УДК 519.85 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 3
MSC 15A80, 90C48, 65K05, 90C05

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДОВ ТРОПИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ*

Н. К. Кривулин, И. В. Романовский

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Рассматривается класс задач математического программирования, который включает задачи линейного и нелинейного программирования определенного вида. Сначала изучается задача линейного программирования и исследуется возможность построения ее прямого полного решения в терминах обычной математики без применения известных итеративных вычислительных процедур и алгоритмов линейного программирования таких, как симплексный метод. Предлагаются прямые решения задачи в случае сокращенного набора ограничений и минимальной размерности. Показывается, что с увеличением размерности построение таких решений становится слишком трудной проблемой, и потому вряд ли осуществимо. Приводятся примеры других задач линейного и нелинейного программирования, которые могут быть получены из рассмотренной выше путем изоморфных преобразований. Далее предлагается обзор основных обозначений и предварительных результатов тропической математики, необходимых для последующего описания и применения методов тропической оптимизации. Формулируется задача тропической оптимизации и приводятся прямые полные решения этой задачи и некоторых ее частных случаев. Задачи линейного и нелинейного программирования, поставленные выше, сводятся к задаче тропической оптимизации, что обеспечивает их прямое полное решение в терминах тропической математики. Приводится запись решения задачи линейного программирования с сокращенным набором ограничений в терминах обычной математики. Библиогр. 17 назв.

Ключевые слова: математическое программирование, линейное программирование, тропическая математика, идемпотентное полуполе, тропическая оптимизация.

1. Введение. Тропическая (идемпотентная) математика представляет собой область прикладной математики, которая изучает теорию и приложения полуколец с идемпотентным сложением. Первые исследования в этой области были опубликованы в работах зарубежных [1–4] и российских (советских) [5–7] авторов, и имели своей целью решение практических задач оптимизации и исследования операций. В дальнейшем область тропической математики успешно развивалась во многих работах, включая [8–11].

Задачи оптимизации, которые могут быть сформулированы и решены в терминах идемпотентных полуколец и полуполей (задачи тропической оптимизации), составляют важный раздел тропической математики, основным направлением развития которого является разработка новых эффективных методов решения как классических, так и ранее неизвестных оптимизационных задач. Методы тропической оптимизации находят применение при решении многих актуальных задач в различных областях, включая задачи планирования, размещения и принятия решений. Некоторые задачи допускают прямое полное решение в компактной векторной форме, в то время как для других задач известны только алгоритмические решения в виде итерационных численных процедур (см., например, короткий обзор задач и методов решения в [12]).

*Работа выполнена при финансовой поддержке РГНФ в рамках научного проекта № 16-02-00059.

 DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.307

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы для одного класса задач математического программирования разработать новый метод, который, в отличие от известных алгоритмических подходов, позволяет получить прямое полное решение задачи в явном виде. Предлагается решение на основе аппарата и методов тропической оптимизации, которое имеет полиномиальную вычислительную сложность и приводит к результатам, представленным в компактной векторной форме, удобной как для дальнейшего анализа решений, так и для непосредственных расчетов.

В работе сначала формулируется некоторая задача линейного программирования и обсуждается возможность ее прямого полного решения в замкнутой форме. Приводятся формулировки еще одной задачи линейного программирования, а также двух задач нелинейного (геометрического) программирования, которые могут быть получены из рассмотренной выше путем изоморфных преобразований. Далее предлагается обзор основных обозначений и предварительных результатов тропической математики, необходимых для последующего применения методов тропической оптимизации. Формулируются задачи тропической оптимизации и приводятся их прямые полные решения, полученные в работах [13–15]. Поставленные выше задачи математического программирования сводятся к задачам тропической оптимизации, что обеспечивает их прямое решение. Для задачи линейного программирования с сокращенным набором ограничений приводится запись этого решения в терминах обычной математики.

2. Задача линейного программирования. Предположим, что заданы параметры $a_{ij}, b_{ij}, p_i, q_j, r \in \mathbb{R}$, а также $g_i, h_i \in \mathbb{R}$ такие, что $g_i \leq h_i$, для всех $i, j = 1, \ldots, n$. Требуется определить значения неизвестных $x_i \in \mathbb{R}$ для всех $i = 0, 1, \ldots, n$, которые решают задачу линейного программирования

$$\begin{gathered} \min \quad x_0; \\ x_0 + x_i - x_j \geq a_{ij}, \quad x_0 + x_i \geq p_i, \quad x_0 - x_j \geq -q_j, \quad x_0 \geq r, \\ x_i - x_j \geq b_{ij}, \quad g_i \leq x_i \leq h_i, \quad i, j = 1, \ldots, n. \end{gathered} \tag{1}$$

Ясно, что для решения этой задачи можно применить одну из известных итеративных вычислительных схем линейного программирования [16] (например, симплексный метод), которые обеспечивают непрямой алгоритмический способ решения.

Кроме того, учитывая, что целевая функция задана в виде одной переменной x_0, для которой неравенства-ограничения указывают только нижние границы, решение задачи можно прямо свести к решению системы ограничений, а затем взять те решения системы, которые дают минимум x_0. Однако известные решения таких задач в общем случае также используют алгоритмические процедуры [17].

