УДК 512.62 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 3
MSC 11S31

ЯВНЫЕ КОНСТРУКЦИИ И АРИФМЕТИКА ЧИСЛОВЫХ ЛОКАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ*

С. В. Востоков[1], *С. С. Афанасьева*[1,2], *М. В. Бондарко*[1], *В. В. Волков*[1], *О. В. Демченко*[1], *Е. В. Иконникова*[1], *И. Б. Жуков*[1], *И. И. Некрасов*[1], *П. Н. Питаль*[1]

[1] Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9
[2] Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет
информационных технологий, механики и оптики,
Российская Федерация, 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49

Данная работа представляет собой обзор результатов, полученных Петербургской школой локальной теории чисел под руководством С. В. Востокова за последние десятилетия. Все эти результаты едва ли умещаются за названием данной обзорной статьи, ввиду широкого круга идей, применяемых к еще более широкому классу задач современной теории чисел. Авторы попытались осветить лишь небольшую их часть, в число которых вошли: современный подход к явным формулам для символа Гильберта для случая неклассических формальных модулей в одномерном и многомерном случаях, их применение в локальной арифметической геометрии и теория ветвления. Библиогр. 139 назв.

Ключевые слова: формальные группы, закон взаимности, локальные числовые поля, многомерные локальные поля.

1. Введение и историческая справка рассматриваемых задач. Более 30 лет — ранее в Ленинграде, а теперь в Санкт-Петербурге — существует школа, занимающаяся вопросами геометрии и арифметики локальных числовых полей под руководством Сергея Владимировича Востокова. За это время школой было получено много красивых результатов в данной области. В обзоре [1] представлены результаты школы (или семинара «Конструктивная теория полей классов») вплоть до 1991 года. С тех пор состав школы сильно расширился[1], а вместе с ним и тематика, круг задач и методы их решения. Настоящая работа призвана осветить данный круг вопросов, кратко описав основные направления исследований и их основные результаты за последние 20 лет.

Наиболее известной математической парадигмой, представляющей тематику школы, являются *законы взаимности*. Вероятно, первым из них, строго сформулированным математиками, является квадратичный закон взаимности. Первопроходцами были Пьер Ферма и Леонард Эйлер, сформулировавший этот закон. Несколько доказательств было получено К. Ф. Гауссом. Биквадратичный и кубический законы взаимности были сформулированы и доказаны П. Г. Л. Дирихле и Ф. Г. М. Эйзенштейном. Также Э. Э. Куммер рассмотрел закон взаимности для кругового расширения $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ (ζ_p — примитивный корень из единицы степени p). Но общей идеи, обобщающей все данные частные случаи и связывающей их в общее утверждение, не было.

Далее, по-видимому, Леопольд Кронекер был одним из первых, кто высказал одну из наиболее общих и в то же время плодотворных идей. А именно, им была

*Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант № 16-11-10200).

[1] В нее входят С. В. Востоков, И. Б. Фесенко, Б. М. Беккер, И. Б. Жуков, М. В. Бондарко, О. В. Демченко, Д. Г. Бенуа, М. А. Иванов, С. С. Афанасьева, В. В. Волков, Е. В. Иконникова, П. Н. Питаль, И. Л. Климовицкий, И. И. Некрасов и многие другие.

 DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.305

отмечена аналогия между *арифметикой алгебраических чисел* (то есть арифметикой расширений $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}_p$) и *арифметикой аналитических функций на римановых поверхностях* (подробнее см. подраздел 3.5). Очевидно, что эта глубокая идея до сих пор не исчерпала себя в полном объеме в современной математике.

Следующими важными работами стали статья И. Р. Шафаревича [2] и работа С. В. Востокова [3]. В последней была получена явная формула для символа Гильберта. Отметим также, что данная формула независимо год спустя была получена Х. Брюкнером [4]. Дальнейшее более глубокое понимание *явных формул* связано с p-адическим анализом и арифметикой формальных групп.

Особо отметим, что несмотря на то, что для случая спаривания Гильберта явные формулы получены уже относительно давно, аналогичных результатов для алгебраических кривых нет до сих пор.

Авторам сложно указать единый подробный источник по законам взаимности, так как существует необозримое множество прекрасных книг, посвященных данной тематике. Однако достаточно полным источником именно по изучению явных формул может служить книга [5]. Эта книга содержит обширную библиографию по данному направлению. Также отметим обзоры об общих законах взаимности [6, 7].

Настоящая работа разделена на три части, в которых описываются следующие результаты:

1) результаты, связанные с получением новых явных формул,

2) результаты, полученные применением явных формул к арифметическим задачам,

3) результаты, связанные с арифметикой числовых локальных полей.

Мы кратко представим метод доказательства явных формул с ссылками на посвященные им разделы, в которых изложены элементарная интерпретация данного шага в доказательстве, современные результаты и перспективы.

1. Находятся элементы, алгебраичные над исходным полем, присоединение которых дает неразветвленные расширения. Наиболее общие известные результаты по данному направлению изложены в подразделе 3.1 (об интерпретации см. сноску в послеследующем пункте).

2. В модуле некоторой формальной группы, или же мультипликативной группе основного поля в классическом случае, строится система образующих, называемая базисом Шафаревича. Данное построение проводится по аналогии с методом, разработанным И. Р. Шафаревичем для построения базиса в упоминавшейся выше работе [2]. Данным базисам и их аналогам посвящен подраздел 3.2.

3. Строится аналог спаривания Гильберта на кольце формальных степенных рядов. А точнее, это спаривание задается явной формулой, являющейся вычетом специального ряда. Проверяются основные свойства данного спаривания (линейность, символьное свойство). Далее, это спаривание переносится на основное поле с помощью гомоморфизма эвалюации, а именно независимая переменная приравнивается к некой униформизующей основного поля[2]. Остается лишь

[2]Иначе говоря, на основном поле выбирается система координат: в одномерном случае — это выбор униформизующей, относительно которой любой элемент раскладывается в ряд с коэффициентами из множества представителей Тайхмюллера. В этой связи примарные элементы отвечают расширениям исходного поля, при которых не требуется замена координат.

проверить корректность такого «координатного» определения, то есть независимость построенного спаривания от выбора униформизующей.

В подразделе 3.3 мы представим лишь результаты, касающиеся формальных модулей формальных групповых законов Хонды (п. 3.3.1) и многочленных формальных групповых законов (п. 3.3.2), а также интерпретацию данных формул через p-адические интегралы (подраздел 3.5).

4. Полученное на предыдущем шаге спаривание вычисляется на базисе Шафаревича и тем самым устанавливается его совпадение с символом Гильберта, что приводит к явной формуле последнего.

   Данный шаг для каждого отдельного случая (то есть для каждого формального группового закона) проверяется оригинально, и здесь на данный момент нет общего подхода. Описание методов, примененных в частных случаях, могут быть найдены в соответствующих работах, посвященных явным формулам для символа Гильберта.

В качестве демонстрации одного из применений явных формул для символа Гильберта мы опишем кратко результаты о модулях Галуа для случая локальных полей (подраздел 4.1). Однако это применение не единственно. Например, явные формулы были успешно применены для описания представлений Галуа в полных многомерных локальных полях [8] и для описания группы Галуа p-расширений [9].

Из арифметической теории числовых локальных полей мы кратко осветим результаты, связанные с классификацией формальных групповых законов над числовыми локальными кольцами (раздел 5), конструкциями расширений полных дискретно нормированных полей (раздел 6), структурной теорией высших локальных полей (раздел 7) и теорией ветвления в одномерных и многомерных локальных полях (раздел 8).

Нельзя не заметить, что в данную работу не вошли другие результаты участников школы, во многом из-за того, что каждый из этих результатов заслуживает отдельной обзорной статьи. Отметим некоторые из них и литературу для ознакомления с ними:

- различные результаты С. В. Востокова и соавторов, связанные с вычислением обобщенного символа Гильберта в многомерных и полных локальных полях в случаях незатронутых здесь [10–20];

- результаты М. В. Бондарко, связанные с решением проблемы Леопольда (по данной тематике мы настоятельно рекомендуем к прочтению его докторскую диссертацию [21], там же может быть найдена библиография по данному вопросу);

- большое количество результатов И. Б. Фесенко, связанных с теорией полей классов многомерных локальных полей [22–25], p-теорией полей классов для многомерных локальных полей [26], неабелевой теорией полей классов для локальных полей [27, 28], гармоническим анализом для многомерных локальных полей [29, 30];

- результаты по построению криптографических систем на основе явных формул [31, 32]

и многие другие.

2. Основные обозначения. В теории числовых локальных полей наиболее элементарным и естественным является случай одномерного локального поля, то есть конечного расширения $\mathbb{Q}_p$. Однако с развитием данной области более привычным для рассмотрения стал случай произвольного многомерного числового локального поля. Далее мы дадим лишь необходимые определения, но для подробного знакомства с многомерными полями авторы рекомендуют к прочтению упоминавшуюся ранее книгу [5], сборник [33] и неопубликованные записки [34].

Пусть p — нечетное простое число. Обозначим за $\mathbb{Q}_p$ поле p-адических чисел, естественное нормирование в котором мы будем обозначать ν_p. Зафиксируем в $\mathbb{Q}_p$ униформизующий элемент π_Q (то есть элемент, для которого $\nu_p(\pi_Q) = 0$) и одну из эквивалентных норм, соответствующих этому нормированию, $|x|_p = |x| = p^{-\nu_p(x)}$. Далее мы всегда будем работать в p-адической топологии, порожденной этой нормой. Заметим, что структура нормирования естественным образом продолжается на любое расширение $\mathbb{Q}_p$. Соответствующие нормирование ν_K и униформизующий элемент π_K мы обычно будем обозначать ν_π и π.

Будем называть n-мерным локальным полем K такое расширение $\mathbb{Q}_p$, что ряд из факторов

$$K = K_n > K_{n-1} = \{x \in K_{n-1} |\, \nu_{K_{n-1}}(x) \leqslant 1\}/\{x \in K_{n-1} |\, \nu_{K_{n-1}} = 1\} > \dots$$
$$\dots > \{x \in K_1 |\, \nu_{K_1}(x) \leqslant 1\}/\{x \in K_1 |\, \nu_{K_1}(x) = 1\} = K_0 = F$$

сходится к некоторому совершенному полю $F = F^p$.

Элементы этого ряда есть не что иное как поля вычетов $\overline{K_{i+1}}$ — факторы колец целых $\mathcal{O}_{K_i}$ по главным идеалам $\mathfrak{m}_{K_i}$, соответствующим нормированиям ν_{K_i}.

Читатель может без потери понимания рассматривать только одномерный случай, для которого далее мы вводим подробные обозначения. Для многомерного же случая они во многом совпадают и могут быть легко восстановлены из аналогии с одномерными полями.

В случае $n = 1$, то есть для одномерных локальных полей, которые обычно будем называть просто локальными, группу представителей Тейхмюллера в поле K обозначим через $\mathfrak{R}_K$, а под $U_1(K) = U_1$ будем понимать группу главных единиц поля K, то есть множество элементов α таких, что

$$\alpha \equiv 1 (\bmod \pi).$$

Алгебраическое и сепарабельное замыкания поля K мы обозначаем через K^{alg} и K^{sep} соответственно, максимальное абелево и максимальное неразветвленное поля для поля K — через K^{ab} и K^{nr}.

Максимальное неразветвленное поле внутри расширения $K/\mathbb{Q}_p$ мы будем обозначать через T_K. Для любого (не обязательно конечного) неразветвленного расширения K'/K через $\varphi_{K'/K}$ мы обозначаем автоморфизм Фробениуса.

Также условимся в обозначениях касательно формальных групповых законов, которые в зависимости от контекста могут быть как одномерными, так и многомерными. Через $F(X,Y)$ мы будем обозначать сам групповой закон, который всегда коммутативен в данной работе[3], через $\mathrm{End}_{FGL}(F) \supset \mathbb{Z}$ — его кольцо эндоморфизмов в категории формальных групповых законов FGL, через $[a]_F$ — эндоморфизм, соответствующий элементу a из кольца определения[4] $F(X,Y)$. Для любого расширения

[3] Подробнее см. начало раздела 5.

[4] Которое, если не оговорено противное, совпадает с $\mathcal{O}_K$.

L/K мы называем *формальным модулем* $F(\mathfrak{m}_L)$ для поля L и формального группового закона $F=F(X,Y)$ $\mathrm{End}_{FGL}(F)$-модуль, который как множество совпадает с $\mathfrak{m}_L$, а аддитивная операция на нем задается формальным законом F: $a+_F b=F(a,b)$.

Отдельно отметим, что аналогом группы K^* в многомерном случае служат К-группы Милнора исходного поля $K_n(K)$. Все необходимые определения, свойства и утверждения касательно К-групп Милнора и их связи с законами взаимности могут быть найдены в [5].

В качестве основного технического источника по формальным групповым законам предлагается книга [35], а также [36]. Однако более современными источниками являются записки [37] и [38].

Более подробные и конкретные обозначения далее будут вводиться по необходимости.

3. Построение новых явных формул. ***3.1. Примарные элементы.*** В работе [39] были определены так называемые p^n-примарные элементы, использующиеся в задании символа Гильберта. Напомним, что элемент ω поля K называется p^n-примарным, если расширение $K(\sqrt[n]{\omega})$ неразветвлено. В работе [3] были построены элементы $H(a)$, где a есть элемент кольца целых $\mathcal{O}_K$, конструкция которых по существу не отличалась от данной в работе [39]. Однако кроме них были получены и примарные элементы другого типа $P(a)$, связанные с первыми соотношением $P(a)\equiv H(a) \mod (K^*)^{p^n}$ (подробнее см. [3, § 4, п. 3]). Преимущество элементов второго типа состояло в том, что для их определения были необходимы только элементы исходного поля.

В дальнейшем обобщение полученной в мультипликативном случае конструкции примарных элементов оказалось крайне удобным при изучении группы точек формальных модулей, натянутых на максимальные идеалы локального поля (см. работы [40, 41]).

Наконец, в 2013 году И. Л. Климовицкий и С. В. Востоков в работе [42] смогли получить общий вид примарных элементов в произвольном формальном модуле локального поля с совершенным полем вычетов. Сформулируем ниже этот результат.

Пусть $K^{'}/K$ — конечное расширение Галуа, L — некоторое полное дискретно нормированное поле с совершенным полем вычетов, содержащее K и $K^{'}$ как локальные подполя. Обозначим за T подполе инерции расширения L/K, а за T^{nr} — максимальное неразветвленное расширение T. Напомним, что $\varphi_{T^{nr}/K}$ обозначает автоморфизм Фробениуса в расширении T^{nr}/K.

Пусть далее $F(X,Y)$ — формальная $\mathcal{O}_K$-модульная группа (подробнее см. [35, гл. 4, § 27]), с логарифмом λ_F и экспонентой Артина—Хассе E_F. Тогда для произвольного $\alpha\in\mathcal{O}_T$ можно определить элемент $H_\zeta(\alpha)=E_F((\pi^nA)\varepsilon)$, где $\zeta\in\mathrm{Ker}[\pi^n]_F, \varepsilon=l_F(\zeta)\in F(\mathfrak{m}_L)$, а A — любое решение уравнения $A-A^{\varphi_{T^{nr}/K}}=\alpha$ в кольце $\mathcal{O}_{T^{nr}}$. Построенный выше элемент будет π^n-примарным в смысле следующей теоремы.

Теорема 1. *1. Элемент $H_\zeta(\alpha)$ является π^n-примарным в формальном $\mathcal{O}_K$-модуле $F(\mathfrak{m}_L)$, то есть*

(a) $H_\zeta(\alpha)\in L$, и

(b) расширение $L(\frac{1}{\pi^n}H_\zeta(\alpha))/L$ является конечным абелевым неразветвленным расширением.

2. Примарный элемент $H_\zeta(\alpha)$ не зависит от выбора элемента A из уравнения $A-A^{\varphi_{T^{nr}/K}}=\alpha$.

Легко видеть, что для определения построенных выше элементов недостаточно элементов исходного поля. Поэтому также в работе [42] дана конструкция π^n-примарных элементов $P(a)$, для определения которых можно ограничиться только элементами исходного поля.

3.2. Базисы Шафаревича. И. Р. Шафаревич в работе [2] построил специальный базис мультипликативной группы поля, аналог базиса Гензеля. Его идея состояла в том, что на этом базисе символ Гильберта вычисляется очень просто (далее предполагалось связать теорию куммеровых расширений полей с теорией симплектических пространств).

Эта идея была осуществлена С. В. Востоковым в работе [3]. С тех пор аналоги базиса Шафаревича были построены и использованы для вычисления символа Гильберта в различных ситуациях (для многомерного локального поля в [43] и обобщение в [44], для формальных модулей Любина—Тейта в [45, 46] и [47]).

