Продолжая обсуждение, начатое в [1, разд. 1.5], остановимся подробнее на подходах к выбору невозмущенной части двумерных систем, которая в первую очередь подлежит классификации и соответствующей нормализации.

В предлагаемом цикле работ выбор очевиден: классификации и нормализации подлежит однородный кубический многочлен, чьи канонические формы затем используются в качестве невозмущенных частей для нормализации возмущений.

Столь же очевидна необходимость классификации и нормализации однородных квадратичных многочленов в двумерных системах, разложение правых частей которых начинается со второго порядка. Такая классификация впервые была получена К. С. Сибирским в [5] и затем заново разработана на иных принципах упорядочивания в работах В. В. Басова с соавторами (см. библиогр. в [1]).

А для двумерных систем $\dot{x} = Ax + X(x)$ с нильпотентной матрицей A в невозмущенной части нормализацию одним из первых осуществил Ф. Такенс в работе [6]. Полученная им обобщенная нормальная форма (ОНФ) имеет вид $\dot{y}_1 = y_2$, $\dot{y}_2 = y_1 f(y_1) + y_2 g(y_1)$ и эквивалентна ОНФ

$$\dot{y}_1 = y_2 + y_1 g(y_1), \quad \dot{y}_2 = y_1 f(y_1) + y_2 g(y_1), \qquad (*)$$

где $f = \sum_{k=\mu}^{\infty} \alpha_k y_1^k,\ g = \sum_{k=\nu}^{\infty} \beta_k y_1^k\ \ (\alpha_\mu, \beta_\nu \neq 0,\ \mu, \nu \geq 1)$. Эта система является одним из частных случаев *неполной НФ Белицкого* и получена Г. Р. Белицким в [7].

Интересно, что А. Байдер и Я. Сандерс в работе [8] использовали именно ОНФ $(*)$ для создания полной формальной классификации ростков аналитических векторных полей в $\mathbb{R}^2$ с нильпотентной линейной частью, основанной на соотношении чисел μ и ν. Назвав $(*)$ нормальной формой первого порядка, в случаях, когда $\mu \neq 2\nu$, они определили и получили НФ второго, третьего и далее вплоть до бесконечного порядка, обрывая этот процесс в момент прекращения упрощений и получения в определенном смысле единственной НФ. В дальнейшем Х. Кокубу, Х. Ока и Д. Ванг в работе [9] для неисследованного случая $\mu = 2$, $\nu = 1$ нашли единственную НФ второго порядка $\dot{y}_1 = y_2$, $\dot{y}_2 = \alpha_2 y_1^3 + \beta_1 y_1 y_2 + y_1 \sum_{k=3}^{\infty} y_1^k$, но при условии, что отношение α_2/β_1^2 не является алгебраическим числом.

Следует отметить, что единственность НФ, фактически, означает выделение простейшей НФ в определенном базисе. Поэтому предложенные в [8, 9] методы не позволяют выделять все структуры нормальных форм, как это происходит при нахождении ОНФ методом резонансных уравнений и наборов, изложенном в [1, разд. 1.3].

Литература

1. *Басов В. В.* Двумерные однородные кубические системы: классификация и нормальные формы — I // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2016. Т. 3 (61), вып. 2. С. 181–195. DOI:10.21638/11701/spbu01.2016.201

2. *Басов В. В.* Двумерные однородные кубические системы: классификация и нормальные формы — II // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2016. Т. 3 (61), вып. 3. С. 355–371. DOI:10.21638/11701/spbu01.2016.302

3. *Басов В. В., Чермных А. С.* Двумерные однородные кубические системы: классификация и нормальные формы — III // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62), вып. 2. С. 179–192. DOI:10.21638/11701/spbu01.2017.201

4. *Басов В. В., Чермных А. С.* Канонические формы двумерных однородных кубических систем с квадратичным общим множителем // Дифференц. уравнения и процессы управления. 2016. № 3. С. 66–190. URL: http://www.math.spbu.ru/diffjournal/pdf/basovch.pdf (дата обращения: 28.04.2017).

5. *Сибирский К. С.* Введение в алгебраическую теорию инвариантов дифференциальных уравнений. Кишинев: Изд-во Штиинца, 1982. 168 с.

6. *Takens F.* Singularities of vector fields // IHES. 1974. Vol. 43, N 2. P. 47–100.

7. *Белицкий Г. Р.* Нормальные формы формальных рядов и ростков C^∞-отображений относительно действия группы // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1976. Т. 40, № 4. С. 855–868.