В силу того, что задача имеет весьма специальный вид (простая форма целевой функции, малое число переменных в каждом неравенстве и наличие у переменных только коэффициентов ± 1), можно ожидать, что найдется ее полное прямое решение, представленное в явной замкнутой форме.

Приведем некоторые примеры, которые показывают, что при использовании обычной арифметики нахождение явного решения может представлять значительные трудности, а при большой размерности задачи оказывается вряд ли возможным.

Сначала заметим, что неравенства, которые не включают переменную x_0, задают выпуклый многогранник, полученный пересечением n-мерного прямоугольного параллелепипеда $\{g_i \leq x_i \leq h_i | i = 1, \ldots, n\}$ с полупространствами, заданными неравенствами $x_i - x_j \geq b_{ij}$ при всех $i, j = 1, \ldots, n$. Учитывая, что количество вершин этого многогранника может изменяться в широких пределах и, вообще говоря, быть очень велико, прямое явное его описание (через вершины) вряд ли осуществимо. В то же время, этот многогранник, по существу, определяет допустимое множество для переменных $x_1, \ldots, x_n$ (если указанные неравенства справедливы, то для выполнения остальных неравенств можно просто выбрать достаточно большое значение для x_0). Понятно, что указанные проблемы с аналитическим описанием многогранника, приведут к очевидным трудностям представления общего решения в явном виде.

Ниже будут исследованы частные случаи задачи (1) с тем, чтобы попробовать записать их решения в явном виде, а также понять, с какими проблемами придется столкнуться при построении такого решения в общем случае задачи большой размерности.

2.1. Задача с сокращенным числом ограничений. Рассмотрим упрощенный вариант задачи (1), который имеет вид

$$\begin{gathered} \min \quad x_0; \\ x_0 + x_i - x_j \geq a_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, n. \end{gathered} \tag{2}$$

Нетрудно проверить, что минимум целевой функции этой задачи может быть найден в явном виде без особого труда (см., например, [2]). Действительно, выписывая и складывая соответствующие неравенства по два и по три, получим

$$x_0 \geq a_{ii}, \qquad x_0 \geq \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}, \qquad x_0 \geq \frac{a_{ij} + a_{jk} + a_{ki}}{3}, \qquad i, j, k = 1, \ldots, n.$$

В общем случае при сложении $k = 1, \ldots, n$ неравенств имеем

$$x_0 \geq \frac{a_{i_1 i_2} + a_{i_2 i_3} + \cdots + a_{i_k i_1}}{k}, \qquad i_1, \ldots, i_k = 1, \ldots, n.$$

Выражение в правой части вычисляется как среднее элементов матрицы $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, соответствующих циклическому пути (циклу) в графе, для которого $\boldsymbol{A}$ является матрицей смежности, и называется *циклическим средним* элементов матрицы $\boldsymbol{A}$.

Объединение полученных неравенств дает нижнюю оценку для целевой функции:

$$x_0 \geq \max_{1 \leq k \leq n} \max_{1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n} \frac{a_{i_1 i_2} + a_{i_2 i_3} + \cdots + a_{i_k i_1}}{k}. \tag{3}$$

Покажем, что это неравенство для всех решений задачи выполняется как равенство. Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_n$ — решение задачи. Сначала заметим, что для каждого индекса i найдется хотя бы один индекс j такой, что $x_0 + x_i - x_j = a_{ij}$. Действительно, если для всех j выполняется $x_0 + x_i - x_j > 0$, то, уменьшая значение x_i, можно получить равенство хотя бы в одном таком строгом неравенстве в то время, как все другие неравенства-ограничения, в которые x_i входит с отрицательным знаком, останутся выполненными.

Возьмем $i_1 = 1$ и найдем i_2 из условия равенства $x_0 + x_{i_1} - x_{i_2} = a_{i_1 i_2}$. Затем найдем i_3 из условия $x_0 + x_{i_2} - x_{i_3} = a_{i_2 i_3}$. Продолжая эту процедуру, будем строить последовательность индексов $i_1, i_2, \ldots$ Ясно, что в этой последовательности появятся повторяющиеся индексы. Выберем циклическую подпоследовательность индексов $i_l, i_{l+1}, \ldots, i_k$, где $i_k = i_l$, причем $1 \leq k - l \leq n$. Складывая равенства, соответствующие этой подпоследовательности, получим

$$(k - l) x_0 = a_{i_l i_{l+1}} + a_{i_{l+1} i_{l+2}} + \cdots + a_{i_{k-1} i_l}.$$

Это означает, что хотя бы одно циклическое среднее в правой части (3) равно x_0. Следовательно, неравенство (3) для решений задачи выполняется как равенство. Это равенство задает оптимальное значение x_0 и, тем самым, минимум в задаче (2).