К наиболее интересным относится, случай топологических К-групп Милнора, изучаемый в работе [43]. Пусть K — n-мерное локальное поле нулевой характеристики с полем вычетов характеристики p, содержащее корни степени p^M из единицы, где M есть мультииндекс, $t_1, \ldots, t_n$ — локальные параметры, $\{\theta_s\}$ — система представителей Тейхмюллера. Пусть также $(a_1, \ldots, a_n)$ такие, что $0 < (a_1, \ldots, a_n) < p\overline{e}_K/(p-1)$ ($\overline{e}_K$ — индекс ветвления поля K), p не делит $(a_1, \ldots, a_n)$, и если $(j_1, \ldots, j_{n-m+1}) = (1, 2, \ldots, n) \setminus (i_1, \ldots, i_{m-1})$, то j_1 — наименьший индекс, для которого a_{j_1} не делится на p, и $\varepsilon(\theta_s; a_1, \ldots, a_n) = E(\theta_s t_1^{a_1} \ldots t_n^{a_n})$ (E — функция Артина—Хассе).

Утверждение. *Элементы*

$$\{t_{i_1}, \ldots, t_{i_m}\}, \quad 1 \le i_1 < \ldots < i_m \le n,$$

$$\left\{t_{i_1}, \ldots, t_{i_{m-1}}, \omega\right\}, \quad 1 \le i_1 < \ldots < i_{m-1} \le n,$$

$$\left\{t_{i_1}, \ldots, t_{i_{m-1}}, \varepsilon(\theta_s; a_1, \ldots, a_n)\right\}, \quad 1 \le i_1 < \ldots < i_{m-1} \le n,$$

образуют базис $K_m(K) \mod p^M$.

В работе [48] построен базис Гензеля—Шафаревича для произвольного дискретно нормированного поля K характеристики 0 с полем вычетов $\overline{K}$ характеристики p.

Приведем результаты для совершенного поля вычетов $\overline{K}$.

Теорема 2. *Система единиц*

$$\left\{\varepsilon_{i,s} | i \in I, 1 \le s < \frac{pe}{p-1}, p \nmid s\right\},$$

где $\varepsilon_{i,s} \equiv 1 + \theta\pi^s \mod \pi^{s+1}$ *является* $\mathbb{Z}_p$*-базисом группы главных единиц поля* K, *т. е. любая единица* $\varepsilon \in U_1$ *однозначно представляется в виде*

$$\varepsilon = \prod_{i,s} \varepsilon_{i,s}^{a_{i,s}}, \quad a_{i,s} \in \mathbb{Z}_p,$$

где множество индексов

$$I_{s,c} = \{i \in I | v_p(a_{i,s}) \leqslant c\}$$

конечно для любых $c \geqslant 0$ *при фиксированном* s.

Сформулируем также результат для несовершенного поля вычетов $\overline{K}$. Далее, $\{\overline{t}_r, r \in R\}$ есть система представителей p-базиса поля K, т. е. $\overline{K} = \overline{K}^p[\overline{t}_r]$ и $|\overline{K}^p[t_1, \dots t_n] : \overline{K}^p| = p^n$ для любых попарно различных $t_1, \dots, t_n$.

Теорема 3. *Система единиц*

$$\left\{1 + \alpha^{p^\mu} t_{(r)}^{(k)} \pi^{p^\mu s}\right\},$$

где $\alpha \in \mathfrak{R}_K$, $s \in S_e = \left\{1 \le s < \frac{pe}{p-1}, \quad p \nmid s\right\}$, $0 \leqslant \mu \leqslant \mu_s$, $1 \leqslant (k) \leqslant p^\mu$, $p \nmid (k)$, $(r) \subset R$, *является* $\mathbb{Z}_p$*-базисом группы главных единиц поля* K, *т.е. любая единица* $\varepsilon \in U_1$ *однозначно представляется в виде*

$$\varepsilon = \prod_{s,\mu,(k),(r)} \left(1 + \alpha^{p^\mu} t_{(r)}^{(k)} \pi^{p^\mu s}\right)^{a_{\varepsilon,\alpha}}, \quad a_{\varepsilon,\alpha} \in \mathbb{Z}_p,$$

при этом (r) *пробегает конечное множество наборов индексов из* R, *а множество*

$$I_{s,\mu} = \{\alpha \in A, (k), (r) | v_p(a_{i,s}) \leqslant c\}$$

конечно для любых $c \geqslant 0$ *при фиксированных* $s \in S_e$, $0 \leqslant \mu \leqslant \mu_s$.

3.3. Явные формулы символа Гильберта в неклассическом случае. 3.3.1. Теория Хонды. Пусть теперь K' — это конечное *неразветвленное* расширение K. Обозначим через $\blacktriangle$ оператор, действующий на $K'[[x]]_0$ следующим образом: если $\varphi = \sum c_i x^i$, то $\varphi^\blacktriangle = \sum c_i^{\varphi_{K'/K}} x^{qi}$.

Известно, что формальные группы Любина—Тейта являются частным случаем формальных групп Хонды [49] для типа $\pi - \varepsilon\blacktriangle$. Поэтому естественным образом встает вопрос об отыскании аналога основных результатов классической теории формальных групп Любина—Тейта [50] на случай формальных групп Хонды, что и было проделано в статье [51], где он найден в следующем виде.

Теорема 4. *Пусть* F — *одномерная формальная группа Хонды высоты* h *над* $\mathcal{O}_{K'}$. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

I. Для любой формальной группы Хонды F *высоты* h *«канонического» типа* $\pi - a_1\blacktriangle - \dots - a_h\blacktriangle^h$, *где* $a_1, \dots, a_h \in \pi\mathcal{O}_{K'}$ *и* a_h *обратим (к такому виду тип всегда можно однозначно привести), существуют формальная группа Хонды* $\mathcal{AF}$ *и гомоморфизм* f_F *из* F *в* $\mathcal{AF}$ *такой, что* $f_F \equiv (\pi/a_h)x \mod \deg 2$, *и* $f_F \equiv x^{q^h} \mod \pi$.

II. Для любого «канонического» типа $\pi - a_1\blacktriangle - \dots - a_h\blacktriangle^h$ *и любого ряда с целыми коэффициентами* f *такого, что* $f \equiv (\pi/a_h)x \mod \deg 2$, $f \equiv x^{q^h} \mod \pi$, *существует единственная формальная группа Хонды* F *этого типа такая, что* $f = f_F$ — *выделенный гомоморфизм из* F *в* $\mathcal{AF}$.

Теорема 4 позволяет обобщать результаты, полученные для формальных групп Любина—Тейта, на формальные группы Хонды. В частности, это было сделано для явной формулы обобщенного символа Гильберта, один из видов которой был получен в работах [40, 52].

Пусть $\widehat{K^{alg}}$ — пополнение алгебраического замыкания поля K, $F(\mathfrak{m}_{\widehat{K^{alg}}})$ — соответствующая группа точек. Положим $W_F^n = \{\alpha \in F(\mathfrak{m}_{\widehat{K^{alg}}}) : [\pi^n]_F(\alpha) = 0\}$.

Пусть L — конечное расширение K', содержащее W_F^n, $\rho_L : L^* \to \mathrm{Gal}(L^{ab}/L)$ — отображение Артина. Определим обобщенный символ Гильберта:

$$(\, , \,)_F : L^* \times F(\mathfrak{m}_L) \to W_F^n,$$

$$(\alpha, \beta)_F = \rho_K(\alpha)(\tilde{\beta}) -_F \tilde{\beta},$$

где $\tilde{\beta} \in K^{alg} : [\pi^n]_F(\tilde{\beta}) = \beta$.

Построим вспомогательный символ $\{ \, , \, \}_F : L^* \times \mathcal{A}^n F(\mathfrak{m}_L) \to W_F^n$,

$$\{\alpha, \beta\}_F = \rho_K(\alpha)(\bar{\beta}) -_F \bar{\beta},$$

где $\bar{\beta} \in K^{alg} : f^{(n)}(\bar{\beta}) = \beta$ и $f^{(n)}$ определяется как композиция выделенных изогений

$$F \xrightarrow{f} \mathcal{A}F \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} \mathcal{A}^n F.$$

Используя аналогию между вспомогательным символом и символом Гильберта для формальных групп Любина—Тейта, а также связь между ним и обобщенным символом Гильберта для формальных групп Хонды, удается описать арифметику группы точек для последнего: построить примарные элементы, базис Шафаревича группы точек, вычислить значения обобщенного символа Гильберта на этом базисе [53], и наконец, найти явную формулу для этого символа [54].

Если $\lambda_F = \lambda$ — логарифм формальной группы F, обратная обобщенная функция Артина—Хассе определяется как

$$l_F(\psi) = \left(1 - \frac{a_1}{\pi} \blacktriangle - \cdots - \frac{a_h}{\pi} \blacktriangle^h\right)(\lambda \circ \psi).$$

Теорема 5 ([54, th 5.1]). *Обобщенный символ Гильберта* $(\, , \,)_F$ *задается явной формулой*

$$(\alpha, \beta)_F = \sum_{j=1}^{h}{}_{(F)} [\mathrm{tr}\ \mathrm{res}\ R_j]_F(\eta_j),$$

где R_j, $1 \leq j \leq h$, *взяты из некоторой алгебры рядов Лорана и определяются из уравнения*

$$\begin{pmatrix} \pi^n \lambda \circ \underline{\eta}_1 & \pi^n \lambda \circ \underline{\eta}_2 & \dots & \pi^n \lambda \circ \underline{\eta}_h \\ \pi^n \blacktriangle(\lambda \circ \underline{\eta}_1) & \pi^n \blacktriangle(\lambda \circ \underline{\eta}_2) & \dots & \pi^n \blacktriangle(\lambda \circ \underline{\eta}_h) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \pi^n \blacktriangle^{h-1}(\lambda \circ \underline{\eta}_1) & \pi^n \blacktriangle^{h-1}(\lambda \circ \underline{\eta}_2) & \dots & \pi^n \blacktriangle^{h-1}(\lambda \circ \underline{\eta}_h) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\Phi = l_F(\underline{\beta})\underline{\alpha}^{-1}\frac{d\underline{\alpha}}{dx} - \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{h} a_i \left(1 - \frac{\blacktriangle^i}{q^i}\right) \log \underline{\varepsilon} \cdot \frac{d}{dx} \blacktriangle^i(\lambda \circ \underline{\beta}).$$

Здесь $\underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\varepsilon}, \underline{\eta}_1, \dots, \underline{\eta}_h$ *определяются как степенные ряды, полученные разложением соответствующих элементов в степенные ряды по униформизующей* L, *а* ε — *главная единица, получающаяся при разложении* α *в произведение,* $\eta_1, \dots, \eta_h$ — *образующие модуля* W_F^n.

Немного отойдя от тематики явных формул до конца этого пункта, отметим продвижения в направлении геометрии формальных групп, связанные с применением идей, пришедших из теории Хонды.

Известно, что p-делимые группы над $\mathcal{O}_{K'}$ имеют схожее описание при малом ветвлении K' над K, т. е. когда индекс ветвления $e < p$ [55]. Естественно ожидать, что можно описать класс формальных групп, обобщающий формальные группы Хонды, который бы содержал в себе все формальные группы над кольцом целых локального поля с малым индексом ветвления. Это сделано в работе [56] с помощью обобщения понятия типа. Для формальных групп из этого класса строятся выделенные изогении, аналоги выделенных изогений формальных групп Любина—Тейта и Хонды. Кроме того, как и в случае формальных групп Хонды, получено явное описание их морфизмов в терминах их обобщенных типов.

Теория Хонды дает явное описание формальных групп над полем $\mathcal{O}_{K'}/\pi\mathcal{O}_{K'}$ и над кольцом $\mathcal{O}_{K'}$ с точностью до строгого изоморфизма посредством типов, т. е. некоторых квадратных матриц над некоммутативным кольцом $\mathcal{O}_{K'}[[\blacktriangle]]$, где $\blacktriangle a = a^{\varphi_{K'/K}}\blacktriangle$. Такой тип мы будем называть «левым типом», поскольку его действие на элемент $K'[[X]]$ соответствует умножению слева в случае, если элемент $K'[[X]]$ является p-типическим. Двойственное понятие «правого типа», соответствующего умножению справа, вводится в работе [57]. Здесь уже «правые типы» определяют формальные группы с точностью до редукции. В статье строится правый аналог модуля Дьедонне и доказываются эквивалентности, соответствующие классическим антиэквивалентностям между категориями формальных групп над совершенным полем и модулей Дьедонне, а также между категориями формальных групп над кольцом векторов Витта над ним и троек Фонтена [55, 58].

Существует два различных подхода к изучению деформаций формальных групп над конечным полем с точностью до $\star$-изоморфизма, под которым мы понимаем изоморфизм с тождественной редукцией. Первый из них восходит к работе Любина и Тейта [59], где была построена универсальная деформация формальной группы над конечным полем, т. е. формальная группа, которая представляет функтор деформаций над полными локальными алгебрами, тем самым обеспечивая пространство модулей для них. Другой подход основан на теории модулей Дьедонне и троек Фонтена [55]. Задачей статьи [60] является сравнение этих подходов и установление между ними связи. С помощью универсальной p-типической формальной группы, построенной Хазевинкелем [35], удается найти явную формулу для p-адического отображения периодов. Это позволяет описать действие группы автоморфизмов формальной группы на пространстве модулей, что обобщает аналогичный результат Гросса и Хопкинса [61], полученный для редукции формальной группы Артина—Хассе.

В своей работе [62] Хонда связал квадратичный закон взаимности с изоморфизмом между некоторыми формальными группами, что дало еще одно доказательство квадратичного закона взаимности. В работе [63] результат Хонды обобщен следующим образом. Для характера χ порядка m определены две одномерные формальные группы над $\mathbb{Z}[\xi]$, где ξ — первообразный корень из единицы m-й степени, и доказано существование целочисленного гомоморфизма между ними с линейным коэффициентом, равным сумме Гаусса для χ. Это позволяет вывести закон взаимности для символа вычета степени m, что в свою очередь дает доказательство кубического закона взаимности.

Явное описание формальной группы, представляющей модель Нерона алгебраического тора было впервые получено Денингером и Нартом [64]. Они показали, что для тора над $\mathbb{Q}$, расщепимого над абелевым слабо разветвленным расширением K, после обращения простых пополнение его модели Нерона оказывается изоморфным некоторой формальной группе, описанной в терминах представления Галуа, соответствующего тору. В статье [65] аналогичный результат получен без обращения простых. В этом случае пополнение модели Нерона оказывается изоморфно прямой сумме p-делимой группы размерности, совпадающей с размерностью максимального подтора, расщепимого над максимальным неразветвленным подрасширением K, и нескольких копий аддитивных формальных групповых схем. В частности, если $K/\mathbb{Q}_p$ неразветвлено, результат будет таким же, как и в [64]. Если $K/\mathbb{Q}_p$ вполне разветвлено, формальное пополнение изоморфно прямой сумме нескольких копий мультипликативной и аддитивной формальных групповых схем. Кроме того, показано, что формальное пополнение модели Нерона однозначно определяется ее редукцией. Наконец, главным результатом работы является явное описание формального пополнения модели Нерона в глобальном случае. Коэффициенты соответствующей формальной группы выражены в терминах образов автоморфизмов Фробениуса относительно представления Галуа в группе характеров тора. В качестве следствия показано, что существует естественное взаимно однозначное соответствие между группой морфизмов двух торов над $\mathbb{Q}$, расщепимых над абелевым слабо разветвленным расширением, и группой гомоморфизмов пополнений их моделей Нерона.

Хорошо известен факт, что для p-делимой группы высоты h и размерности d над совершенным полем k функтор деформации представим $\mathrm{Spf}_{\mathcal{O}}\mathcal{O}[[t_1, \ldots, t_{d(h-d)}]]$, где $\mathcal{O}$ — кольцо векторов Витта k. Используя философию Хазевинкеля [35] явных конструкций универсальных формальных групп, в статье [65] построено семейство универсальных деформаций G. А именно, доказано, что найдется конечное множество индексов Ψ такое, что для любой локальной $\mathcal{O}$-алгебры R с максимальным идеалом $\mathfrak{M}$ и для любой деформации F над R формальной группы Φ, соответствующей G, существует единственный набор $(\tau_\psi)_{\psi\in\Psi}$, $\tau_\psi \in \mathfrak{M}$, такой, что $F_{V(\Theta+\tau)}$ строго $\star$-изоморфна F, где τ — последовательность, чьи элементы все нулевые, кроме соответствующих Ψ, которые равны τ_ψ. Здесь F_V — универсальная d-мерная p-типическая формальная группа Хазевинкеля над полиномиальным кольцом $\mathbb{Z}[V]$ и V — бесконечный набор независимых переменных.

Как известно, формальные группы над кольцом векторов Витта конечного поля характеристики p можно описать с помощью троек Фонтена, состоящих из модуля логарифмов, модуля Дьедонне и морфизма между ними [58]. Работа [66] использует это описание для изучения категорных свойств формальных групп, в частности, описания явной конструкции ядер в этой категории. Этот результат затем применяется к формальному норменному гомоморфизму в случаях неразветвленного расширения $\mathbb{Q}_p$ и вполне разветвленного расширения степени, не превосходящей p. Подобное рассмотрение, примененное к глобальному расширению, позволяет установить существование строгого изоморфизма между формальным норменным тором и некоторой явно описываемой формальной группой, возникающей из L-рядов.