8. *Baider A., Sanders J.* Further reduction of the Takens—Bogdanov normal form // J. Differential Equations. 1992. Vol. 99, issue 2. P. 205–244. https://doi.org/10.1016/0022-0396(92)90022-F

9. *Kokubu H., Oka H., Wang D.* Linear grading function and further redaction of normal forms // J. Differential Equations. 1996. Vol. 132, issue 2. P. 293–318. https://doi.org/10.1006/jdeq.1996.0181

Статья поступила в редакцию 13 февраля 2017 г.; рекомендована в печать 30 марта 2017 г.

Сведения об авторах

Басов Владимир Владимирович — кандидат физико-математических наук, доцент; vlvlbasov@rambler.ru

Чермных Александр Сергеевич — магистрант; achermnykh@yandex.ru

TWO-DIMENSIONAL HOMOGENEOUS CUBIC SYSTEMS: CLASSIFICATION AND NORMAL FORMS — IV

Vladimir V. Basov, Aleksander S. Chermnykh

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; vlvlbasov@rambler.ru, achermnykh@yandex.ru

This article is the fourth in a series of works devoted to two-dimensional cubic homogeneous systems. It considers the case where homogeneous polynomial vector on the right-hand part of the system has a square common factor with complex zeros. The set of such systems is divided into classes of linear equivalence, in each of them on the basis of properly introduced structural and normalization principles the simplest system is distinguished and is the normal form of the third order. In fact, the normal form is defined by the coefficient matrix of the right-hand part, which is called the canonical form (CF). Each CF has its own arrangement of nonzero elements, their specific normalization and canonical set of permissible values for the non-normalized elements, which relates CF to the selected class of equivalence. In addition, for each CF, (a) the conditions on the coefficients of the initial system, (b) non-singular linear substitution reducing the right-hand part of the system under these conditions to the selected CF, and (c) obtained values of CF's non-normalized elements are given. Refs 9.

Keywords: homogeneous cubic system, normal form, canonical form.

References

1. Basov V. V., "Two-dimensional homogeneous cubic systems: Classification and normal forms. I", *Vestnik St. Petersb. Univ. Math.* **49**, issue 2, 99–110 (2016). DOI:10.3103/S1063454116020023

2. Basov V. V., "Two-dimensional homogeneous cubic systems: Classification and normal forms. II", *Vestnik St. Petersb. Univ. Math.* **49**, issue 3, 204–218 (2016). DOI:10.3103/S1063454116030031

3. Basov V. V., Chermnykh A. S., "Two-dimensional homogeneous cubic systems: classification and normal forms: III", *Vestnik St. Petersb. Univ. Math.* **50**, issue 1, 97–110 (2017). DOI:10.3103/S1063454117020029

4. Basov V. V., Chermnykh A. S., "Canonical Forms of Two-dimensional Homogeneous Cubic Systems with a Common Square Factor", *Differential Equations and Control Processes* (3), 66–190 (2016) [in Russian]. Available at http://www.math.spbu.ru/diffjournal/EN/numbers/2016.3/article.1.7.html) (accessed 28.04.2017).

5. Sibirskii K. S., *An introduction to the algebraic theory of invariants of differential equations* (Shtiintsa Publ., Kishinev, 1982, 168 p.) [in Russian].

6. Takens F., "Singularities of vector fields", *IHES* **43**(2), 47–100 (1974).

7. Belickii G. R., "Normal forms for formal series and germs of C^{∞}-mappings with respect to the action of a group", *Mathematics of the USSR-Izvestiya* **40**(4), 855–868 (1976).

8. Baider A., Sanders J., "Further reduction of the Takens—Bogdanov normal form", *J. Differential Equations* **99**, issue 2, 205–244 (1992). https://doi.org/10.1016/0022-0396(92)90022-F

9. Kokubu H., Oka H., Wang D., "Linear grading function and further redaction of normal forms", *J. Differential Equations* **132**, issue 2, 293–318 (1996). https://doi.org/10.1006/jdeq.1996.0181

Для цитирования: Басов В. В., Чермных А. С. Двумерные однородные кубические системы: классификация и нормальные формы — IV // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 3. С. 370–386. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.302

For citation: Basov V. V., Chermnykh A. S. Two-dimensional homogeneous cubic systems: classification and normal forms — IV. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2017, vol. 4 (62), issue 3, pp. 370–386. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.302