Одно из решений задачи можно найти следующим образом [2]. Положим

$$x_0 = \max_{1\le k\le n} \max_{1\le i_1,\ldots,i_k\le n} \frac{a_{i_1i_2} + a_{i_2i_3} + \cdots + a_{i_ki_1}}{k}.$$

Тогда значения остальных неизвестных определяются так:

$$x_1=0, \quad x_2=x_0-a_{12}, \quad x_3=2x_0-a_{12}-a_{23}, \quad \ldots, \quad x_n=(n-1)x_0-a_{12}-a_{23}-\cdots-a_{n-1,n}.$$

Заметим, однако, что описание всех решений задачи (2) в замкнутой форме может оказаться более трудной задачей. Ниже приведен пример общего решения другого варианта задачи (1) малой размерности, записанного в компактном виде, и обсуждается возможность построения подобных решений для задач большой размерности.

2.2. Решение задачи малой размерности. Снова рассмотрим задачу (1) с сокращенным числом ограничений в виде

$$\begin{gathered} \min \quad x_0; \\ x_0 + x_i - x_j \ge a_{ij}, \quad x_i - x_j \ge b_{ij}, \quad i,j = 1,\ldots,n. \end{gathered} \tag{4}$$

При $n = 2$ задача примет следующий вид (ясно, что для разрешимости системы ограничений должно выполняться условие $b_{11}, b_{22} \le 0$):

$$\begin{gathered} \min \quad x_0; \\ x_0 \ge a_{11}, \quad x_0 + x_1 - x_2 \ge a_{12}, \quad x_0 - x_1 + x_2 \ge a_{21}, \quad x_0 \ge a_{22}, \\ x_1 - x_2 \ge b_{12}, \quad x_2 - x_1 \ge b_{21}. \end{gathered}$$

Решим систему неравенств-ограничений задачи путем исключения неизвестных [17]. Для этого преобразуем эту систему к виду

$$\begin{gathered} x_0 \ge \max(a_{11}, a_{22}), \quad -x_0 + a_{12} \le x_1 - x_2 \le x_0 - a_{21}, \\ b_{12} \le x_1 - x_2 \le -b_{21}. \end{gathered}$$

Для того чтобы полученная система была разрешима, необходимо выполнение условия $b_{12} \le -b_{21}$. При таком условии эта система эквивалентна следующей системе:

$$\begin{gathered} x_0 \ge \max(a_{11}, a_{22}), \quad -x_0 + a_{12} \le x_0 - a_{21}, \quad -x_0 + a_{12} \le -b_{21}, \quad b_{12} \le x_0 - a_{21}, \\ \max(-x_0 + a_{12}, b_{12}) \le x_1 - x_2 \le \min(x_0 - a_{21}, -b_{21}). \end{gathered}$$

После решения первых четырех неравенств относительно x_0 и объединения полученных результатов приходим к системе

$$\begin{gathered} x_0 \ge \max(a_{11}, a_{22}, (a_{12} + a_{21})/2, a_{12} + b_{21}, a_{21} + b_{12}), \\ \max(-x_0 + a_{12}, b_{12}) \le x_1 - x_2 \le \min(x_0 - a_{21}, -b_{21}). \end{gathered}$$

Учитывая, что требуется найти минимальное значение x_0, первое неравенство можно заменить равенством. Тогда полное решение задачи принимает вид

$$x_0 = \max(a_{11}, a_{22}, (a_{12} + a_{21})/2, a_{12} + b_{21}, a_{21} + b_{12}),$$

$$\max(-x_0 + a_{12}, b_{12}) \leq x_1 - x_2 \leq \min(x_0 - a_{21}, -b_{21}).$$

Ясно, что при $n = 2$ добавление других ограничений задачи (1) приведет к некоторому, но не слишком значительному, усложнению выкладок. Однако такой подход для решения задач при бо́льших значениях n потребует исследования слишком большого числа неравенств и не сможет обеспечить компактную запись общего решения, а поэтому представляется малопригодным.

Ниже будет показано, что применение методов и результатов тропической оптимизации позволяет представить все решения задачи (1) в компактной векторной форме, удобной как для дальнейшего анализа решений, так и для непосредственных расчетов.

2.3. Другие задачи математического программирования. В заключение этого раздела приведем примеры задач оптимизации, которые могут быть получены из задачи (1) путем изоморфных преобразований, и решение которых в терминах тропической математики принципиально не отличается от решения указанной задачи. Сначала заметим, что с помощью преобразования $x \mapsto -x$ задачу (1) можно привести к задаче линейного программирования такого вида:

$$\begin{gathered}\max \quad x_0;\\ x_0 + x_i - x_j \leq a_{ij}, \quad x_0 + x_i \leq p_i, \quad x_0 - x_j \leq -q_j, \quad x_0 \leq r,\\ x_i - x_j \leq b_{ij}, \quad g_i \leq x_i \leq h_i, \quad i, j = 1, \ldots, n.\end{gathered} \tag{5}$$

Кроме того, применение преобразования $x \mapsto \exp x$ трансформирует задачу (1) в задачу нелинейного (геометрического) программирования в форме

$$\begin{gathered}\min \quad x_0;\\ x_0 x_i x_j^{-1} \geq a_{ij}, \quad x_0 x_i \geq p_i, \quad x_0 x_j^{-1} \geq q_j^{-1}, \quad x_0 \geq r,\\ x_i x_j^{-1} \geq b_{ij}, \quad g_i \leq x_i \leq h_i, \quad i, j = 1, \ldots, n;\end{gathered} \tag{6}$$

при условии, что заданные параметры a_{ij}, b_{ij}, p_i, q_j, g_i и h_i, а также неизвестные переменные x_0 и x_i принимают неотрицательные значения при всех $i, j = 1, \ldots, n$.