3.3.2. Явные формулы для полиномиального формального группового закона. В данном разделе предполагается, что поле K, являющееся одномерным или разнохарактеристическим многомерным локальным полем в зависимости от контекста, содержит корень p^m-й степени из единицы ζ. *Полиномиальным формальным групповым законом* называется групповой закон вида $F_c = F_c(X, Y) = X + Y + cXY$ для некоторой единицы поля c. Ввиду однопараметричности полиномиальных групповых законов, через $[a]_c$ обозначается a-изогения формальной группы F_c. Отметим, что автоморфизм Фробениуса в $T_K/\mathbb{Q}_p$ продолжается на кольцо рядов над $\mathcal{O}_T$ стандартным образом. А также стандартным образом в этой ситуации можно построить мультипликативные функции Артина—Хассе E и ℓ и проверить их основные свойства.

Классический символ Гильберта[5] относительно формальной группы F_c несложно задать с помощью стандартной локальной теории полей классов. Отображение Артина устанавливает изоморфизм между мультипликативной группой локального поля и группой Галуа максимального абелевого расширения

$$\rho_K \colon K^* \to \mathrm{Gal}(K^{ab}/K)\,.$$

Для элемента $\beta \in K$ введем обозначение $[p^m]_c^{-1}(\beta)$, символизирующее любое из решений уравнения $[p^m]_c(t) = \beta$. Тогда символ Гильберта $(\cdot,\cdot)_c$ относительно формальной группы F_c задается следующим образом:

$$(\alpha,\beta)_c = [p^m]_c^{-1}(\beta)^{\rho_K(\alpha)} -_{F_c} [p^m]_c^{-1}(\beta)\,,$$

где $\alpha \in K^*$, $\beta \in F_c(\mathfrak{m}_K)$. Легко видеть, что правая часть не зависит от конкретного выбора $[p^m]_c^{-1}(\beta)$ и лежит в $\langle\xi\rangle_c$, где ξ — корень изогении $[p^m]_c$. Из основных свойств отображения взаимности Артина немедленно следуют ключевые свойства символа $(\cdot,\cdot)_c$ — билинейность, символьное свойство и норменное свойство.

В многомерном случае аналогичное построение можно осуществить с помощью отображения Паршина—Като:

$$\rho_K \colon K_n(K) \to \mathrm{Gal}(K^{ab}/K)\,,$$

где K_n — K-группа Милнора.

Примарные элементы в данной ситуации строятся аналогично работам [3, 67].

3.3.3. Случай одномерного поля. Рассмотрим ниже построение явной формулы символа Гильберта для случая многочленной[6] формальной группы F_c и одномерного локального поля K.

Общий план построения полностью совпадает с наброском, данным во введении статьи.

Стандартным образом возможно задать функции Артина—Хассе относительно формальной группы F_c: E_c и ℓ_c, а также проверить свойства линейности и взаимнообратности этих функций.

Затем явной формулой задается спаривание $\langle\cdot,\cdot\rangle_c \colon \mathcal{H}_{\mathfrak{m}} \times \mathcal{H}_{\mathrm{c}} \to \mathcal{O}_T/p^m$ между формальной группой $\mathcal{H}_{\mathfrak{m}} = \langle t\rangle \times \mathfrak{R}_K \times (1 + t\mathcal{O}_{T_K}[[t]])$ и формальным $\mathbb{Z}_p$-модулем (относительно действия группы F_c) $\mathcal{H}_{\mathrm{c}} = t\mathcal{O}_{T_K}[[t]]$.

Определим формальное спаривание $\langle\cdot,\cdot\rangle_c$ следующим образом:

$$\begin{gathered}\langle\cdot,\cdot\rangle_c \colon \mathcal{H}_{\mathfrak{m}} \times \mathcal{H}_{\mathrm{c}} \to \mathcal{O}_{T_K}/p^m,\\ \alpha,\beta \mapsto \operatorname{res}\Phi(\alpha,\beta)\,/s_c \mod p^m,\end{gathered}$$

где $\Phi(\alpha,\beta) = \ell_c(\beta)\alpha^{-1}\partial\alpha - \ell(\alpha)\underline{c}^{-1}\partial\frac{\triangle}{p}\underline{c}\lambda_c(\beta)$, λ_c — логарифм формальной группы F_c.

[5]Ранее упоминавшийся обобщенный символ Гильберта является аналогом в случае неполиномиального закона F.

[6]Одномерный полиномиальный закон называется *многочленным*.

Следующим шагом является проверка важнейших свойств спаривания $\langle\cdot,\cdot\rangle_c$: во-первых, аналогов билинейности и символьного свойства классического символа Гильберта $(\cdot,\cdot)_c$, во-вторых, более технические свойства независимости от выбора ряда для второго аргумента (по модулю одинаковых значений) и независимости от замены переменных.

Утверждение (Билинейность). *Спаривание $\langle\cdot,\cdot\rangle_c$ $\mathbb{Z}_p$-линейно по обоим аргументам:*

$$\langle\alpha_1\alpha_2,\beta\rangle_c = \langle\alpha_1,\beta\rangle_c + \langle\alpha_2,\beta\rangle_c\,, \qquad \langle\alpha^a,\beta\rangle_c = a\,\langle\alpha,\beta\rangle_c\,,$$
$$\langle\alpha,\beta_1 +_{F_c}\beta_2\rangle_c = \langle\alpha,\beta_1\rangle_c + \langle\alpha,\beta_2\rangle_c\,, \qquad \langle\alpha,[a]_{F_c}(\beta)\rangle_c = a\,\langle\alpha,\beta\rangle_c\,,$$

где α, α_1, $\alpha_2 \in \mathcal{H}_{\mathfrak{m}}$, β, β_1, $\beta_2 \in \mathcal{H}_{\mathrm{c}}$, $a \in \mathbb{Z}_p$.

Утверждение (Символьное свойство). *Спаривание $\langle\cdot,\cdot\rangle_c$ удовлетворяет символьному свойству*

$$\left\langle\alpha,\underline{c}^{p^m-1}\alpha\right\rangle_c = 0, \quad \text{где} \quad \alpha\in t\mathcal{O}[[t]]\setminus\{0\}\,.$$

Важным шагом является построение примарных элементов и системы образующих Гензеля относительно формальной группы F_c.

Утверждение. *Пусть $a\in\mathcal{O}_T^*$, тогда элемент $\omega_c(a) = E_c(as_c(t))\big|_{t=\pi}$ является p^m-примарным относительно группы F_c. Более того, выполнено соотношение $(\pi,\omega_c(a))_c = [\operatorname{tr} a]_c(\xi)$.*

Утверждение. *Элементы*

$$\varepsilon_{i,\theta} = \theta c^{p^m-1}\pi^i,\ \text{где } \theta\in\mathfrak{R}, p\not|\, i, \qquad \omega_c(a),\ \text{где } a\in\mathcal{O},\ \operatorname{tr} a\not\equiv 0 \mod p$$

являются образующими элементами формального $\mathbb{Z}_p$-модуля $F_c(\mathfrak{m}_K)/[p^m]F_c(\mathfrak{m}_K)$. Более того, для символа Гильберта $(\cdot,\cdot)_c$ выполнены следующие соотношения:

$$(\pi,\varepsilon_{i,\theta})_c = 0, \quad (\pi,\omega_c(a)) = [\operatorname{tr} a]_c(\xi).$$

С помощью леммы о независимости от разложения по второму аргументу и леммы о замене переменных можно спроектировать спаривание $\langle\cdot,\cdot\rangle_c$ до спаривания между группой K^* и формальным $\mathbb{Z}_p$-модулем $F_c(\mathfrak{m}_K)$ со значениями в модуле корней изогении $[p^m]_{F_c}(X)$.

Введем спаривание

$$\{\cdot,\cdot\}_c\colon K^*\times F_c(\mathfrak{m}_K)\to\langle\xi\rangle\,,$$
$$\{\alpha,\beta\}_c = [\operatorname{tr}\langle\underline{\alpha},\underline{\beta}\rangle_c]_c(\xi),$$

где ряды $\underline{\alpha}\in\mathcal{H}_{\mathfrak{m}}$, $\underline{\beta}\in\mathcal{H}_{\mathrm{c}}$ таковы, что $\underline{\alpha}(\pi)=\alpha$, $\underline{\beta}(\pi)=\beta$.

Основным результатом работы [68] является доказательство совпадения построенного спаривания $\{\cdot,\cdot\}_c$ с классическим символом Гильберта $(\cdot,\cdot)_c$ и получение, тем самым, для символа $(\cdot,\cdot)_c$ явной формулы.

Теорема 6. *Для любых элементов $\alpha\in K^*$, $\beta\in F_c(\mathfrak{m}_K)$ значения спариваний $\{\cdot,\cdot\}_c$ и $(\cdot,\cdot)_c$ совпадают:*

$$\{\alpha,\beta\}_c = (\alpha,\beta)_c\,.$$

Замечание. Аналогичный результат можно установить в случае разнохарактеристического n-мерного локального поля посредством рассмотрения отображения Паршина—Като вместо классического отображения Артина и других многомерных аналогов одномерных объектов. Это было проделано в работах [69, 70] и [71].

3.4. Норменные ряды. При обобщении символа Гильберта на формальные группы, точным аналогом хорошо известного в K-теории соотношения Стейнберга $\{\alpha, 1-\alpha\} = 1$, должно быть равенство

$$(\alpha, -\alpha) = 0,$$

в котором первый аргумент — из мультипликативной группы, а второй принадлежит формальному модулю. В работе [72] И. Б. Фесенко и С. В. Востоковым было показано, что последнее равенство верно не для всех формальных групп. Это послужило поводом для изучения таких рядов $\varphi(x)$, для которых

$$(\alpha, \varphi(\alpha))_F = 0$$

выполняется при всех α из формального модуля. Последнее равенство означает, что α является нормой в расширении, полученном присоединением корня соответствующей изогении из $\varphi(\alpha)$. Ряды, удовлетворяющие последнему условию для всех конечных расширений поля K, называются *абсолютно норменными.* В работе [73] В. А. Колывагин изучал норменные ряды для мультипликативного аргумента, т. е. рассматривал соотношения вида $(r(\alpha), \alpha)_F = 0$.

В [74] с помощью явных формул спаривания Гильберта норменные ряды были исследованы для формальных групп Любина—Тейта. Далее, в [75] необходимые и достаточные условия норменности ряда были получены для формальных групп Хонды. В случае многомерного локального поля в работе [76] были изучены норменные ряды для спаривания с мультипликативной группой. Затем, в работе [77] результаты работы [76] были обобщены на случай формальных групп Хонды. Ниже мы приведем полученные условия норменности ряда для спаривания с формальным модулем Хонды, сохраняя обозначения пункта 3.3.1.

Теорема 7 ([75]). *Пусть $F \in \mathcal{O}'_{K'}[[X, Y]]$ — формальная группа Хонды высоты h. Ряд $\varphi(X) = X + \dots$ из кольца $\mathcal{O}_{K'}[[X]]$ является абсолютно норменным для F тогда и только тогда, когда ряд*

$$\left(1 - \frac{\blacktriangle}{\pi}\right)(\lambda_F \circ \varphi) = \sum_{m \geq 1} d_m X^m$$

удовлетворяет условию

$$v(d_m) \geq v_{q^h}(m)$$

(где $v_{q^h}(m)$ — q^h-порядок числа m) при всех $m \geq 1$.

3.5. Интегральная интерпретация явных формул и закона взаимности. Как было отмечено во введении, Л. Кронекер, вероятно, первым обратил внимание на сходство между алгебраическими числами и аналитическими функциями. Первые важные результаты в этом направлении были получены Д. Гильбертом, отметившим, что доказанный им результат о произведении символов норменного вычета, должен соответствовать интегральной теореме Коши (см. [78, стр. 367–368]). Далее, И. Р. Шафаревич в своей работе [2] предложил понимать локальный символ норменного вычета $\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{p}}\right)$, как абелев дифференциал $\alpha\,\mathrm{d}\,\beta$ в точке $\mathfrak{p}$. С. В. Востоков, следуя этой идеологии Гильберта—Шафаревича, показал, что классический закон взаимности

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_{p^n}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_{p^n}^{-1}=\prod_{p|n,\infty}\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{p}}\right)$$

является аналогом теоремы об абелевом интеграле, которая утверждает, что абелев интеграл дифференциальной формы на римановой поверхности равен сумме вычетов этой формы в особых точках.

Сформулируем этот результат. Пусть $n=p_1^{m_1}\cdots p_r^{m_r}$ — нечетное число, p_i — различные нечетные простые числа, $p=p_1$, $m=m_1$, $K=\mathbb{Q}(\zeta)$ — круговое поле для n, где $\zeta=\zeta_n$ — первообразный корень n-й степени из единицы. Также $\zeta_i:=\zeta_{p_i^{mi}}, \pi_i:=\zeta_i-1$, $n_i:=n/p_i^{m_i}$, а a_i, b_i — фиксированный набор целых чисел, таких что $a_in_i+b_ip_i^{m_i}=1$, $i=1,\ldots,r$.

Далее рассмотрим набор переменных $X_1,\ldots,X_r$, и для каждого элемента $\gamma\in\mathbb{Z}(\zeta)$ взаимно простого с n зафиксируем многочлен $\underline{\gamma}:=\underline{\gamma}(X_1,\ldots,X_r)$ с коэффициентами из $\mathbb{Z}(\zeta)$, такой что $(\underline{\gamma}(0,\ldots,0),n)=1$ и $\underline{\gamma}(\pi_1,\ldots,\pi_r)=\gamma$. Теперь определим семейство операторов Δ_i:

$$\Delta_i(X_j):=\begin{cases}X_i^{p_i}, & i=j,\\ (1+X_j)^{p_i}-1, & i\neq j.\end{cases}$$

С их помощью можно построить для рассмотренных выше многочленов $\underline{\gamma}$ функции l_i по правилу

$$l_i(\gamma):=\frac{1}{p}\log\left(\frac{\underline{\gamma}^{p^i}}{\underline{\gamma}^{\Delta_i}}\right).$$

Пусть α, β лежат в кольце $\mathbb{Z}[\zeta]$, причем α, β и n попарно взаимно просты. Тогда определен n-й символ степенного вычета $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_n$, и имеет место следующая формула для сложения степенных вычетов.

Теорема 8 (С. В. Востоков [79]). *Имеет место равенство*

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_n\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_n^{-1}=\zeta^{\sum\limits_{i=1}^{r}\operatorname{res}S_i},$$

где

$$S_i=n_ib_i\operatorname{Tr}\left(\frac{\Phi(\underline{\alpha},\underline{\beta})}{\underline{\zeta}_i^{p_i^{m_i}}-1}\right)\Bigg|_{X_k=\pi_k,k\neq i},$$

$$\Phi(\underline{\alpha},\underline{\beta})=l_i(\underline{\alpha})\frac{\partial}{\partial X_i}l_i(\underline{\beta})-l_i(\underline{\alpha})\underline{\beta}^{-1}\frac{\partial}{\partial X_i}(\underline{\beta})+l_i(\underline{\beta})\underline{\alpha}^{-1}\frac{\partial}{\partial X_i}(\underline{\alpha}).$$

В работе [79] можно найти подробное описание всех необходимых конструкций и проверку их корректности.

В правой части основной формулы теоремы показатель — это сумма вычетов дифференциальных форм S_i в особых точках, то есть в знаменателях $\underline{\zeta}_i^{p_i^{m_i}}-1$ (так как $\zeta_i^{p_i^{m_i}}-1=0$).

Таким образом, чтобы аналогия с теоремой об абелевом интеграле была полностью установлена, необходимо правильно определить аналог интеграла, соответствующего произведению степенных вычетов. Для этого рассмотрим следующий пример: пусть $n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_r$ — свободное от квадратов нечетное число. Тогда (см. [79]) дифференциальные формы S_i являются не более, чем рядами, и общей дифференциальной формой будет $S = \log(\underline{\alpha}) \log(\underline{\beta})$, а левая часть формулы примет вид

$$\int \frac{\log(\underline{\alpha})\, \mathrm{d} \log(\underline{\beta})}{\underline{\zeta}^n - 1}.$$

Эта задача была решена М. А. Ивановым и С. В. Востоковым для кругового поля m-х степеней, то есть в случае $n = p^m$, в работах [80, 81]. В этом случае правая часть формулы принимает вид

$$\zeta^{\operatorname{res} \frac{\Phi(\underline{\alpha}, \underline{\beta})}{\underline{\zeta}^{p^m} - 1}},$$

а левую часть можно будет интерпретировать как интеграл Шнирельмана (см. [82]):

$$\int\limits_{0,\pi} \frac{\Phi(\underline{\alpha}, \underline{\beta})}{\underline{\zeta}^{p^m} - 1}.$$

4. Приложения явных формул. ***4.1. Модули Галуа.*** Для расширения Галуа числовых полей L/K с группой Галуа $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ можно рассмотреть группу L^* как $K[G]$-модуль, где K действует посредством умножения, а группа G — естественным образом. Тогда возникает вопрос о строении L^* как $K[G]$-модуля. Подобным образом можно рассматривать как мультипликативную, так и аддитивную структуру на кольце целых $\mathcal{O}_L$ поля L, простых идеалах $\mathcal{O}_L$, в том числе на единственном максимальном идеале $\mathfrak{m}_L$ в случае, когда поле L локально. Обобщая последний пример на произвольный формальный групповой закон F, мы интересуемся структурой $F(\mathfrak{m}_L)$ как $\mathrm{End}_{FGL}(F)[G]$-модуля.

Отметим, что задача выяснения структуры мультипликативных модулей является классической и главные результаты в этом направлении получены Д. К. Фаддеевым, З. И. Боревичем, А. В. Яковлевым, С. В. Востоковым [83–86].

За последние годы было получено много результатов в этом направлении С. В. Востоковым и его учениками. Ниже мы осветим основные направления современных исследований и результаты в каждой из областей.

4.1.1. Аддитивные модули. В работах С. В. Востокова, М. В. Бондарко и И. Б. Жукова [87–90] рассматривается задача разложимости аддитивных идеалов внутри абелева расширения Галуа числовых дискретно-нормированных полей L/K.

Рассмотрим случай абелева p-расширения локальных полей L/K, являющихся расширениями $\mathbb{Q}_p$, $p > 2$, с группой Галуа G. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 9. *В поле L существуют дробные идеалы, которые разложимы как $\mathcal{O}_K[G]$-модули тогда и только тогда, когда индекс ветвления расширения L/K, равный p^m, $m > 1$, делит дифференту рассматриваемого расширения $\mathfrak{D}_{L/K}$.*

Данный результат был получен в работе [89], более сильная его версия содержится в работе [87].

Теорема 10. *Идеал $\mathfrak{m}_L^{\varkappa}$ разложим как $\mathcal{O}_K[G]$-модуль тогда и только тогда, когда*

1) *индекс ветвления расширения p^m делит дифференту $\mathfrak{D}_{L/K}$;*

2) *или $L = L_1(\sqrt[p]{\pi_{K_1}})$, где π_{L_1} есть униформизирующая поля L_1 такого, что $[L : L_1] = p$, или же $\varkappa = \varkappa_0 + \varkappa_1 p + \ldots$ для p-адического разложения $\varkappa$ либо $\varkappa_0 = 0$, либо для некоторого $1 \geq i \geq m-1$ $\varkappa_i > \overline{e}$, где $\overline{e}$ есть вычет $e \mod p$, лежащий между 0 и $p-1$.*

Окончательный результат этой серии работ содержится в [90]. Сформулируем его. Пусть $\mathfrak{o}$ есть дедекиндово кольцо нулевой характеристики, K — его поле отношений, L/K — абелево расширение Галуа нечетной степени. Также пусть расширения соответствующих полей вычетов сепарабельны. Тогда верна следующая теорема.

Теорема 11. *В расширении L/K существуют $\mathrm{Gal}(L/K)$-инвариантные идеалы, разложимые как $\mathfrak{o}[\mathrm{Gal}(L/K)]$-модули тогда и только тогда, когда существует подрасширение F расширения L/K, не равное L, такое, что степень $[L : F]$ делит дифференту $\mathfrak{D}_{L/F}$.*

4.1.2. Формальные модули Галуа. В случае произвольных формальных групповых законов, даже предположительные ответы существенно сложнее, поскольку они должны учитывать арифметическую структуру формального группового закона.

Наиболее общий результат получен в работе [91].

Теорема 12. *Пусть K — конечное расширение поля $\mathbb{Q}_p$ с индексом ветвления $e_0 = e(K/\mathbb{Q}_p)$, и пусть L/K — нормальное расширение без высшего ветвления с группой Галуа $G = Gal(L/K)$. Рассмотрим формальную группу $F(X,Y)$ конечной высоты h, заданную над кольцом целых $\mathcal{O}_K$ поля K. Пусть $[p]_F(X)$ — эндоморфизм умножения на p формальной группы F, и пусть $p^{m_1}, p^{m_2}, \ldots, p^{m_{k+1}} = p^h$ — инварианты формальной группы F, отвечающие координатам вершин многоугольника Ньютона изогении $[p]_F(X)$. Тогда, если выполняются следующие условия:*

1) *L не содержит нетривиальных корней изогении $[p]_F(X)$,*

2) *для любого j из $\{1, 2, \ldots, k+1\}$ верно $\frac{e}{e_0} | : (p^{m_j} - 1)$,*

3) *для любого i из $\{1, 2, \ldots, k+1\}$ сравнение*

$$\theta \equiv aX^{p^{m_{i-1}}} + bX^{p^{m_i}} \mod \Pi$$

имеет решение $x \in \mathfrak{R}_L$ для любых $\theta, a, b \in \mathfrak{R}_L$,

то $F(\mathfrak{m}_L)$ является свободным $\mathbb{Z}_p[G]$-модулем ранга ne_0, где $n = (\mathcal{O}_{T_K} : \mathbb{Z}_p)$. Аналогичный результат верен и для $F(\mathfrak{m}_L^i)$.

Потенциально самым технически сложным является случай p-расширения. Известны результаты только в неразветвленном случае [92], что является следствием тривиальности группы $H^1(\mathrm{Gal}(L/K), F(\mathfrak{m}_L))$. Приведем основную теорему работы [92].

Теорема 13. *Рассмотрим конечное циклическое p-расширение L/K, $F(X,Y)$ есть формальный групповой закон Любина—Тейта над кольцом $\mathcal{O}_{K'}$, где K/K' есть конечное расширение степени n. Предполагается, что поля L и K имеют одинаковую степень иррегулярности s относительно группового закона F. Тогда для $\mathcal{O}_K[Gal(L/K)]$-модуля $F(\mathfrak{m}_L)$ есть система образующих $\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}, \xi, \omega$ с единственным соотношением*

$$[\sigma -_F 1](\omega) = [\pi^s](\xi),$$

где σ есть образующая группы $Gal(L/K)$.

5. Классификация формальных групповых законов. Классификация формальных групповых законов является естественной задачей ввиду того, что над полями характеристики ноль некоммутативные формальные группы находятся во взаимно однозначном соответствии с алгебрами Ли. Поэтому данная задача продолжает весьма нетривиальную задачу классификации групп Ли в нулевой характеристике.

Но классификация коммутативных групповых законов уже над полями положительной характеристики несколько сложнее, нежели над полями нулевой характеристики (см. [93] и [94]), а над произвольными кольцами тем более. Отметим сразу, что формальные групповые законы, а точнее соответствующие им формальные групповые схемы, допускают естественное обобщение — p-делимые группы, называемые также группами Барсотти—Тейта.

В данном направлении получены значительные результаты одним из учеников С. В. Востокова — М. В. Бондарко. Все его результаты по данной тематике могут быть найдены в докторской диссертации [21]. Далее мы перечислим с указанием ссылок самые яркие из них.

В работе [95] С. В. Востоковым и М. В. Бондарко получена явная классификация формальных групповых законов над кольцами целых полных дискретно-нормированных полей характеристики 0 с совершенным полем вычетов характеристики p. Каждой группе ставится в соответствие два инварианта $((u(F), \mathrm{res}(F)))$, которые классифицируют их с точностью до изогении. Также описаны изогенные, но неизоморфные формальные группы [96].

Данная классификация продолжена в работах [97] и [98], где опускается требование совершенности поля вычетов.

Такого рода классификационные результаты широко применимы, в том числе для иследования редукций абелевых многообразий. Приведем здесь два основных результата, которые могут быть найдены в [99].

Теорема 14. *Пусть V — m-мерное абелево многообразие над полем k, имеющее полустабильную редукцию над расширением K/k. Тогда V имеет полустабильную редукцию над k, если и только если для некоторой конечной групповой схемы H над $\mathcal{O}_k$ выполнено $TH_{\mathcal{O}_K} \supset (\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)^m$ (т. е. существует вложение), где TH обозначает касательный модуль к схеме H.*

Теорема 15. *1. Пусть V — m-мерное абелево многообразие над k, имеющее хорошую редукцию над K. Тогда следующие условия равносильны:*

(a) V имеет хорошую невырожденную редукцию над k;

(b) для некоторой групповой схемы $H/\mathcal{O}_k$ мультипликативного типа (т. е. двойственной к этальной) выполнено $TH_{\mathcal{O}_K} \cong (\mathcal{O}_K/p^{l'}\mathcal{O}_K)^m$, при этом существует мономорфизм $g : H_k \to \mathrm{Ker}[p^{l'}]_{V,k}$;

(c) для некоторой схемы $H_k \subset \mathrm{Ker}[p^{l'}]_{V,k}$ и поля M, неразветвленного над k, выполнено $H_M \cong (\mu_{p^{l'},M})^m$ (здесь $\mu_{p^{l'}}$ — групповая схема корней из единицы степени $p^{l'}$).

2. Пусть V — m-мерное абелево многообразие над k, имеющее полустабильную редукцию над K. Тогда следующие условия равносильны:

(a) V имеет невырожденную редукцию над k;

(b) для некоторой групповой схемы $H/\mathcal{O}_k$ мультипликативного типа существует вложение H_k в $\mathrm{Ker}[p^{l'}]_{V,k}$ и $(\mathcal{O}_K/p^{l'}\mathcal{O}_K)^m$ в $TH_{\mathcal{O}_K}$;

(c) для некоторой схемы $H_k \subset \mathrm{Ker}[p^{l'}]_{V,k}$ и поля M, неразветвленного над k, выполнено $H_M \cong (\mu_{p^{l'},M})^m$.

6. Явные конструкции расширений. Задача явного описания отображения взаимности делает актуальной задачу явного построения циклических расширений степени p^n ($n \geq 1$) полного дискретно нормированного поля K характеристики 0, не содержащего первообразный корень степени p^n из единицы.

При $n = 1$ такие расширения могут быть заданы (как и при $\mathrm{char}\, K = p$) с помощью многочленов Артина—Шрайера [100]; компактное доказательство этого факта, использующее формальные группы Любина—Тейта, было получено С. В. Востоковым [101].

Известно, что в некуммеровом случае не любое циклическое расширение L_1/K степени p может быть погружено в некоторое циклическое расширение L_2/K степени p^2 (см. [102]). Однако при условии на скачок ветвления $s(L_1/K) < e/(p-1)$ такое L_2/K существует. В [103, § 3] было показано, что при несколько более сильном условии $s(L_1/K) < pe/(p^2-1)$ и L_1/K задано присоединением корня многочлена $X^p - X - a$, расширение L_2/K можно задать уравнениями, идентичными уравнениям в характеристике p для расширения, задаваемого вектором Витта $(a, 0)$. Тогда L_2/K — циклическое расширение степени p^2, содержащее L_1/K. В [104] были получено несколько более сложное уравнение, задающее x_1 в общей ситуации (т. е. при $s(L_1/K) < e/(p-1)$).

Кроме того, в [103, § 4] (см. также [105]) для случая *абсолютно неразветвленного* поля K было построено семейство циклических p-расширений, которые в композите образуют максимальное абелево p-расширение K. Такое семейство также можно рассматривать как аналог расширений в простой характеристике, задаваемых всевозможными векторами Витта вида $(a, 0, \ldots, 0)$.

7. Структурная теория высших локальных полей. ***7.1. Устранение высшего ветвления.*** Пусть L/K — произвольное конечное расширение Галуа полных дискретно нормированных полей с несовершенным полем вычетов характеристики $p > 0$, и пусть k — т. н. подполе констант, то есть максимальное полное подполе K с совершенным полем вычетов. (Если $\mathrm{char}\, K = 0$, то такое подполе определено однозначно.) По теореме Эппа об устранении высшего ветвления найдется конечное расширение k'/k, для которого $k'L/k'K$ слабо неразветвлено, т. е. $e(k'L/k'K) = 1$. В работе [109] доказан ряд уточненных версий этой теоремы.

Конечное расширение поля K будем называть *почти константным*, если его можно вложить в композит неразветвленного и константного (т. е. получаемого присоединением элементов, алгебраичных над k), а *инфернальным* — расширение, не имеющее собственных почти константных подрасширений. Для любого конечного расширения L/K однозначно определено промежуточное поле F такое, что F/K почти константное, а L/F инфернальное. Центральную роль играет следующая теорема.

Теорема 16. *Пусть K — полное дискретно нормированное поле, k — его подполе констант, C/k — некоторое глубоко разветвленное расширение. Тогда для любого инфернального расширения L/K существует конечное подрасширение k'/k в C/k такое, что $k'L/k'K$ свирепо разветвлено.*

Здесь под глубоко разветвленным расширением подразумевается бесконечное расширение, у которого есть конечные подрасширения либо сколь угодно большой глубины ветвления, либо сколь угодно большой несепарабельной степени. Этот класс включает круговые p-расширения и вообще любые арифметически проконечные расширения.

Эта теорема интересна сама по себе, так как обеспечивает большую свободу выбора расширения k'/k в теореме Эппа. В качестве следствия мы получаем усиление теоремы Эппа.

Теорема 17. *Пусть L/K — любое конечное разрешимое расширение полных дискретно нормированных полей, k — подполе констант поля K. Тогда существует конечное разрешимое расширение k'/k такое, что $k'L/k'K$ слабо неразветвлено, т. е. $e(k'L/k'K) = 1$.*

Пусть $e_L = p^h \cdot e_t$, где $(p, e_t) = 1$. Тогда найдется искомое k'/k, являющееся композитом циклического расширения и некоторого расширения степени, не превосходящей $(p-1)^{h+1}[L:K]e_K$.

Был также исследован вопрос о том, насколько простой вид можно придать расширению k'/k, если мы можем менять подполе констант (это возможно при $\operatorname{char} K > 0$). Доказано, что при наличии в K достаточно большого числа корней из 1 степеней, взаимно простых с p, k'/k может быть выбрано циклическим.

7.2. Классификационные результаты для высших локальных полей. Теория устранения высшего ветвления служит основой для доказательства классификационной теоремы для высших локальных полей. Полное дискретно нормированное поле K с подполем констант k будем называть *стандартным*, если $e_{K/k} = 1$. В частности, n-мерное локальное поле K характеристики 0 с первым полем вычетов характеристики $p > 0$ будет стандартным, если и только если оно изоморфно полю вида $F\{\{t_1\}\} \ldots \{\{t_{n-1}\}\}$, где F — обычное (одномерное) локальное поле (см. [107, § 1] или [108]); при этом $F = k$. Классификационная теорема утверждает, что любое полное дискретно нормированное поле является конечным расширением стандартного (тривиальная часть) и обладает конечным расширением, являющимся стандартным полем (нетривиальная часть).

В работе [109] были получены следующие два уточненных варианта этой теоремы.

Теорема 18. *Существует константное расширение L/K такое, что L/K — стандартное поле. При этом можно считать $L = L_1L_2$, где L_1/K — циклическое p-расширение, и $[L_2 : K]$ делит $(p-1)^{h+1}e(K/k)$, где $e_L = p^h \cdot e_t$ и $(p, e_t) = 1$. Кроме того, можно считать $L_1 = lK$, где l/k — конечное подрасширение заданного константного $\mathbb{Z}_p$-расширения C/k, не являющегося неразветвленным.*

Теорема 19. *Пусть k — подполе констант K, C/k — глубоко разветвленное расширение k. Тогда существует конечное подрасширение l/k в C/k такое, что lK — почти стандартное.*

Под *почти стандартным* понимается поле, некоторое конечное неразветвленное расширение которого — стандартное поле.

В [110] устанавливается связь между описанным выше подходом к классификации высших локальных полей и подходом Курихары [111], развитым далее в работах Ивановой [112, 113].

Для любого полного дискретно нормированного поля K характеристики 0 с произвольным полем вычетов простой характеристики можно определить целочисленный инвариант $\Gamma(K)$, который лежит в основе введенного Курихарой разбиения таких полей на два типа. Поле K относится к типу I, если и только если $\Gamma(K) > 0$. При этом для почти стандартных полей и только для них выполнено $\Gamma(K) = +\infty$.

В [110] доказано (при небольших ограничениях на K), что для двумерного локального поля K смешанной характеристики типа I найдется оценка снизу на степень расширения подполя констант l/k такого, что lK — стандартное. Для логарифма этой степени существует оценка, линейная по отношению к $\Gamma(K)$ с коэффициентом, зависящим только от $e_{K/k}$.