Аналогично, преобразование $x \mapsto \exp(-x)$ приводит к задаче с положительными параметрами и неизвестными, которая имеет вид

$$\begin{gathered}\max \quad x_0;\\ x_0 x_i x_j^{-1} \leq a_{ij}, \quad x_0 x_i \leq p_i, \quad x_0 x_j^{-1} \leq q_j^{-1}, \quad x_0 \leq r,\\ x_i x_j^{-1} \leq b_{ij}, \quad g_i \leq x_i \leq h_i, \quad i, j = 1, \ldots, n.\end{gathered} \tag{7}$$

3. Элементы тропической математики. Приведем краткий обзор основных обозначений и предварительных результатов тропической математики [11], которые потребуются для описания задач тропической оптимизации и их решений, представленных ниже. Подробное изложение различных вопросов теории и приложений тропической математики можно найти в работах [8–10].

Идемпотентное (тропическое) полуполе представляет собой систему $(\mathbb{X}, \mathbb{0}, \mathbb{1}, \oplus, \otimes)$, в которой на непустом множестве $\mathbb{X}$ заданы операции сложения $\oplus$ и умножения $\otimes$ вместе с нейтральными элементами нулем $\mathbb{0}$ и единицей $\mathbb{1}$ так, что $(\mathbb{X}, \mathbb{0}, \oplus)$ образует идемпотентную коммутативную полугруппу с нулем, $(\mathbb{X} \setminus \{\mathbb{0}\}, \mathbb{1}, \otimes)$ — абелеву группу, а умножение дистрибутивно относительно сложения.

На множестве $\mathbb{X}$ определен частичный порядок так, что $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x \oplus y = y$. Относительно такого порядка операции сложения и умножения обладают свойством монотонности, а операция обращения является антитонной. Кроме того, для любых $x, y, z \in \mathbb{X}$ неравенство $x \oplus y \leq z$ оказывается равносильным системе из двух неравенств $x \leq z$ и $y \leq z$. Учитывая, что для введенного порядка всегда можно построить линейное продолжение, этот порядок считается линейным.

Степень с целым показателем определяется обычным путем: $x^0 = \mathbb{1}$, $x^p = x \otimes x^{p-1}$, $x^{-p} = (x^{-1})^p$ и $\mathbb{0}^p = \mathbb{0}$ для любых $x \neq \mathbb{0}$ и целого $p > 0$. Предполагается, что полуполе является алгебраически полным в смысле разрешимости относительно x уравнения $x^p = y$ при любом целом $p > 0$, из чего вытекает существование степеней с рациональным показателем. Далее знак умножения $\otimes$ будет для краткости опускаться.

Примеры идемпотентных полуполей включают: $\mathbb{R}_{\max,+} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, -\infty, 0, \max, +)$, $\mathbb{R}_{\min,+} = (\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, +\infty, 0, \min, +)$, $\mathbb{R}_{\max,\times} = (\mathbb{R}_+ \cup \{0\}, 0, 1, \max, \times)$ и $\mathbb{R}_{\min,\times} = (\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}, +\infty, 1, \min, \times)$, где $\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел и $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$.

Множество матриц, состоящих из m строк и n столбцов с элементами из $\mathbb{X}$, обозначается через $\mathbb{X}^{m \times n}$. Сложение и умножение матриц подходящего размера, а также умножение матрицы на скаляр выполняются по обычным правилам с заменой арифметических сложения и умножения на операции $\oplus$ и $\otimes$. Отношение порядка, введенное на $\mathbb{X}$, и связанные с ним свойства скалярных операций, прямо распространяются на матрицы, для которых неравенства понимаются как покомпонентные.

Рассмотрим множество квадратных матриц $\mathbb{X}^{n \times n}$. Матрица с элементами, равными $\mathbb{1}$ на диагонали и $\mathbb{0}$ — вне ее, является единичной и обозначается $\boldsymbol{I}$. Как обычно, целая положительная степень матрицы $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{n \times n}$ определяет произведения матрицы на себя так, что $\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{I}$ и $\boldsymbol{A}^p = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{p-1}$ для любого целого $p > 0$.

След матрицы $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ вычисляется по формуле $\operatorname{tr} \boldsymbol{A} = a_{11} \oplus \cdots \oplus a_{nn}$. Сумма следов степеней матрицы $\boldsymbol{A}$ обозначается через

$$\operatorname{Tr}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{tr} \boldsymbol{A} \oplus \cdots \oplus \operatorname{tr} \boldsymbol{A}^n = \bigoplus_{k=1}^{n} \operatorname{tr} \boldsymbol{A}^k.$$

Если $\operatorname{Tr}(\boldsymbol{A}) \leq \mathbb{1}$, то определена матрица (известная также как «звезда Клини»)

$$\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{A} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{A}^{n-1} = \bigoplus_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{A}^k.$$

Матрица, состоящая из одного столбца (строки), образует вектор-столбец (вектор-строку). Ниже все векторы считаются векторами-столбцами, если не указано иное. Множество векторов-столбцов порядка n над $\mathbb{X}$ обозначается через $\mathbb{X}^n$. Вектор, все элементы которого равны $\mathbb{0}$, является нулевым и обозначается $\mathbf{0}$. Вектор без нулевых элементов называется *регулярным*. Для любого ненулевого вектора-столбца $\boldsymbol{x} = (x_j)$ определен мультипликативно сопряженный вектор-строка $\boldsymbol{x}^- = (x_j^-)$ с элементами $x_j^- = x_j^{-1}$, если $x_j \neq \mathbb{0}$, и $x_j^- = \mathbb{0}$ в противном случае.

Скаляр $\lambda \in \mathbb{X}$ является собственным числом матрицы $\boldsymbol{A} \in \mathbb{X}^{n \times n}$, если найдется ненулевой вектор $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n$, удовлетворяющий равенству $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$. Максимальное (в смысле отношения порядка, индуцированного идемпотентным сложением) собственное число матрицы $\boldsymbol{A}$ называется *спектральным радиусом* и вычисляется по формуле

$$\lambda = \operatorname{tr} \boldsymbol{A} \oplus \cdots \oplus \operatorname{tr}^{1/n}(\boldsymbol{A}^n) = \bigoplus_{k=1}^{n} \operatorname{tr}^{1/k}(\boldsymbol{A}^k).$$

4. Задачи тропической оптимизации и их решения. В настоящем разделе приводится задача тропической оптимизации, сформулированная в терминах произвольного идемпотентного полуполя. Затем представлено прямое полное решение этой задачи и ее частных случаев в компактной векторной форме.

Пусть заданы матрицы $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{X}^{n\times n}$, векторы $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{h} \in \mathbb{X}^n$ и скаляр $r \in \mathbb{X}$. Требуется найти все регулярные векторы $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n$, которые решают задачу

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{p} \oplus \boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{x} \oplus r; \\ & \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{g} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{h}. \end{aligned} \tag{8}$$

Решение задачи (8) при достаточно общих условиях получено в [15]. Чтобы представить это решение, введем следующие обозначения для сумм произведений матриц:

$$\boldsymbol{S}_k = \bigoplus_{0\leq i_1+\cdots+i_k\leq n-k} \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{i_1}\cdots\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{i_k}, \qquad k = 1,\dots,n;$$

$$\boldsymbol{T}_k = \bigoplus_{0\leq i_0+i_1+\cdots+i_k\leq n-k-1} \boldsymbol{B}^{i_0}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{i_1}\cdots\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{i_k}), \qquad k = 1,\dots,n-1.$$

Прямое полное решение задачи дает такой результат.

Теорема 1. *Пусть матрица $\boldsymbol{A}$ имеет спектральный радиус λ, а матрица $\boldsymbol{B}$ такая, что $\operatorname{Tr}(\boldsymbol{B}) \leq \mathbb{1}$. Пусть $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{g}$ — векторы, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{h}$ — регулярные векторы, а r — скаляр такие, что $\boldsymbol{h}^{-}\boldsymbol{B}^{*}\boldsymbol{g} \leq \mathbb{1}$ и $\lambda \oplus (\boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{p})^{1/2} \oplus r > \mathbb{0}$. Тогда минимум в задаче* (8) *равен*

$$\begin{aligned} \theta = \bigoplus_{k=1}^{n} \operatorname{tr}^{1/k}(\boldsymbol{S}_k) \oplus \bigoplus_{k=1}^{n-1} (\boldsymbol{h}^{-}\boldsymbol{T}_k\boldsymbol{g})^{1/k} \oplus & \\ \oplus \bigoplus_{k=0}^{n-1} (\boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{T}_k\boldsymbol{g} \oplus \boldsymbol{h}^{-}\boldsymbol{T}_k\boldsymbol{p})^{1/(k+1)} \oplus \bigoplus_{k=0}^{n-1} (\boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{T}_k\boldsymbol{p})^{1/(k+2)} \oplus r, & \end{aligned}$$

а все регулярные решения имеют вид

$$\boldsymbol{x} = (\theta^{-1}\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B})^{*}\boldsymbol{u},$$

где $\boldsymbol{u}$ — любой регулярный вектор, который удовлетворяет условию

$$\theta^{-1}\boldsymbol{p} \oplus \boldsymbol{g} \leq \boldsymbol{u} \leq ((\theta^{-1}\boldsymbol{q}^{-} \oplus \boldsymbol{h}^{-})(\theta^{-1}\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B})^{*})^{-}.$$

В отсутствие ограничения в виде двойного неравенства задача принимает вид

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{p} \oplus \boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{x} \oplus r; \\ & \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}; \end{aligned} \tag{9}$$

а ее решение описывается как такое следствие теоремы 1 (см. также [14]).