7.3. Строение топологических K-групп. Высшая локальная теория полей классов описывает строение абелевых расширений n-мерного локального поля K с конечным (или совершенным, но не p-замкнутым) последним полем вычетов в терминах группы $K_n^{\mathrm{top}}K$, которая представляет собой отделимое пополнение n-й K-группы Милнора $K_n^M K$ поля K по отношению к определенной топологии, отражающей структуру n-мерного локального поля. (Алгебраически $K_n^{\mathrm{top}}K$ совпадает с факторгруппой $K_n^M K$ по подгруппе из всех бесконечно делимых элементов.) Важной подгруппой в $K_n^{\mathrm{top}}K$ служит $U(1)K_n^{\mathrm{top}}K$, которая порождена всеми символами вида $\{u, x_2, \ldots, x_n\}$, где u — главная единица по отношению к нормированию ранга 1. Эта подгруппа отвечает за дикие и свирепые расширения K. При этом строение факторгруппы $K_n^{\mathrm{top}}K/U(1)K_n^{\mathrm{top}}K$, отвечающей за неразветвленные и ручные расширения, полностью выяснено. В работе [114] получен следующий результат о строении $U(1)K_n^{\mathrm{top}}K$.

Обозначим через $\mathcal{T}_K$ топологическое замыкание кручения в $U(1)K_n^{\mathrm{top}}K$.

Теорема 20. *Пусть $K = k\{\{t_1\}\}\ldots\{\{t_{n-1}\}\}$ — разнохарактеристическое стандартное n-мерное локальное поле,* $\operatorname{char}\overline{K} > 2$, *$B$ — топологический базис $\mathbb{Z}_p$-модуля U_k (по модулю кручения). Тогда $\mathbb{Z}_p$-модуль $U(1)K_n^{top}K/\mathcal{T}_K$ обладает топологическим базисом вида $\mathcal{B} = \{\,\{u, t_1, \ldots, t_{n-1}\}\,|u \in B\}$.*

Замечание. Если последнее поле вычетов поля K конечно, то $\mathcal{B}$ конечен, и можно опустить слово «топологический» в обоих местах. В качестве следствия получается, что подгруппа $\mathcal{T}_K$ соответствует (в смысле теории полей классов) композиту всех расширений с группой Галуа $\mathbb{Z}_p$ и максимального ручного абелева расширения.

В работе [115] было получено усиление теоремы 20: условие $e_{K/k} = 1$ заменено на $p \nmid e_{K/k}$. Там же показано, что последнее условие не может быть опущено даже в случае почти стандартного поля.

Теорема 21 ([116]). *Предположим, что последнее поле вычетов поля K конечно. Тогда ранг $U(1)K_n^{top}K/T_K$ равен $[k : \mathbb{Q}_p]$.*

Также в [114] была полностью описана структура $U(1)K_n^{\mathrm{top}}K$ (и тем самым всей $K_n^{\mathrm{top}}K$) для абсолютно неразветвленных K.

8. Теория ветвления высших локальных полей. Для конечного расширения Галуа L/K обычных локальных полей, то есть полных дискретно нормированных полей с совершенным полем вычетов, на группе Галуа $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ определена фильтрация ветвления $G = G_{-1} \supset G_0 \supset G_1 \supset \ldots$, которая обладает многими замечательными свойствами ([117, § 4], более полный список можно найти в [118, § 3] или [119]):

1) предсказуемое поведение при переходе к подгруппам;

2) предсказуемое поведение при переходе к факторгруппам с возможностью определить «верхнюю» фильтрацию для бесконечного расширения;

3) почти предсказуемое поведение при переходе к композиту;

4) фильтрация ветвления восстанавливается по действию нормы $N_{L/K}$ на фильтрацию на группе единиц;

5) фильтрация ветвления восстанавливается (соотв. частично восстанавливается) по действию вложения $i_{L/K}$ на фильтрацию на $K/\mathfrak{p}(K)$ (соотв. $K^*/(K^*)^p$) при $\mathrm{char}\, K = p$ (соотв. $\mathrm{char}\, K = 0$);

6) теорема Хассе—Арфа;

7) существование представлений Артина и Суона;

8) нормирование дифференты может быть вычислено через скачки фильтрации ветвления;

9) отображение взаимности отождествляет «верхнюю» фильтрацию ветвления с фильтрацией на группе единиц U_K;

10) «анабелева гипотеза Гротендика»: изоморфизм между абсолютными группами Галуа двух локальных полей, сохраняющий фильтрацию ветвления, определяет изоморфизм между локальными полями;

11) информации, содержащейся в фильтрации ветвления, достаточно для определения локальных членов в формулах Римана—Гурвица и Гротендика—Огга—Шафаревича.

При формальном применении классического определения мы получаем фильтрацию ветвления, не обладающую никакими из указанных свойств (или их разумных аналогов), кроме тривиального свойства 1. Альтернативный подход связан с требованием выполнения свойств, ожидаемых от «верхней» фильтрации: свойств 2, 7, 8, 9, 11. Как было показано в работах Като и Фесенко, для абелевых расширений многомерных локальных полей (по крайней мере, с конечным полем вычетов) можно обеспечить выполнение большинства из этих свойств, использовав свойство 9 в качестве определения. Общее определение в этом направлении, рассматриваемое нынче как стандартное, было получено в работах А. Аббеса и Т. Саито [120, 121] с использованием техники жесткой аналитической геометрии. Это позволило, в частности, доказать аналог формулы Гротендика—Огга—Шафаревича в широком контексте.

Однако, данный подход не позволяет получить «полного» описания ветвления данного расширения, позволяющего, например, определять ветвления композита по ветвлению исходных расширений или вычислять нормирование дифференты. Как показывают примеры (см., например, [118, § 4] и ссылки там), подобное полное описание требует введения большего числа инвариантов. В частности, ветвление расширения простой степени не может описываться лишь одним числом.

Опишем разработанные нами несколько подходов, предоставляющих дополнительную информацию о ветвлении в случае несовершенного поля вычетов.

8.1. Подход на основе устранения высшего ветвления. Данный подход был реализован в работе [122] (см. также обзор [123] и [118, § 7] или [119]). В его основе лежит выделение в произвольном конечном расширении Галуа L/K максимального почти константного подрасширения F/K (см. подраздел 7.1). Группу Галуа F/K (после неразветвленной замены базы) можно отождествить с группой Галуа соответствующего расширения подполя констант и перенести туда классическую теорию ветвления. Аналогично, ввиду теории устранения высшего ветвления группу Галуа инфернального расширения L/F (после константной замены базы) можно отождествить с группой Галуа некоторого свирепого расширения L'/F'. Если предположить, что изучаемые поля «двумерные» ($[\overline{K}^p : \overline{K}] = p$), кольцо $\mathcal{O}L'$ как $\mathcal{O}F'$-алгебра будет порождаться одним элементом. В силу этого на L'/F' возникает теория ветвления «с классическими свойствами», которую можно перенести на L/F (это было сделано также в [124]).

В результате на произвольной конечной группе Галуа возникает фильтрация ветвления, проиндексированная специальным множеством

$$\mathbb{I} = \{-1, 0\} \cup \{(\mathbf{c}, i) | i \in \mathbb{Q},\, i > 0\} \cup \{(\mathbf{c}, \infty)\} \cup \{(\mathbf{i}, i) | i \in \mathbb{Q},\, i > 0\}.$$

Она обладает хорошими функториальными свойствами, что позволяет, в частности, определить «верхнюю» фильтрацию на бесконечных группах Галуа. В [122] был проверен также аналог свойства 9 для случая двумерного локального поля простой характеристики с конечным полем вычетов, а именно согласованность (в смысле высшей теории полей классов) с несложно определяемой фильтрацией на $K_2^{\mathrm{top}}K$.

Данный подход к теории ветвления в работах В. А. Абрашкина был распространен на n-мерные локальные поля. Это дало возможность сформулировать и доказать для высших локальных полей аналог анабелевой гипотезы Гротендика [125–127]. Также Абрашкин использовал данный подход для построения аналога функтора поля норм для многомерных локальных полей [128].

8.2. Элементарно абелев кондуктор. Этот подход основан на наблюдении, сделанном еще в [129]: двумерное локальное поле K можно превратить в поле с совершенным полем вычетов (ценой потери дискретности), взяв максимальное абелево расширение экспоненты p. В работе [130] было показано, что мы получим поле с совершенным полем вычетов, взяв композит расширений степени p со скачком ветвления, не превосходящим заданного $i > 0$. При этом возникает бесконечное расширение K_i/K с конечной глубиной ветвления.

В статье [131] доказывается, что для произвольного конечного расширения L/K глубина ветвления расширения LK_i/K_i при достаточно больших i будет равняться нулю. Минимальное такое i представляет собой новый инвариант ветвления для L/K, который можно рассматривать как аналог кондуктора и использовать для определения фильтрации ветвления в общем случае.

8.3. Аппроксимационный подход. Все наблюдаемые «странности» теории ветвления в случае несовершенного поля вычетов проявляются уже при рассмотрении элементарно абелевых расширений. Поэтому, возможно, изучение теории ветвления в общем случае может быть сведено к случаю абелевых расширений n-мерных локальных полей, для которых вся информация о ветвлении отражена в строении $K_n^{\mathrm{top}}K$.

Заметим, что в классическом случае для любого конечного расширения L/K можно (после замены K на ручное расширение) подобрать абелево (а в случае простой характеристики даже элементарно абелево) расширение L'/K так, что скачки ветвления L'/K с учетом кратностей будут близки к скачкам ветвления L/K с заданной точностью. Соответственно, будут близки инварианты ветвления расширений, получаемые из L'/K и L/K заменой базы и т. п. Мы предполагаем, что такое приближение неабелевых расширений абелевыми может быть осуществлено и в неклассическом случае (т. е. при несовершенном поле вычетов), но для этого необходимо ввести адекватное понятие близости.

В работе [132] введено понятие расстояния между расширениями данного полного дискретного нормированного поля (в аспекте теории ветвления). При этом доказано, что если расстояние между двумя константными расширениями равно нулю, то у них совпадают соответствующие функции Хассе—Эрбрана. Обратное пока установлено только для расширений степени p.

8.4. Метод струй кривых. Один из подходов в изучении теории ветвления для алгебро-геометрических объектов размерности больше 1 (например, алгебраических поверхностей или спектров двумерных локальных колец) состоит в ограничении изучаемых морфизмов (или конструктивных этальных пучков) на подсхемы размерности 1 (кривые). Идея восходит к письму Делиня Иллюзи от 28.11.1976 и развивалась в [133] (с недавним обобщением в [134]), а также в [135] и [136].

Для того чтобы применять этот подход при изучении ветвления конечного расширения n-мерных локальных полей, необходимо связать такое расширение с конечным гомоморфизмом (как можно более простого вида) между регулярными n-мерными локальными кольцами, т. е. построить для него полуглобальную модель. Некоторые результаты в этом направлении приведены в [137] (см. также [118, п. 8.2] или [119]).

В работе [138] (см. также [118, пп. 9.1, 9.2] или [119]) предложенный метод применяется к ситуации т. н. накрытий Артина—Шрайера, а именно морфизмов $f : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$, A — регулярное двумерное локальное кольцо с полем вычетов k, $K = \operatorname{Fr} A$, L/K — циклическое расширение степени p, B — целое замыкание A в L. Предполагается, что дискриминантный дивизор $\mathcal{B}_f$ (образ дивизора ветвления в $\operatorname{Spec} A$) представляет собой дивизор со (строго) нормальными пересечениями.

Положим

$$U_A = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}_1 A | A/\mathfrak{p} \text{ регулярно, } \mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_d\},$$

где $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_d$ $(d = 1, 2)$ — простые идеалы, соответствующие компонентам $\mathcal{B}_f$. Таким образом, U_A — множество ростков кривых, не являющихся компонентами $\mathcal{B}_f$ (но не обязательно трансверсальных им).

Пусть $\mathfrak{p} \in U_A$. Рассмотрим $D_\mathfrak{q}$, подгруппу разложения в $\operatorname{Gal}(L/K)$ в точке $\mathfrak{q}$, где $\mathfrak{q}$ — простой идеал кольца B над $\mathfrak{p}$. Поскольку L/K не разветвлено в $\mathfrak{p}$, имеем $D_\mathfrak{q} \cong \operatorname{Gal}(L(\mathfrak{q})/K(\mathfrak{p}))$, где $K(\mathfrak{p})$ — поле частных кольца $A/\mathfrak{p}$, а $L(\mathfrak{q})$ — поле частных кольца $B/\mathfrak{q}$. Через $h_\mathfrak{p}(L/K)$ обозначим соответствующий скачок ветвления.

В [138] доказано, что $h_\mathfrak{p}(L/K)$ зависит только от струи некоторого порядка, которой принадлежит росток $\mathfrak{p}$, причем есть оценка для порядка струи, линейная по отношению к индексу пересечения $\mathfrak{p}$ с компонентой $\mathcal{B}_f$ (обозначим его $r(\mathfrak{p})$).

На пространстве струй заданного порядка ростков кривых с заданным $r(\mathfrak{p})$ можно ввести структуру аффинного пространства и тем самым топологию Зарисского.

Доказано, что скачок ветвления задает полунепрерывную функцию на этом пространстве (т. е. условия вида $h_{\mathfrak{p}}(L/K) \le s$ определяют замкнутые подмножества). Далее, конечен супремум значений $h_{\mathfrak{p}}(L/K)$ при заданном $r(\mathfrak{p}) = r$ (обозначим его $h_r(L/K)$). Наконец, предположим, что A — G-кольцо. Тогда последовательность $(h_r(L/K)/r)_r$ сходится.

Наконец, в работе [139] результат о полунепрерывности обобщается на другой класс гомоморфизмов колец (см. также [118, п. 9.3] или [119]).

Пусть A, B — полные двумерные регулярные локальные кольца с общим алгебраически замкнутым подполем коэффициентов k. Конечный гомоморфизм k-алгебр $h : A \to B$ будем называть *несмешанным*, если $h(\mathfrak{m}_A) \subset \mathfrak{m}_B$ и $h(\mathfrak{m}_A) \not\subset \mathfrak{m}_B^2$.

Рассмотрим гомоморфизм $h : A \to B$, раскладывающийся в композицию нескольких несмешанных гомоморфизмов. Предположим, что дискриминантный дивизор h имеет вид $\mathcal{B} = b\mathcal{B}_0$, где $\mathcal{B}_0$ — регулярная приведенная кривая на $\operatorname{Spec} A$, а b — натуральное число.

Для $r > 0$ рассмотрим все регулярные кривые $\mathcal{C}$ на $\operatorname{Spec} A$ с $(\mathcal{C}.\mathcal{B}_0) = r$. Обозначим через $T_{r,N}$ пространство N-струй таких кривых ($N > r$). В силу подготовительной теоремы Вейерштрасса его можно отождествить с $\mathbb{A}_k^{N-1}$ при $r = 1$ и с $\{(\beta_r, \ldots, \beta_{N-1}) \in \mathbb{A}^{N-r} | \beta_r \neq 0\}$ при $r > 1$.

Теорема 22. *1. Пусть $\mathcal{C}$ — регулярная кривая на* $\operatorname{Spec} A$ *с $(\mathcal{C}.\mathcal{B}_0) = r < \infty$. Тогда для кривой $h^*\mathcal{C}$ число компонент, их δ-инварианты и индексы пересечения зависят только от струи $\mathcal{C}$ в $T_{r,br}$.*

2. Пусть $\mathcal{C}'_1, \ldots, \mathcal{C}'_r$ — все компоненты $h^*\mathcal{C}$, $i = 1, \ldots, l$; d_i — показатель дифференты в расширении дискретно нормированных полей $k(\mathcal{C}'_i)/k(\mathcal{C})$. Тогда $\sum_{i=1}^r d_i$ определяет полунепрерывную снизу функцию на $T_{r,br}$.

9. Заключение. Тематика законов взаимности и арифметики локальных числовых полей имеет длинную историю и остается незаконченной и по сей день.

Область явных формул для символа Гильберта является прекрасным примером плодотворного взаимодействия таких разделов математики как теория чисел, анализ на неархимедовых полях и функциональный анализ. Теория ветвления, в свою очередь, позволяет математически строго формулировать отличие арифметических аспектов от геометрических в рамках алгебраической геометрии.

В данной области много открытых проблем[7], ожидающих своих решений, продвижения в которых окажет большое влияние на развитие как данной области, так и всей математики в целом.

Литература

1. *Беккер Б. М., Бенуа Д. Г., Востоков С. В., Жуков И. Б., Смирнов А. Л., Фесенко И. Б.* О семинаре «Конструктивная теория полей классов» // Алгебра и анализ. 1992. Т. 4, № 1. P. 177–193.

2. *Шафаревич И. Р.* Общий закон взаимности // Матем. сб. 1950. Vol. 26(68), No 1. P. 113–146.

3. *Востоков С. В.* Явная форма закона взаимности // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1978. Т. 42, № 6. С. 1288–1321.

4. *Brückner H.* Explizites Reziprozitätsgesetz und Anwendungen. Vorlesungen aus dem Fachbereich Mathematik der Universitat Essen. 1979.

5. *Fesenko I. B., Vostokov S. V.* Local Fields and Their Extensions. Second extended edition. AMS, 2002. 341 p.

6. *Fesenko I. B.* Complete discrete valuation fields. Abelian local class field theories. In: Handbook of Algebra / man. ed. M. Hazewinkel. Amsterdam: Elsevier, 1996. Vol. 1. P. 221–268.

[7] Таких как явные формулы для символа Гильберта на эллиптических кривых.

7. *Fesenko I. B.* Abelian extensions of complete discrete valuation fields. In: Number Theory. Seminare de Paris 1993–1994. Cambridge: Cambridge Univ. Press. 1996. P. 47–74.

8. *Benois D. G., Vostokov S. V.* Sur les represetations p-adiques des corps locaux multidimensionnels attache's aux groups formels // J. für die reine und angew. Math. 1993. Vol. 437. P. 131–166.

9. *Benois D. G., Vostokov S. V.* On p-extensions of multidimensional local fields // Math. Nachrichten. 1993. Vol. 160. P. 59–68.

10. *Lai K. F., Vostokov S. V.* The Kneser relation and the Hilbert pairing in multidimensional local field // Math. Nachrichten. 2007. Vol. 280, No 16. P. 1780–1797.

11. *Востоков С. В.* Спаривание Гильберта в полном многомерном поле // Теория чисел, алгебра и алгебраическая геометрия. Сб. статей. К семидесятилетию со дня рождения академика И. Р. Шафаревича. 1995. С. 80–92.

12. *Лай К. Ф., Востоков С. В.* Явное спаривание и теория полей классов многомерных полных полей // Алгебра и анализ. 1999. Т. 11, №4. С. 95–114.

13. *Беляева Т. Б., Востоков С. В.* Символ Гильберта в полном поле. I // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2001. Т. 281. С. 5–34.

14. *Востоков С. В., Демченко О. В.* Явная форма спаривания Гильберта для относительных формальных групп Любина—Тэйта // Зап. научн. сем. ПОМИ. 1995. Т. 227. С. 41–44.

15. *Востоков С. В., Гуревич А. Н.* Связь между символом Гильберта и символом Витта // Зап. научн. сем. ПОМИ. 1995. Т. 227. С. 45–51.

16. *Vostokov S. V.* Explicit formulas for the Hilbert Symbol. In: Geometry and Topology Monograph Series. Sommerville: International Press. 2001. P. 61–68.

17. *Lorenz F., Vostokov S.* Honda groups and explicit pairing on the module of Cartier curves // Contemporary Mathematics. 2002. Vol. 300. P. 143–170.

18. *Vostokov S. V., Vostokova R. P., Podkopaeva O. Yu.* Degeneration of the Hilbert pairing in formal groups over local fields // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2016. Т. 3(61). Вып. 1. С. 60–66.

19. *Востокова Р. П., Питаль П. Н.* Арифметика гиперболических формальных модулей // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2016. Т. 3(61). Вып. 3. С. 384–392.

20. *Востоков С. В., Питаль П. Н.* Спаривание Гильберта для формальных групп Лоренца // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 2. С. 201–207.

21. *Бондарко М. В.* Явные конструкции в теории формальных групп и конечных групповых схем и их приложения к арифметической геометрии. Докторская диссертация. Санкт-Петербург. 2006.

22. *Фесенко И. Б.* Многомерная локальная теория полей классов. II // Алгебра и анализ. 1991. Т. 3, вып 5. С. 168–189.

23. *Фесенко И. Б.* Многомерная локальная теория полей классов // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318, вып. 1. С. 47–50.

24. *Fesenko I. B.* Class field theory of multidimensional local fields of characteristic 0 with residue field of positive characteristic // Adv. Sov. Math. 1991. Vol. 3, No 3. P. 649–678.

25. *Фесенко И. Б.* Теория полей классов многомерных локальных полей нулевой характеристики с полем вычетов положительной характеристики // Алгебра и анализ. 1991. Т. 3, №3. С. 165–169.

26. *Fesenko I. B.* Abelian local p-class field theory // Math. Ann. 1995. Vol. 301. P. 561–586.

27. *Fesenko I. B.* Noncommutative (nonabelian) local reciprocity maps,in class field theory — its centenary and prospects // Advanced Studies in Pure Math. 2001. Vol. 30. P. 63–78.

28. *Fesenko I. B.* On the image of noncommutative reciprocity map // Homology, Homotopy and Applications. 2005. Vol. 7. P. 53–62.

29. *Fesenko I. B.* Analysis on arithmetic schemes. I // Docum. Math. 2003. P. 261–284.

30. *Fesenko I. B.* Measure, integration and elements of harmonic analysis on generalized loop spaces // Proceed. St. Petersburg Math. Soc. 2005. Vol. 12. P. 179–199.

31. *Vostokov S. V., Vostokova E. S.* Pairings in local fields and cryptography // Lobachevskii J. Math. 2015. Vol. 36, issue 4. P. 319–327.

32. *Vostokov S. V., Podkopaeva O. Yu., Ratko K. V.* Application of Explicit Hilbert's Pairing to Constructive Class Field Theory and Cryptography // Appl. Math. Sci. 2016. Vol. 10, No. 45. P. 2205–2213.

33. Invitation to higher local fields / eds. I. Fesenko, M. Kurihara. Warwick. 2000. Vol. 3. Geometry and Topology Monographs. 316 p.

34. *Morrow M.* An introduction to higher dimensional local fields and adeles. arXiv:1204.0586.

35. *Hazewinkel M.* Formal Groups and Applications. In Ser. Pure Appl. Math. 1978. Vol. 78. New York: Academic Press.

36. *Frohlich A.* Formal groups. Lecture Notes in Mathematics. Springer. 1968. Vol. 74.

37. *Strickland N. P.* Formal schemes and formal groups. arXiv:math/0011121.

38. *Lurie J.* Chromatic Homotopy Theory. Lecture series.

39. *Hasse H.* Die Gruppe der p^n-primären Zahlen für einen Primteiler pp von pp // J. reine und angew. Math. 1936. Vol. 176. P. 174–183.

40. *Востоков С. В.* Норменное спаривание в формальных модулях // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43, № 4. С. 765–794.

41. *Востоков С. В.* Символ Гильберта для формальных групп Любина–Тэйта. I // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1982. Т. 114. С. 77–95.

42. *Востоков С. В., Климовицкий И. Л.* Примарные элементы в формальных модулях // Совр. пробл. матем. 2013. Т. 17. С. 153–163.

43. *Беккер Б., Бондарко М. В., Востоков С.* Базисы Шафаревича в топологических КК-группах // Алгебра и анализ. 1998. Т. 10, № 2. С. 63–80.

44. *Иконникова Е. В., Шавердова Е. В.* Базис Шафаревича в многомерном локальном поле // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2013. Т. 413. С. 115–133.

45. *Афанасьева С. С., Беккер Б. М., Востоков С. В.* Символ Гильберта в многомерных локальных полях для формальной группы Любина—Тейта // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2012. Т. 400. С. 20–49.

46. *Афанасьева С. С.* Символ Гильберта в многомерных локальных полях для формальной группы Любина—Тейта. 2 // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2013. Т. 413. С. 26–44.

47. *Иконникова Е. В.* Канонический базис Гензеля—Шафаревича в формальных модулях Любина—Тейта // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2014. Т. 430. 186–201.

48. *Востоков С. В.* Канонический базис Гензеля—Шафаревича в полных дискретно-нормированных полях // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2011. Т. 394. С. 174–193.

49. *Honda T.* On the theory of commutative formal groups // J. Math. Soc. Japan. 1970. Vol. 22. P. 213–246.

50. *Lubin J., Tate J.* Formal complex multiplication in local fields // Ann. Math. 1965. Vol. 81, No 2. P. 380–384.

51. *Демченко О. В.* Новое в отношениях формальных групп Любина—Тэйта и формальных групп Хонды // Алгебра и анализ. 1998. Т. 10, № 5. С. 77–84.

52. *Востоков С. В.* Символы на формальных группах // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1981. Т. 45, № 5. С. 985–1014.

53. *Демченко О. В.* Формальные группы Хонды: арифметика группы точек // Алгебра и анализ. 2000. Т. 12, № 1. С. 132–149.

54. *Востоков С. В., Демченко О. В.* Явная формула спаривания Гильберта для формальных групп Хонды // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2000. Т. 272. С. 86–128.

55. *Fontaine J.-M.* Groupes p-divisibles sur les corps locaux // Astérisque. 1977. P. 47–48.

56. *Демченко О. В.* Формальные группы над p-адическими кольцами целых с малым ветвлением и выделенные изогении // Алгебра и анализ. 2002. Т. 14, № 3. С. 55–85.

57. *Demchenko O.* Covariant Honda theory // Tohoku Math. J. 2005. Vol. 57, N 3, P. 303–319.

58. *Fontaine J.-M.* Sur la construction du module de Dieudonné d'un groupe formel // C. R. Acad. Sc. Paris Sér. A–B. 1975. Vol. 280. P. 1273–1276.

59. *Lubin J., Tate J.* Formal moduli for one-parameter formal Lie group // Bull. Soc. Math. France. 1966. Vol. 94. P. 49–60.

60. *Demchenko O., Gurevich A.* p-adic period map for the moduli space of deformations of a formal group // J. Algebra. 2005. Vol. 288, No 2. P. 445–462.

61. *Gross B., Hopkins M.* Equivariant vector bundles on the Lubin—Tate moduli space // Contemp. Math. 1994. Vol. 158. P. 23–88.

62. *Honda T.* Invariant differentials and L-functions. Reciprocity law for quadratic fields and elliptic curves over $\mathbb{Q}$ // Ren. Sem. Mat. Univ. Padova. 1973. Vol. 49. P. 323–335.

63. *Demchenko O., Gurevich A.* Reciprocity laws through formal groups // Proc. Amer. Math. Soc. 2013. Vol. 141, no 5. P. 1591–1596.

64. *Deninger C., Nart E.* Formal groups and L-series // Comment. Math. Helvetici. 1990. Vol. 65. P. 318–333.

65. *Demchenko O., Gurevich A.* On the moduli space of deformations of a p-divisible group // Math. Res. Lett. 2014. Vol. 21, no. 5. P. 1015–1045.

66. *Demchenko O., Gurevich A.* Kernels in the category of formal group laws // Can. J. Math. 2016. Vol. 68, no. 2. P. 334–360.

67. *Востоков С. В.* Явная конструкция теории полей классов многомерного локального поля // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1985. Т. 49, № 2. Р. 283–308.

68. *Востоков С. В., Волков В. В.* Явная форма символа Гильберта для многочленных формальных модулей // Алгебра и анализ.2014. Vol. 26, № 5. P. 125–141.

69. *Востоков С. В., Волков В. В., Бондарко М. В.* Явная форма символа Гильберта для многочленных формальных модулей в многомерном локальном поле. I // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2014. Т. 430. С. 53–60.

70. *Востоков С. В., Волков В. В.* Явная форма символа Гильберта для многочленных формальных модулей в многомерном локальном поле. II // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2016. Т. 443. С. 46–60.

71. *Волков В. В.* О норменном свойстве символа Гильберта для многочленных формальных модулей в многомерном локальном поле // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2016. Т. 3(61). Вып. 4. С. 552–557. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.404.

72. *Востоков С. В., Фесенко И. Б.* Об одном свойстве спаривания Гильберта // Матем. заметки. 1988. Т. 43, № 3. С. 393–400.

73. *Колывагин В. А.* Формальные группы и символ норменного вычета // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43, № 5. С. 1054–1120.

74. *Востоков С. В., Перлис Р.* Норменные ряды для формальных групп Любина—Тейта // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2001. Т. 281. С. 105–127.

75. *Афанасьева С. С., Пак Г. К.* Норменные ряды для формальных групп Хонды // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2011. Т. 388. С. 5–16.

76. *Востоков С. В., Пак Г. К.* Норменные ряды в многомерном локальном поле // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2003. Т. 305. С. 60–83.

77. *Афанасьева С. С.* Норменные ряды для многомерных формальных групп Хонды // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2012. Т. 400. С. 5–19.

78. *Hilbert D.* Gesammelte Abhandlungen. Vol. 1. Berlin: Springer. 1932.

79. *Востоков С. В.* Классический закон взаимности степенных вычетов как аналог теоремы об абелевом интеграле // Алгебра и анализ. 2008. Т. 20, № 6. С. 108–118.

80. *Иванов М. А.* Произведение символов p^n-х степенных вычетов как абелев интеграл // Алгебра и анализ. 2012. Т. 24, № 2. С. 120–129.

81. *Востоков С. В., Иванов М. А.* Интегральная теорема Коши и классический закон взаимности // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2012. Т. 154, № 2. С. 73–82.

82. *Шнирельман Л. Г.* О функциях в нормированных алгебраически замкнутых телах // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1938. Т. 2, № 5–6. С. 487–498.

83. *Боревич З. И.* Мультипликативная группа регулярного поля с циклической группой операторов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1964. Т. 28, № 3. С. 707–712.

84. *Боревич З. И.* О мультипликативной группе циклических p-расширений локального поля // Алгебраическая теория чисел и представления. Сб. работ. Тр. МИАН СССР. 1965. Т. 80. С. 16–29.

85. *Боревич З. И., Востоков С. В.* Кольцо целых элементов расширения простой степени локального поля как модуль Галуа // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1973. Т. 31. С. 24–37.

86. *Востоков С. В.* Идеалы абелева p-расширения локального поля как модули Галуа // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1976. Т. 57. С. 64–84.

87. *Бондарко М. В., Востоков С. В.* Разложимость идеалов как модулей Галуа в полных дискретно-нормированных полях // Алгебра и анализ. 1999. Т. 11, № 2. С. 41–63.

88. *Бондарко М. В., Востоков С. В.* Разложение идеалов в абелевых pp-расширениях полных дискретно нормированных полей // Зап. научн. сем. ПОМИ. 1997. Т. 236. С. 23–33.

89. *Бондарко М. В., Востоков С. В., Жуков И. Б.* Аддитивные модули Галуа в полных дискретно нормированных полях // Алгебра и анализ. 1997. Т. 9, № 4. С. 28–46.

90. *Бондарко М. В., Востоков С. В.* Аддитивные модули Галуа дедекиндовых колец. Разложимость // Алгебра и анализ. 1999. Т. 11, № 6. С. 103–121.

91. *Vostokov S. V., Nekrasov I. I., Vostokova R.* Lutz filtration as a Galois module // Lobachevskii J. Math. 2016. Vol. 37, No. 2. P. 214–221.

92. *Востоков С. В., Некрасов И. И.* Формальный модуль Любина—Тейта в циклическом неразветвленном p-расширении как модуль Галуа // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2014. Т. 430. С. 61–66.

93. *Манин Ю. И.* Теория коммутативных формальных групп над полями конечной характеристики // УМН. 1963. Т. 18, № 6(114). С. 3–90.

94. *Oort F.* Commutative group schemes. Lecture Notes in Mathematics. Vol. 15. 1966.

95. *Бондарко М. В., Востоков С. В.* Явная классификация формальных групп над локальными полями // Теория чисел, алгебра и алгебраическая геометрия. Сб. статей. Тр. МИАН. 2003. Т. 241. С. 43–67.

96. *Бондарко М. В.* Канонические представители в классах строгой изоморфности формальных групп // Матем. Заметки. 2007. Т. 82, № 2. С. 183–189.

97. *Бондарко М. В.* Классы изогенности формальных групп над полными дискретно-нормированными полями с произвольным полем вычетов // Алгебра и анализ. 2005. Т. 17, № 6. С. 105–124.

98. *Бондарко М. В.* Explicit classification of formal groups over complete discrete valuation fields with imperfect residue field // Труды Санкт-Петербургского математического общества. 2005. Т. 11. С. 1–36.

99. *Бондарко М. В.* Классификация конечных групповых схем над кольцами целых полных дискретно-нормированных полей; касательное пространство и полустабильная редукция абелевых многообразий // Алгебра и анализ. 2006. Т. 18, № 5. С. 72–98.

100. *MacKenzie R. E., Whaples G.* Artin–Schreier equations in characteristic zero // Amer. J. Math. 1956. Vol. 78. P. 473–485.

101. *Fesenko I. B., Vostokov S. V., Zhukov I. B.* On the theory of multidimensional local fields. Methods and constructions // Leningrad Math. J. 1991. T. 3, N 4. P. 775–800.

102. *Boitsov V. G., Zhukov I. B.* Continuability of Cyclic Extensions of Complete Discrete Valuation Fields // Journal of Mathematical Sciences. 2005. Vol. 130. P. 4643–4650.

103. *Vostokov S. V., Zhukov I. B.* Some approaches to the construction of abelian extensions for $\mathfrak{p}$-adic fields // Proc. St. Petersburg Math. Society. Amer. Math. Soc. Transl. (Ser. 2). 1995. Vol. 3.

104. *Lysenko E. F., Zhukov I. B.* Construction of cyclic extensions of degree p^2 for a complete field. To appear.