Следствие 1. *Пусть матрица $\boldsymbol{A}$ имеет спектральный радиус λ, а матрица $\boldsymbol{B}$ такая, что $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{B}) \leq \mathbb{1}$. Пусть $\boldsymbol{p}$ — вектор, $\boldsymbol{q}$ — регулярный вектор, а r — скаляр такие, что $\lambda \oplus (\boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{p})^{1/2} \oplus r > \mathbb{0}$. Тогда минимум в задаче* (9) *равен*

$$\theta = \bigoplus_{k=1}^{n} \mathrm{tr}^{1/k}(\boldsymbol{S}_k) \oplus \bigoplus_{k=0}^{n-1} (\boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{T}_k\boldsymbol{p})^{1/(k+2)} \oplus r,$$

а все регулярные решения имеют вид

$$\boldsymbol{x} = (\theta^{-1}\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B})^{*}\boldsymbol{u}, \qquad \theta^{-1}\boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{u} \leq \theta(\boldsymbol{q}^{-}(\theta^{-1}\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B})^{*})^{-}.$$

Наконец, представим решение, которое было получено в [13] для задачи без ограничений с сокращенной целевой функцией,

$$\min \quad \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}. \tag{10}$$

Следствие 2. *Пусть матрица $\boldsymbol{A}$ имеет спектральный радиус $\lambda > \mathbb{0}$. Тогда минимум в задаче* (10) *равен λ, а все регулярные решения задачи имеют вид*

$$\boldsymbol{x} = (\lambda^{-1}\boldsymbol{A})^{*}\boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{u} > \boldsymbol{0}. \tag{11}$$

В заключение отметим, что вычислительная сложность решения, которое предлагает теорема 1, не превосходит $O(n^5)$, где n — размерность задачи [15].

5. Решение задач математического программирования. Представим задачу (1) в терминах идемпотентного полуполя $\mathbb{R}_{\max,+}$. После перестановки членов и замены обычных знаков операций на знаки тропической математики неравенства-ограничения задачи принимают вид

$$x_0 \geq x_i^{-1}a_{ij}x_j, \quad x_0 \geq p_i x_i^{-1}, \quad x_0 \geq q_j^{-1}x_j, \quad x_0 \geq r,$$
$$x_i \geq b_{ij}x_j, \quad g_i \leq x_i \leq h_i, \quad i,j = 1,\ldots,n.$$

Перейдем к векторной записи задачи, для чего введем векторы

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix},$$

а также матрицы

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Используя введенные обозначения, запишем ограничения в виде тропических векторных неравенств

$$x_0 \geq \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \quad x_0 \geq \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{p}, \quad x_0 \geq \boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{x}, \quad x_0 \geq r, \quad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{g} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{h}.$$

Объединение всех неравенств для x_0 приводит к одному эквивалентному неравенству $x_0 \geq \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{p} \oplus \boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{x} \oplus r$. Тогда неизвестное x_0 может быть исключено, а задача нахождения $\min x_0$ заменена на задачу нахождения $\min \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{p} \oplus \boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{x} \oplus r$.

Таким образом, задача (1) сводится в терминах тропической математики к задаче (8), решение которой предоставляет теорема 1. После трансляции результата теоремы на язык обычной математики можно получить решение задачи (1) в форме, соответствующей ее исходной постановке в виде задачи линейного программирования. Учитывая, что запись решения задачи на обычном языке в случае произвольной размерности n представляется достаточно громоздкой, она здесь не приводится.

Рассмотрим задачу линейного программирования с сокращенным набором ограничений (2). Нетрудно понять, что после ее представления в терминах полуполя $\mathbb{R}_{\max,+}$ получим задачу (10) с решением (11), которое дает следствие 2. Заметим, что в исходной постановке задачи все параметры a_{ij}, а также решения x_i предполагаются вещественными (то есть конечными). Тогда все элементы матрицы $\boldsymbol{A}$ в задаче (10) всегда будут больше, чем $\mathbb{0} = -\infty$, а сама матрица будет иметь спектральный радиус $\lambda > \mathbb{0}$.

Возвращаясь к исходной задаче линейного программирования, представим решение (11) в обычной форме. Обозначив элементы матрицы $(\lambda^{-1}\boldsymbol{A})^{*}$ через α_{ij}^{*}, получим решение в следующем виде.