105. *Zhukov I.* Explicit abelian extensions of complete discrete valuation fields // Geom. Topol. Monogr. 2000. Vol. 3. Coventry: Geom. Topol. Publ. P. 117–122. URL: http://msp.org/gtm/2000/03/p014.xhtml (дата обращения: 07.06.2017).

106. *Epp H.* Eliminating wild ramification // Invent. Math. 1973. Vol. 19. P. 235–249.

107. *Madunts A. I., Zhukov I. B.* Multidimensional complete fields: topology and other basic constructions // Proc. St. Petersburg Math. Society. Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 1995. Vol. 3. P. 1–34.

108. *Zhukov I.* Higher dimensional local fields // Geom. Topol. Monogr. 2000. Vol. 3. Coventry: Geom. Topol. Publ. P. 5–18. DOI: 10.2140/gtm.2000.3.5.

109. *Koroteev M. V., Zhukov I. B.* Elimination of wild ramification // St. Petersburg Math. J. 2000. Vol. 11. P. 1063–1083.

110. Ivanova O. Yu., Zhukov I. B. On two approaches to classification of higher local fields. In preparation.

111. *Kurihara M.* On two types of complete discrete valuation fields // Compos. Math. 1987. Vol. 63. P. 237–257.

112. *Ivanova O. Yu.* On the relationship between Kurihara's classification and the theory of ramification removal // St. Petersburg Math. J. 2013. Vol. 24, No 2. P. 283–299

113. *Ivanova O. Yu.* Kurihara classification and maximal depth extensions for multidimensional local fields // St. Petersburg Math. J. 2013. Vol. 24, No 6. P. 877–901.

114. *Zhukov I. B.* Milnor and topological K-groups of higher-dimensional complete fields // St. Petersburg Math. J. 1998. Vol. 19. P. 69–105.

115. *Ivanova O. Yu.* The $\mathbb{Z}_p$-rank of a topological K-group // St. Petersburg Math. J. 2009. Vol. 20, No 4. P. 569–591.

116. *Ivanova O. Yu.* Topological K-groups of two-dimensional local fields // J. Math. Sci. 2007. Vol. 147. P. 7088–7097.

117. *Serre J.-P.* Corps Locaux. 2nd ed. Hermann. Paris. 1968.

118. *Xiao L., Zhukov I.* Ramification in the imperfect residue field case, approaches and questions // St. Petersburg Math. J. 2015. Vol. 26. P. 695–740.

119. *Xiao L., Zhukov I.* Ramification in the imperfect residue field case, approaches and questions // Proceedings of the 2nd international conference and workshop on valuation theory, Segovia and El Escorial, Spain, July 18–29, 2011. Zurich: European Mathematical Society (EMS). EMS Series of Congress Reports / Campillo, Antonio (ed.) et al. 2014. P. 600–656.

120. *Abbes A., Saito T.* Ramification of local fields with imperfect residue fields. I // Amer. J. Math. 2002. Vol. 124. P. 879–920, arXiv:math/0010103.

121. *Abbes A., Saito T.* Ramification of local fields with imperfect residue fields. II // Doc. Math. 2003. Extra Vol. Kazuya Kato's fiftieth birthday. P. 5–72.

122. *Zhukov I. B.* On ramification theory in the imperfect residue field case // Mathematics. 2003. Vol. 194. P. 1747–1774.

123. *Zhukov I.* An approach to higher ramification theory // Geom. Topol. Monogr. 1999. Vol. 3. Coventry: Geom. Topol. Publ. P. 143–150. DOI: 10.2140/gtm.2000.3.143.

124. *Kato K.* Vanishing cycles, ramification of valuation and class field theory // Duke Math. J. 1987. Vol. 55. P. 629–659.

125. *Abrashkin V. A.* Ramification theory for higher dimensional local fields // Algebraic number theory and algebraic geometry. 2002. Contemp. Math. Vol. 300. Amer. Math. Soc. P. 1–16.

126. *Абрашкин В. А.* Аналог гипотезы Гротендика для двумерных локальных полей конечной характеристики // Труды МИАН. 2003. Vol. 241. P. 8–42.

127. *Abrashkin V. A.* Towards explicit description of ramification filtration in the 2-dimensional case // J. Théor. Nombres Bordeaux. 2004. Vol. 16. P. 293–333.

128. *Abrashkin V. A.* An analogue of the field-of-norms functor and of the Grothendieck conjecture // J. Algebraic Geom. 2007. Vol. 16, N 4. P. 671–730, arXiv:math/0503200.

129. *Vostokov S. V. , Zhukov I. B.* On certain extensions of two-dimensional local fields. In book: International algebraic conference dedicated to the memory of D. K. Faddeev. St. Petersburg. 1997.

130. *Zhukov I. B.* Ramification in Elementary Abelian Extensions // J. Math. Sci. 2014. Vol. 202. P. 404–409.

131. *Zhukov I. B.* The Elementary Abelian Conductor // J. Math. Sci. 2015. Vol. 209. P. 564—567.

132. *Zhukov I. B., Pak G. K.* Approximation approach to ramification theory // St. Petersburg Math. J. 2016. Vol. 27. P. 967–976.

133. *Laumon G.* Semi-continuité du conducteur de Swan (d'après P. Deligne) // Astérisque. 1981. Vol. 83. P. 173–219.

134. *Hu H., Yang E.* Semi-continuity for total dimension divisors of étale sheaves // Intern. J. Math. 2016. Vol. 10.

135. *Brylinski J.-L.* Théorie du corps de classes de Kato etrevêtements abéliens de surfaces // Ann. Inst. Fourier, Grenoble. 1983. Vol. 33. P. 23–38.

136. *Barrientos I.* Log ramification via curves in rank 1. arXiv: 1307.5814.

137. *Zhukov I. B.* Semiglobal models of extensions of two dimensional local fields // Vestnik St. Petersburg Univ. Math. 2010. Vol. 43, No. 1. P. 33–38.

138. *Zhukov I. B.* Ramification of surfaces: Artin-Schreier extensions // Algebraic number theory and algebraic geometry. 2002. Vol. 300. P. 211–220. Contemp. Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI.

139. *Campillo A., Faizov I., Zhukov I.* Curve singularities and ramification of surface morphisms, in preparation.

Статья поступила в редакцию 14 февраля 2017 г.; рекомендована в печать 30 марта 2017 г.

Сведения об авторах

Востоков Сергей Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор; sergei.vostokov@gmail.com

Афанасьева Софья Сергеевна — кандидат физико-математических наук, инженер-исследователь; cheery_sonya@mail.ru

Бондарко Михаил Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор; mbondarko@gmail.com

Волков Владислав Владимирович — кандидат физико-математических наук, инженер-исследователь; vladvolkov239@gmail.com

Демченко Олег Вячеславович — кандидат физико-математических наук, профессор; vasja@eu.spb.ru

Иконникова Елена Валерьевна — инженер-исследователь; ikonnikovaev@gmail.com

Жуков Игорь Борисович — доктор физико-математических наук, профессор; i.zhukov@spbu.ru

Некрасов Илья Игоревич — лаборант-исследователь; geometr.nekrasov@yandex.ru

Питаль Петр Николаевич — аспирант; pital.petya@yandex.ru

EXPLICIT CONSTRUCTIONS AND ARITHMETIC OF LOCAL NUMBER FIELDS

Sergei V. Vostokov[1], *Sofia S. Afanaseva*[1,2], *Mikhail V. Bondarko*[1], *Vladislav V. Volkov*[1], *Oleg V. Demchenko*[1], *Elena V. Ikonnikova*[1], *Igor B. Zhukov*[1], *Ilia I. Nekrasov*[1], *Petr N. Pital'*[1]

[1] St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; sergei.vostokov@gmail.com, cheery_sonya@mail.ru, mbondarko@gmail.com, vladvolkov239@gmail.com, vasja@eu.spb.ru, ikonnikovaev@gmail.com, i.zhukov@spbu.ru, geometr.nekrasov@yandex.ru, pital.petya@yandex.ru

[2] Saint Petersburg National Research University of Information Technologies, Mechanics and Optics, Kronverksky pr., 49, St. Petersburg, 197101, Russian Federation; cheery_sonya@mail.ru

This paper is a survey of some of the results obtained by Saint Petersburg number theory school over recent decades. We consider explicit formulas for the Hilbert symbol in case of nonclassical formal modules and their applications in local arithmetic geometry and ramification theory. For topics studied by the school, but not included in this survey (due to the lack of space), references are given.

In the section on explicit formulas, we present results for formal modules constructed using Honda formal group laws and polynomial formal group laws, and also the interpretation using p-adic integrals. Their implications concerning Galois modules are also described. We give the classification of formal group laws over local number fields as well. Further, we discuss constructions of complete discrete valuation fields' extensions. Besides some results in structure theory of higher local fields are presented. The last section is concerned with ramification theory for higher local fields. Refs 139.

Keywords: formal groups, reciprocity laws, local number fields, higher local fields.

References

1. Bekker B. M., Benois D. G., Vostokov S. V., Zhukov I. B., Smirnov A. L., Fesenko I. B., "The seminar "Constructive Class Field Theory", *St. Petersburg Math. J.*, **4**(1), 175–192 (1993).

2. Shafarevich I. R., "A general reciprocity law", *Mat. Sb. (N.S.)* **26(68)**(1), 113–146 (1950) [in Russian].

3. Vostokov S. V., "Explicit form of the law of reciprocity", *Math. USSR-Izv.* **13**(3), 557–588 (1979).

4. Brückner H., *Explizites Reziprozitätsgesetz und Anwendungen.* In: *Vorlesungen aus dem Fachbereich Mathematik der Universitat Essen* (1979) [in German].

5. Fesenko I. B., Vostokov S. V., *Local Fields and Their Extensions* (Second extended edition, AMS, 2002, 341 p.).

6. Fesenko I. B., *Complete discrete valuation fields. Abelian local class field theories.* In: *Handbook of Algebra* (man. ed. M. Hazewinkel, Elsevier, Amsterdam, 1996, **1**, 221–268).

7. Fesenko I. B., *Abelian extensions of complete discrete valuation fields.* In: *Number Theory. Seminare de Paris 1993–1994*, 47–74 (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996).

8. Benois D. G., Vostokov S. V., "Sur les represetations p-adiques des corps locaux multidimensionnels attache's aux groups formels", *J. für die reine und angew. Math.* **437**, 131–166 (1993).

9. Benois D. G., Vostokov S. V., "On p-extensions of multidimensional local fields", *Math. Nachrichten* **160**, 59–68 (1993).

10. Lai K. F., Vostokov S. V., "The Kneser relation and the Hilbert pairing in multidimensional local field", *Math. Nachrichten* **280**(16), 1780–1797 (2007).

11. Vostokov S. V., "Hilbert pairing on a complete high-dimensional field", *Proc. Steklov Inst. Math.* **208**, 72–83 (1995).

12. Lai K., Vostokov S. V., "Explicit pairing and class field theory of multidimensional complete fields", *St. Petersburg Math. J.* **11**(4), 611–624 (2000).

13. Belyaeva T. B., Vostokov "The Hilbert Symbol in a Complete Multidimensional Field. I", *J. Math. Sci.* **120**(4), 1483–1500 (2004). DOI: 10.1023/B:JOTH.0000017880.47115.ae.

14. Vostokov S. V., Demchenko O. V., "An explicit form of the Hilbert pairing for the relative formal Lubin–Tate group", *J. Math. Sci.* **89**(2), 1105–1107 (1998). DOI: 10.1007/BF02355855.

15. Vostokov S. V., Gurevich A. N., "A relationship between the Hilbert and Witt symbols", *J. Math. Sci.* **89**(2), 1108–1112 (1998). DOI: 10.1007/BF02355856.

16. Vostokov S. V., *Explicit formulas for the Hilbert Symbol.* In: *Geometry and Topology Monograph Series*, 61–68 (International Press, Sommerville, 2001).

17. Lorenz F., Vostokov S., "Honda groups and explicit pairing on the module of Cartier curves", *Contemporary Mathematics* **300**, 143–170 (2002).

18. Vostokov S. V., Vostokova R. P., Podkopaeva O. Yu., "Degeneration of the Hilbert pairing in formal groups over local fields", *Vestnik St. Petersburg Univ. Math.* **49**, issue 1, 47–52 (2016). DOI: 10.3103/S1063454116010131.

19. Vostokova R. P., Pital' P. N., "The arithmetic of hyperbolic formal modules", *Vestnik St. Petersburg Univ. Math.* **49**, issue 3, 224–230 (2016). DOI: 10.3103/S1063454116030146.

20. Vostokov S. V., Pital' P. N., "Hilbert pairing on Lorentz formal group", *Vestnik St. Petersburg Univ. Math.* **50**, issue 2, 117–121 (2017).

21. Bondarko M. V., *Explicit constructions in the theory of formal groups and finite group schemes, and their applications to arithmetic geometry* (Doctoral thesis, St Petersburg, 2006) [in Russian].

22. Fesenko I. B., "Multidimensional local class field theory. II", *St. Petersburg Math. J.* **3**(5), 1103–1126 (1992).

23. Fesenko I. B., "Multidimensional local class field theory", *Acad. Scienc. Dokl. Math.* **43**, 674–677 (1991).

24. Fesenko I. B., "Class field theory of multidimensional local fields of characteristic 0 with residue field of positive characteristic", *Adv. Sov. Math.* **3**(3), 649–678 (1991)

25. Fesenko I. B., “Class field theory of multidimensional local fields of characteristic 0 with residue field of positive characteristic”, *St. Petersburg Math. J.* **3**(3), 649–678 (1992).

26. Fesenko I. B., “Abelian local p-class field theory”, *Math. Ann.* **301**, 561–586 (1995).

27. Fesenko I. B., “Noncommutative (nonabelian) local reciprocity maps,in class field theory — its centenary and prospects”, *Advanced Studies in Pure Math.* **30**, 63–78 (2001).

28. Fesenko I. B., “On the image of noncommutative reciprocity map”, *Homology, Homotopy and Applications* **7**, 53–62 (2005).

29. Fesenko I. B., “Analysis on arithmetic schemes. I”, *Docum. Math.*, 261–284 (2003).

30. Fesenko I. B., “Measure, integration and elements of harmonic analysis on generalized loop spaces”, *Proceed. St. Petersburg Math. Soc.* **12**, 179–199 (2005).

31. Vostokov S. V., Vostokova E. S., “Pairings in local fields and cryptography”, *Lobachevskii J. Math.* **36**, issue 4, 319–327 (2015).

32. Vostokov S. V., Podkopaeva O. Yu., Ratko K. V., “Application of Explicit Hilbert’s Pairing to Constructive Class Field Theory and Cryptography”, *Appl. Math. Sci.* **10**(45), 2205–2213 (2016).

33. *Invitation to higher local fields.* In: *Geometry and Topology Monographs* (eds. I. Fesenko, M. Kurihara, Warwick, 2000, **3**, 316 p.).

34. Morrow M., “An introduction to higher dimensional local fields and adeles”, arXiv:1204.0586.

35. Hazewinkel M., *Formal Groups and Applications.* In Ser. *Pure Appl. Math.* (Academic Press, New York, **78**, 1978).

36. Frohlich A., *Formal groups. Lecture Notes in Mathematics* (Springer, **74**, 1968).

37. Strickland N. P., “Formal schemes and formal groups”, arXiv:math/0011121.

38. Lurie J. *Chromatic Homotopy Theory. Lecture series.*

39. Hasse H., “Die Gruppe der p^n-primären Zahlen für einen Primteiler pp von pp”, *J. reine und angew. Math.* **176**, 174–183 (1936) [in German].

40. Vostokov S. V., “A norm pairing in formal modules”, *Math. USSR-Izv.* **15**(1), 25–51 (1980).

41. Vostokov S. V., “The Hilbert symbol for Lubin–Tate formal groups. I”, *J. Sov. Math.* **27**, issue 4, 2885–2901 (1984). DOI: 10.1007/BF01410742.

42. Vostokov S. V., Klimovitskii I. L., “Primary Elements in Formal Modules”, *Proc. Steklov Inst. Math.* **282**, suppl. 1, 140–149 (2013). DOI: 10.1134/S0081543813070080.

43. Bekker B., Bondarko M. V., Vostokov S., “Shafarevich bases in topological K-groups”, *St. Petersburg Math. J.* **10**(2), 269–282 (1999).

44. Ikonnikova E. V., Shaverdova E. V., “The Shafarevich basis in higher dimensional local fields”, *J. Math. Sci.* **202**(3), 410–421 (2014). DOI: 10.1007/s10958-014-2051-4.

45. Afanas’eva S. S., Bekker B. M., Vostokov S. V., “The Hilbert symbol in multi-dimensional local fields for Lubin—Tate formal groups”, *J. Math. Sci.* **192**(2), 137–153 (2013). DOI: 10.1007/s10958-013-1380-z.

46. Afanas’eva S. S., “ The Hilbert Symbol in Higher-Dimensional Local Fields for Formal Lubin–Tate Groups. II”, *J. Math. Sci.* **202**(3), 346–359 (2014). DOI: 10.1007/s10958-014-2047-0.