Следствие 3. *Минимум в задаче* (2) *равен*

$$\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \max_{1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n} \frac{a_{i_1 i_2} + a_{i_2 i_3} + \cdots + a_{i_k i_1}}{k},$$

а все решения имеют вид

$$x_0 = \lambda, \qquad x_i = \max(\alpha_{i1}^{*} + u_1, \ldots, \alpha_{in}^{*} + u_n), \qquad u_i \in \mathbb{R}, \qquad i = 1, \ldots, n;$$

при условии, что $\alpha_{ii}^{*} = \max(\alpha_{ii}, 0)$ *и* $\alpha_{ij}^{*} = \alpha_{ij}$, *если* $i \neq j$, *где*

$$\alpha_{ij} = \max_{1 \leq k \leq n-1} \max_{\substack{1 \leq i_1, \ldots, i_{k-1} \leq n \\ i_0 = i, \ i_k = j}} (a_{i_0 i_1} + a_{i_1 i_2} + \cdots + a_{i_{k-1} i_k} - k\lambda), \qquad i, j = 1, \ldots, n.$$

Заметим, что для задачи (5) представление в виде задачи (8) и решение в форме теоремы 1 также применимы при условии их интерпретации в терминах полуполя $\mathbb{R}_{\min,+}$. Аналогичным образом, для задач (6) и (7) эти результаты будут справедливы в контексте полуполей $\mathbb{R}_{\max,\times}$ и $\mathbb{R}_{\min,\times}$ соответственно.

6. Заключение. В работе предложен новый метод решения некоторых задач линейного и нелинейного программирования на основе применения аппарата и результатов тропической оптимизации (оптимизации в пространстве векторов над идемпотентным полуполем). В отличие от известных алгоритмических подходов (таких, как симплексный алгоритм линейного программирования), предложенный метод обеспечивает прямое полное решение задачи в явном виде в компактной замкнутой форме, которое находится за полиномиальное время путем выполнения простых матрично-векторных операций. Полученные результаты могут быть полезными, когда численное (алгоритмическое) решение оказывается недостаточным и требуется полное аналитическое решение задачи.

Применение предложенного в работе подхода на основе тропической оптимизации для решения других задач математического программирования представляет значительный интерес и составляет одно из важных направлений дальнейших исследований.

Литература

1. *Pandit S. N. N.* A new matrix calculus // J. SIAM. 1961. Vol. 9, N 4. P. 632–639. DOI:10.1137/0109052.

2. *Cuninghame-Green R. A.* Describing industrial processes with interference and approximating their steady-state behaviour // Oper. Res. Quart. 1962. Vol. 13, N 1. P. 95–100. DOI:10.2307/3007584.

3. *Giffler B.* Scheduling general production systems using schedule algebra // Naval Res. Logist. Quart. 1963. Vol. 10, N 1. P. 237–255. DOI:10.1002/nav.3800100119.

4. *Hoffman A. J.* On abstract dual linear programs // Naval Res. Logist. Quart. 1963. Vol. 10, N 1. P. 369–373. DOI:10.1002/nav.3800100131.

5. *Воробьев Н. Н.* Экстремальная алгебра матриц // Докл. АН СССР. 1963. Т. 152, № 1. С. 24–27.

6. *Романовский И. В.* Асимптотическое поведение процессов динамического программирования с непрерывным множеством состояний // Докл. АН СССР. 1964. Т. 159, № 6. С. 1224–1227.

7. *Корбут А. А.* Экстремальные пространства // Докл. АН СССР. 1965. Т. 164, № 6. С. 1229–1231.

8. *Маслов В. П., Колокольцов В. Н.* Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. М.: Физматлит, 1994. 144 с.

9. *Golan J. S.* Semirings and Affine Equations Over Them. In Ser. Mathematics and Its Applications. Vol. 556. New York: Springer, 2003. 256 p. DOI:10.1007/978-94-017-0383-3.

10. *Heidergott B., Olsder G. J., van der Woude J.* Max Plus at Work. In: Princeton Series in Applied Mathematics. Princeton: Princeton Univ. Press, 2006. 226 p.

11. *Кривулин Н. К.* Методы идемпотентной алгебры в задачах моделирования и анализа сложных систем. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2009. 256 с.

12. *Krivulin N.* Tropical optimization problems // Advances in Economics and Optimization. Economic Issues, Problems and Perspectives / ed. by L. A. Petrosyan, J. V. Romanovsky, D. W.-K. Yeung. New York: Nova Sci. Publ., 2014. P. 195–214.

13. *Krivulin N.* Extremal properties of tropical eigenvalues and solutions to tropical optimization problems // Linear Algebra Appl. 2015. Vol. 468. P. 211–232. DOI:10.1016/j.laa.2014.06.044.

14. *Krivulin N. K., Sorokin V. N.* Solution of a tropical optimization problem with linear constraints // Vestnik St. Petersburg Univ. Math. 2015. Vol. 48, N 4. P. 224–232. DOI:10.3103/S1063454115040081.

15. *Krivulin N.* Direct solution to constrained tropical optimization problems with application to project scheduling // Comput. Manag. Sci. 2017. Vol. 14, N 1. P. 91–113. DOI:10.1007/s10287-016-0259-0.

16. *Романовский И. В.* Алгоритмы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1977. 352 с.

17. *Черников С. Н.* Линейные неравенства. М.: Наука, 1968. 488 с.

Статья поступила в редакцию 19 декабря 2016 г.; рекомендована в печать 30 марта 2017 г.