47. Ikonnikova E. V., “Hensel—Shafarevich canonical basis in Lubin—Tate formal modules”, *Zap. Nauchn. Sem. POMI* **430**, 186–201 (2014) [in Russian].

48. Vostokov S. V., “The Hensel-Shafarevich canonical basis in complete discrete valuation fields”, *J. Math. Sci.* **188**(5), 570–581 (2013). DOI: 10.1007/s10958-013-1148-5.

49. Honda T., “On the theory of commutative formal groups”, *J. Math. Soc. Japan* **22**, 213–246 (1970).

50. Lubin J., Tate J., “Formal complex multiplication in local fields”, *Ann. Math.* **81**(2), 380–384 (1965).

51. Demchenko O. V., “New relationships between formal Lubin—Tate groups and formal Honda groups”, *St. Petersburg Math. J.* **10**(5), 785–789 (1999).

52. Vostokov S. V., “Symbols on formal groups”, *Math. USSR-Izv.* **19**(2), 261–284 (1982).

53. Demchenko O. V., “Formal Honda groups: the arithmetic of the group of points”, *St. Petersburg Math. J.* **12**(1), 101–115 (2001).

53. Vostokov S. V., Demchenko O. V., “An Explicit Formula of the Hilbert Pairing for Honda Formal Groups”, *J. Math. Sci.* **116**(1), 2926–2952 (2003). DOI: 10.1023/A:1023494524764.

55. Fontaine J.-M., “Groupes p-divisibles sur les corps locaux”, *Astérisque*, 47–48 (1977).

56. Demchenko O. V., “Formal groups over p-adic rings of integers with small ramification and distinguished isogenies”, *St. Petersburg Math. J.* **14**(3), 405–428 (2002).

57. Demchenko O., “Covariant Honda theory”, *Tohoku Math. J.* **57**(3), 303–319 (2005).

58. Fontaine J.-M., “Sur la construction du module de Dieudonné d’un groupe formel”, *C. R. Acad. Sc. Paris Sér. A–B* **280**, 1273–1276 (1975) [in French].

59. Lubin J., Tate J., “Formal moduli for one-parameter formal Lie group”, *Bull. Soc. Math. France* **94**, 49–60 (1966).

60. Demchenko O., Gurevich A., “p-adic period map for the moduli space of deformations of a formal group”, *J. Algebra* **288**(2), 445–462 (2005).

61. Gross B., Hopkins M., “Equivariant vector bundles on the Lubin—Tate moduli space”, *Contemp. Math.* **158**, 23–88 (1994).

62. Honda T., “Invariant differentials and L-functions. Reciprocity law for quadratic fields and elliptic curves over $\mathbb{Q}$”, *Ren. Sem. Mat. Univ. Padova* **49**, 323–335 (1973).

63. Demchenko O., Gurevich A., “Reciprocity laws through formal groups”, *Proc. Amer. Math. Soc.* **141**(5), 1591–1596 (2013).

64. Deninger C., Nart E., “Formal groups and L-series”, *Comment. Math. Helvetici* **65**, 318–333 (1990).

65. Demchenko O., Gurevich A., “On the moduli space of deformations of a p-divisible group”, *Math. Res. Lett.* **21**(5), 1015–1045 (2014).

66. Demchenko O., Gurevich A., “Kernels in the category of formal group laws”, *Can. J. Math.* **68**(2), 334–360 (2016).

67. Vostokov S. V., “Explicit construction of class field theory for a multidimensional local field”, *Math. USSR-Izv.* **26**(2), 263–287 (1986).

68. Vostokov S. V., Volkov V. V., “Explicit formula for Hilbert pairing on polynomial formal modules”, *St. Petersburg Math. J.* **26**(5), 785–796 (2015). DOI: https://doi.org/10.1090/spmj/1358.

69. Vostokov S. V., Volkov V. V., Bondarko M. V., “Explicit form of Hilbert symbol for polynomial formal groups over multidimensional local field. I”, *Zap. Nauchn. Sem. POMI* **430**, 53–60 (2014) [in Russian].

70. Vostokov S. V., Volkov V. V., “Explicit form of Hilbert symbol for polynomial formal groups over multidimensional local field. I”, *Zap. Nauchn. Sem. POMI* **443**, 46–60 (2016) [in Russian].

71. Volkov V. V., “On a norm property of Hilbert symbol over polynomial formal module in multidimensional local field”, *Vestn. St. Petersburg Univ. Math.* **3(61)**, issue 4, 320–324 (2016). DOI: 10.3103/S1063454116040154.

72. Vostokov S. V., Fesenko I. B., “A certain property of the Hilbert pairing”, *Math. notes* **43**(3), 226–230 (1988). DOI: 10.1007/BF01138846.

73. Kolyvagin V. A., “Formal groups and the norm residue symbol”, *Math. USSR-Izv.* **15**(2), 289–348 (1980).

74. Vostokov S. V., Perlis R.,“Norm series for the Lubin–Tate formal groups”, *J. Math. Sci.* **120**(4), 1549–1560 (2004). DOI: 10.1023/B:JOTH.0000017883.76167.65.

75. Afanas’eva S. S., Pak G. K., “Norm series for Honda formal groups”, *J. Math. Sci.* **183**(5), 577–583 (2012). DOI: 10.1007/s10958-012-0825-0.

76. Vostokov S. V., Pak G. K., “Norm series in multidimensional local fields”, *J. Math. Sci.* **130**(3), 4675–4688 (2005). DOI: 10.1007/s10958-005-0362-1.

77. Afanas’eva S. S., “Norm series for multi-dimensional Honda formal groups”, *J. Math. Sci.* **192**(2), 127–136 (2013). DOI: 10.1007/s10958-013-1379-5.

78. Hilbert D., *Gesammelte Abhandlungen* (Springer, Berlin, **1**, 1932).

79. Vostokov S. V., “The classical reciprocity law for power residues as an analog of the Abelian integral theorem”, *St. Petersburg Math. J.* **20**(6), 929–936 (2009). DOI: https://doi.org/10.1090/S1061-0022-09-01078-4.

80. Ivanov M. A., “Product of p^n-power residues as an Abelian integral”, *St. Petersburg Math. J.* **24**(2), 275–281 (2013). DOI: https://doi.org/10.1090/S1061-0022-2013-01238-6.

81. Vostokov S. V., Ivanov M. A., “Cauchy’s integral theorem and classical reciprocity law”, *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki* **154**(2), 73–82 (2012) [in Russian].

82. Schnirelmann L., “Sur les fonctions dans les corps normés et algébriquement fermés.”, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat* **2**(5–6), 487–498 (1938) [in Russian. Summary in French].

83. Borevich Z. I., “The multiplicative group of a regular local field with a cyclic group of operators”, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **28**(3), 707–712 (1964) [in Russian].

84. Borevich Z. I., “The multiplicative group of cyclic p-extensions of a local field”, *Proc. Steklov Inst. Math.* **80**, 16–29 (1965).

85. Borevich Z. I., Vostokov S. V., “Ring of integers in an extension of prime degree of a local field as the Galois module”, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI* **31**, 24–37 (1972) [in Russian].

86. Vostokov S. V., “Ideals of an abelian pp-extension of local fields as Galois modules”, *J. Sov. Math.* **11**(4), 567–584 (1979).

87. Bondarko M. V., Vostokov S. V., “Decomposability of ideals as Galois modules in complete discrete valuation fields”, *St. Petersburg Math. J.* **11**(1), 233–249 (2000).

88. Bondarko M. V., Vostokov S. V., “Decomposition of ideals in Abelian p-extensions of complete, discretely valuated fields”, *J. Math. Sci.* **95**(2), 2058–2064 (1999). DOI: 10.1007/BF02169959.

89. Bondarko M. V., Vostokov S. V., Zhukov I. B., “Additive Galois modules in complete discrete valuation fields”, *St. Petersburg Math. J.* **9**(4), 675–693 (1998).

90. Bondarko M. V., Vostokov S. V., “Additive Galois modules in Dedekind rings. Decomposability”, *St. Petersburg Math. J.* **11**(6), 1019—1033 (2000).

91. Vostokov S. V., Nekrasov I. I., Vostokova R., “Lutz filtration as a Galois module”, *Lobachevskii J. Math.* **37**(2), 214–221 (2016).

92. Vostokov S. V., Nekrasov I. I., “Lubin—Tate formal module in a cyclic unramified pp-extension as Galois module”, *Zap. Nauchn. Sem. POMI* **430**, 61–66 (2014) [in Russian].

93. Manin Yu. I., “The theory of commutative formal groups over fields of finite characteristic”, *Russian Math. Surveys* **18**(6), 1–83 (1963).

94. Oort F., *Commutative group schemes. Lecture Notes in Mathematics* **15** (1966).

95. Bondarko M. V., Vostokov S. V., “An Explicit Classification of Formal Groups over Local Fields”, *Proc. Steklov Inst. Math.* **241**, 35–57 (2003).

96. Bondarko M. V., “Canonical Representatives in Strict Isomorphism Classes of Formal Groups”, *Math. Notes* **82**(2), 159–164 (2007). DOI: 10.1134/S0001434607070206.

97. Bondarko M. V., “Isogeny classes of formal groups over complete discrete valuation fields with an arbitrary residue field”, *St. Petersburg Math. J.* **17**(6), 975–988 (2006).

98. Bondarko M. V., “Explicit classification of formal groups over complete discrete valuation fields with imperfect residue field”, *AMS Transl. Ser. 2* **218**, 1–30 (2006).

99. Bondarko M. V., “Classification of finite commutative group schemes over complete discrete valuation rings; the tangent space and semistable reduction of Abelian varieties”, *St. Petersburg Math. J.* **18**(5), 737–755 (2007).

100. MacKenzie R. E., Whaples G., “Artin–Schreier equations in characteristic zero”, *Amer. J. Math.* **78**, 473–485 (1956).

101. Fesenko I. B., Vostokov S. V., Zhukov I. B., “On the theory of multidimensional local fields. Methods and constructions”, *Leningrad Math. J.* **3**(4), 775–800 (1991).

102. Boitsov V. G., Zhukov I. B., “Continuability of Cyclic Extensions of Complete Discrete Valuation Fields”, *J. Math. Sci.* **130**, 4643–4650 (2005).

103. Vostokov S. V., Zhukov I. B., “Some approaches to the construction of abelian extensions for $\mathfrak{p}$-adic fields”*Proc. St. Petersburg Math. Society. Amer. Math. Soc. Transl. (Ser. 2)* **3** (1995).

104. Lysenko E. F., Zhukov I. B., “Construction of cyclic extensions of degree p^2 for a complete field” (to appear).

105. Zhukov I, “Explicit abelian extensions of complete discrete valuation fields”, *Geom. Topol. Monogr.* **3**, 117–122 (Geom. Topol. Publ., Coventry, 2000). Available at: http://msp.org/gtm/2000/03 /p014.xhtml (assessed 07.06.2017).

106. Epp H., “Eliminating wild ramification”, *Invent. Math.* **19**, 235–249 (1973).

107. Madunts A. I., Zhukov I. B., “Multidimensional complete fields: topology and other basic constructions”, *Proc. St. Petersburg Math. Society. Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2.* **3**, 1–34 (1995).

108. Zhukov I., “Higher dimensional local fields”, *Geom. Topol. Monogr.* **3**, 5–18 (Geom. Topol. Publ., Coventry, 2000). DOI: 10.2140/gtm.2000.3.5.

109. Koroteev M. V., Zhukov I. B., “Elimination of wild ramification”, *St. Petersburg Math. J.* **11**, 1063–1083 (2000).

110. Ivanova O. Yu., Zhukov I. B., “On two approaches to classification of higher local fields” (in preparation).

111. Kurihara M., “On two types of complete discrete valuation fields”, *Compos. Math.* **63**, 237–257 (1987).

112. Ivanova O. Yu., “On the relationship between Kurihara’s classification and the theory of ramification removal”, *St. Petersburg Math. J.* **24**(2), 283–299 (2013).

113. Ivanova O. Yu., “Kurihara classification and maximal depth extensions for multidimensional local fields”, *St. Petersburg Math. J.* **24**(6), 877–901 (2013).

114. Zhukov I. B., “Milnor and topological K-groups of higher-dimensional complete fields”, *St. Petersburg Math. J.* **19**, 69–105 (1998).

115. Ivanova O. Yu., “The $\mathbb{Z}_p$-rank of a topological K-group”, *St. Petersburg Math. J.* **20**(4), 569–591 (2009).

116. Ivanova O. Yu., “Topological K-groups of two-dimensional local fields”, *J. Math. Sci.* **147**, 7088–7097 (2007).

117. Serre J.-P., *Corps Locaux* (2nd ed., Hermann, Paris, 1968).

118. Xiao L., Zhukov I., “Ramification in the imperfect residue field case, approaches and questions”, *St. Petersburg Math. J.* **26**, 695–740 (2015).

119. Xiao L., Zhukov I., “Ramification in the imperfect residue field case, approaches and questions”, *Proceedings of the 2nd international conference and workshop on valuation theory, Segovia and El Escorial, Spain, July 18–29, 2011*, 600–656 (Campillo, Antonio (ed.) et al. Zurich: European Mathematical Society (EMS). EMS Series of Congress Reports, 2014).

120. Abbes A., Saito T., “Ramification of local fields with imperfect residue fields. I”, *Amer. J. Math.* **124**, 879–920 (2002). arXiv:math/0010103.

121. Abbes A., Saito T., “Ramification of local fields with imperfect residue fields. II”, *Doc. Math.* Extra Vol. Kazuya Kato’s fiftieth birthday, 5–72 (2003).

122. Zhukov I. B., “On ramification theory in the imperfect residue field case”, *Mathematics* **194**, 1747–1774 (2003).

123. Zhukov I., “An approach to higher ramification theory”, *Geom. Topol. Monogr.* **3**, 143–150 (Geom. Topol. Publ., Coventry, 2000). DOI: 10.2140/gtm.2000.3.143.

124. Kato K., “Vanishing cycles, ramification of valuation and class field theory”, *Duke Math. J.* **55**, 629–659 (1987).

125. Abrashkin V. A., “Ramification theory for higher dimensional local fields”, *Algebraic number theory and algebraic geometry*, 1–16 (Contemp. Math., **300**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002).

126. Abrashkin V. A., “An analogue of the Grothendieck conjecture for the 2-dimensional local fields of finite characteristic”, *Proc. Steklov Inst. Math.* **241**, 8–42 (2003).

127. Abrashkin V. A., “Towards explicit description of ramification filtration in the 2-dimensional case”, *J. Théor. Nombres Bordeaux* **16**, 293–333 (2004).

128. Abrashkin V. A., “An analogue of the field-of-norms functor and of the Grothendieck conjecture”, *J. Algebraic Geom.* **16**(4), 671–730 (2007), arXiv:math/0503200.

129. Vostokov S. V. , Zhukov I. B., *On certain extensions of two-dimensional local fields.* In book: *International algebraic conference dedicated to the memory of D. K. Faddeev* (St. Petersburg, 1997).

130. Zhukov I. B., “Ramification in Elementary Abelian Extensions”, *J. Math. Sci.* **202**, 404–409 (2014).

131. Zhukov I. B., “The Elementary Abelian Conductor”, *J. Math. Sci.* **209**, 564–567 (2015).

132. Zhukov I. B., Pak G. K., “Approximation approach to ramification theory”, *St. Petersburg Math. J.* **27**, 967–976 (2016).

133. Laumon G., “Semi-continuité du conducteur de Swan (d’après P. Deligne)”, *Astérisque* **83**, 173–219 (1981).

134. Hu H., Yang E. “Semi-continuity for total dimension divisors of étale sheaves”, *Intern. J. Math.* **10** (2016).

135. Brylinski J.-L., “Théorie du corps de classes de Kato et revêtements abéliens de surfaces”, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **33**, 23–38 (1983).

136. Barrientos I., “Log ramification via curves in rank 1”, arXiv: 1307.5814.

137. Zhukov I. B., “Semiglobal models of extensions of two dimensional local fields”, *Vestnik St. Petersburg Univ. Math.* **43**(1), 33–38 (2010).

138. Zhukov I. B., “Ramification of surfaces: Artin-Schreier extensions”, *Algebraic number theory and algebraic geometry*, 211–220 (Contemp. Math., **300**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002).

139. Campillo A., Faizov I., Zhukov I., “Curve singularities and ramification of surface morphisms”, in preparation.

Для цитирования: Востоков С. В., Афанасьева С. С., Бондарко М. В., Волков В. В., Демченко О. В., Иконникова Е. В., Жуков И. Б., Некрасов И. И., Питаль П. Н. Явные конструкции и арифметика числовых локальных полей // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 3. С. 402–435. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.305

For citation: Vostokov S. V., Afanaseva S. S., Bondarko M. V., Volkov V. V., Demchenko O. V., Ikonnikova E. V., Zhukov I. B., Nekrasov I. I., Pital’ P. N. Explicit constructions and arithmetic of local number fields. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2017, vol. 4 (62), issue 3, pp. 402–435. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.305