Сведения об авторах

Кривулин Николай Кимович — доктор физико-математических наук, доцент; nkk@math.spbu.ru

Романовский Иосиф Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор; josephromanovsky@gmail.com

SOLUTION OF MATHEMATICAL PROGRAMMING PROBLEMS USING METHODS OF TROPICAL OPTIMIZATION

Nikolai K. Krivulin, Joseph V. Romanovsky

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; nkk@math.spbu.ru, josephromanovsky@gmail.com

A class of mathematical programming problems, which includes linear and non-linear programming problems of a particular form is considered. First, a linear programming problem is examined and the possibility to derive a direct complete solution of the problem, which does not use known iterative computational procedures and algorithms of linear programming, such as the simplex algorithm is investigated. A direct solution of the problem with a reduced set of constraints and of the minimal dimension is given, and it is shown that, as the dimension increases, the derivation of such solutions becomes an extremely hard task, and thus is hardly feasible. Examples of other problems of linear and non-linear programming, which can be obtained by isomorphic transformations of the problem considered above are presented. Furthermore, an overview of main definitions and preliminary results of tropical mathematics, which are necessary in the subsequent description and application of methods of tropical mathematics is given. A tropical optimization problem is formulated, and direct complete solutions for the problem and its special cases are described. The above problems of linear and non-linear programming reduce to the tropical optimization problem, which provides a direct complete solution to the former problems in terms of tropical mathematics. For the linear programming problem with a reduced set of constraints a representation of the solution in the usual mathematical terms is demonstrated. Refs 17.

Keywords: mathematical programming, linear programming, tropical mathematics, idempotent semifield, tropical optimization.

References

1. Pandit S. N. N., "A new matrix calculus", *J. SIAM* **9**(4), 632–639 (1961). DOI:10.1137/0109052.

2. Cuninghame-Green R. A., "Describing industrial processes with interference and approximating their steady-state behaviour", *Oper. Res. Quart.* **13**(1), 95–100 (1962). DOI:10.2307/3007584.

3. Giffler B., "Scheduling general production systems using schedule algebra", *Naval Res. Logist. Quart.* **10**(1), 237–255 (1963). DOI:10.1002/nav.3800100119.

4. Hoffman A. J., "On abstract dual linear programs", *Naval Res. Logist. Quart.* **10**(1), 369–373 (1963). DOI:10.1002/nav.3800100131.

5. Vorob'ev N. N., "The extremal matrix algebra", *Soviet Math. Dokl.* **4**(5), 1220–1223 (1963).

6. Romanovsky J. V., "Asymptotic behavior of dynamic programming processes with a continuous set of states", *Soviet Math. Dokl.* **5**(6), 1684–1687 (1964).

7. Korbut A. A., "Extremal spaces", *Soviet Math. Dokl.* **6**(5), 1358–1361 (1965).

8. Maslov V. P., Kolokoltsov V. N., *Idempotent Analysis and Its Applications to Optimal Control Theory* (Nauka, Moscow, 1994, 144 p.) [in Russian].

9. Golan J. S., *Semirings and Affine Equations Over Them.* In Ser. *Mathematics and Its Applications* (Springer, New York, 2003, **556**, 256 p.). DOI:10.1007/978-94-017-0383-3.

10. Heidergott B., Olsder G. J., van der Woude J., *Max Plus at Work.* In *Princeton Series in Applied Mathematics* (Princeton Univ. Press, Princeton, 2006, 226 p.).

11. Krivulin N. K., *Methods of Idempotent Algebra for Problems in Modeling and Analysis of Complex Systems* (Saint Petersburg Univ. Press, St. Petersburg, 2009, 256 p.) [in Russian].

12. Krivulin N., "Tropical optimization problems", *Advances in Economics and Optimization. Economic Issues, Problems and Perspectives*, 195–214 (Eds L. A. Petrosyan, J. V. Romanovsky, D. W.-K. Yeung, Nova Sci. Publ., New York, 2014).

13. Krivulin N., "Extremal properties of tropical eigenvalues and solutions to tropical optimization problems", *Linear Algebra Appl.* **468**, 211–232 (2015). DOI:10.1016/j.laa.2014.06.044.

14. Krivulin N. K., Sorokin V. N., "Solution of a tropical optimization problem with linear constraints", *Vestnik St. Petersburg Univ. Math.* **48**(4), 224–232 (2015). DOI:10.3103/S1063454115040081.

15. Krivulin N., "Direct solution to constrained tropical optimization problems with application to project scheduling", *Comput. Manag. Sci.* **14**(1), 91–113 (2017). DOI:10.1007/s10287-016-0259-0.

16. Romanovsky J. V., *Algorithms for Solving Extremal Problems* (Nauka, Moscow, 1977, 352 p.) [in Russian].

17. Chernikov S. N., *Linear Inequalities* (Nauka, Moscow, 1968, 488 p.) [in Russian].

Для цитирования: Кривулин Н. К., Романовский И. В. Решение задач математического программирования с использованием методов тропической оптимизации // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 3. С. 448–458. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.307

For citation: Krivulin N. K., Romanovsky J. V. Solution of mathematical programming problems using methods of tropical optimization. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2017, vol. 4 (62), issue 3, pp. 448–458. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.307