УДК 519.2 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 3
MSC 60G50, 60F99

ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В «ИНТЕРВАЛЬНОЙ» ЦПТ ДЛЯ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ*

Л. В. Розовский

Санкт-Петербургская химико-фармацевтическая академия (СПХФА),
Российская Федерация, 197022, Санкт-Петербург, ул. Профессора Попова, 14

Исследуется зависимость остаточного члена в многомерной центральной предельной теореме для суммы независимых случайных векторов от меры множества, в которое эта сумма попадает. Полученные оценки уточняют и дополняют некоторые ранее известные результаты за счет ослабления моментных условий и более аккуратного учета зависимости от ковариационной матрицы. Также приводится вариант леммы сглаживания, который в одномерном случае является интервальной версией известной леммы Ессеена—Петрова. Библиогр. 8 назв.

Ключевые слова: центральная предельная теорема, независимые случайные векторы, объем борелевского множества.

1. Введение и результаты. Рассмотрим $\{X_j,\ j \geq 1\}$ — последовательность независимых случайных вектор-столбцов в R_k с нулевыми средними и конечными вторыми моментами, такими что $\sum_{j\geq 1}\mathbf{E}|X_j|^2 < \infty$. Положим $S = \sum_{j\geq 1} X_j$. Предположим, что матрица ковариаций суммы S

$$V = \mathbf{E}S\,S' = \sum_{j\geq 1}\mathbf{E}X_j\,X_j' \tag{1.1}$$

является невырожденной (знак $'$ обозначает транспонирование).

Пусть W является распределением суммы S, а Φ_V — гауссовским распределением в R_k с нулевым средним и ковариационной матрицей V.

В заметке приведены оценки для $|(W-\Phi_V)(\mathcal{B})|$ ($\mathcal{B}$ — борелевское множество в R_k), которые учитывают объем $\mathcal{B}$, и, в первую очередь за счет ослабления моментных условий, уточняют и дополняют некоторые результаты из [1–6].

Введем следующие обозначения.

Для любого $\varepsilon > 0$ положим $\mathcal{B}^{\varepsilon} = \{x : |x-y| < \varepsilon,\ y \in \mathcal{B}\}$ и $\mathcal{B}^{-\varepsilon} = R_k \setminus (R_k \setminus \mathcal{B})^{\varepsilon}$. Объем борелевского множества $\mathcal{B}$ в R_k обозначим через $\nu(\mathcal{B})$, а площадь его поверхности — через $s(\mathcal{B})$.

Нам также понадобятся обозначения для сумм усеченных моментов второго — четвертого порядков случайных величин $(t,\ X_j)$, например,

$$\Lambda(\varepsilon) = \sup_{|\theta|=1} V_\theta^{-2}\sum_{j\geq 1}\mathbf{E}(\theta,\ X_j)^2\, I[|(\theta,\ X_j)| > \varepsilon].$$

Здесь $(\theta,\ x) = \theta'\,x$ — скалярное произведение векторов θ и x, $V_\theta = \sqrt{\theta'\,V\,\theta}$ (см. (1.1)), а $I[\cdot]$ — индикатор соответствующего события.

Заметим, что при любом θ из R_k справедливо неравенство

$$\bar{\gamma}\,|\theta| \geq V_\theta \geq \gamma\,|\theta|, \tag{1.2}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-01-00367).

 DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.309

где, здесь и в дальнейшем, положительные $\bar{\gamma}$ и γ обозначают квадратные корни из максимального и минимального собственных чисел матрицы V соответственно.

Чтобы несколько сократить запись подынтегральных выражений, воспользуемся обозначением $\Theta(dx) = \sum\limits_{j\geq 1} \mathbf{P}(X_j \in dx)$. Таким образом, можем записать

$$\Lambda(\varepsilon) = \sup_{|\theta|=1} V_\theta^{-2} \int\limits_{|(\theta,\, x)|>\varepsilon} (\theta,\, x)^2\, \Theta(dx). \tag{1.3}$$

Положим также

$$\Gamma = \sup_{|\theta|=1} \left(\int\limits_{R_k} \left((\theta,\, x)^2 \wedge (\theta,\, x)^4\right)\, \Theta(V_\theta\, dx) + \left| \int\limits_{|(\theta,\, x)|\leq 1} (\theta,\, x)^3\, \Theta(V_\theta\, dx) \right| \right). \tag{1.4}$$

Приведем основной результат.

Теорема 1. *Пусть δ удовлетворяет условию*

$$\Lambda(\delta) \leq 1/4. \tag{1.5}$$

Тогда для любого борелевского множества $\mathcal{B}$ в R_k

$$|(W - \Phi_V)(\mathcal{B})| \leq A\, \left(\det{}^{-1/2} V\, \nu(\mathcal{B}^{a\delta})\, \Gamma + \alpha(\mathcal{B}, a\delta)\right), \tag{1.6}$$

$\alpha(\mathcal{B}, \varepsilon) = \sup\limits_{z\in R_k} \int\limits_{\mathcal{B}^\varepsilon \setminus \mathcal{B}^{-\varepsilon}} \Phi_V(z + dy)$, *постоянные A и a зависят лишь от k.*

Кроме того,

$$W(\mathcal{B}) \leq A \det{}^{-1/2} V\, \nu(\mathcal{B}^{a\delta}) \tag{1.7}$$

и (при любом $\varepsilon > 0$)

$$W(\mathcal{B}) \leq A\, \varepsilon^{-k}\, \nu(\mathcal{B}^\varepsilon). \tag{1.8}$$

В (1.6) и (1.7) можно положить a равным решению уравнения

$$k \int\limits_0^a \frac{J_{k/2}^2(r)}{r}\, dr = \frac{2}{3}, \tag{1.9}$$

где $J_\nu(\cdot)$ обозначает функцию Бесселя 1-го рода.

Замечание 1. Из (1.7), (1.8) следует, что неравенство (1.6) нетривиально лишь тогда, когда Γ достаточно мало, а δ в случае оптимального его выбора (т. е. при $\Lambda(\delta - 0) > 1/4$) не превосходит $c(k)\, \bar{\gamma}$ (см. (1.2)) при некотором $c(k)$, зависящем лишь от k.

Продолжим обсуждение правой части оценки (1.6).

Оптимальную (см. [5]) характеристику Γ можно упростить за счет некоторой потери точности. Положим

$$\check{\Gamma} = \sup_{|\theta|=1} V_\theta^{-2} \left(\int\limits_{|(\theta,\, x)|>\gamma} (\theta,\, x)^2\, \Theta(dx) + \gamma^{-1} \left| \int\limits_{|(\theta,\, x)|\le\gamma} (\theta,\, x)^3\, \Theta(dx) \right| + \right.$$

$$\left. + \gamma^{-2} \int\limits_{|(\theta,\, x)|\le\gamma} (\theta,\, x)^4\, \Theta(dx) \right), \qquad (1.10)$$

$$\bar{\Gamma} = \sup_{|\theta|=1} \left(\int\limits_{R_k} \left((\theta,\, x)^2 \wedge (\theta,\, x)^4 \right)\, \Theta(\gamma\, dx) + \left| \int\limits_{|(\theta,\, x)|\le 1} (\theta,\, x)^3\, \Theta(\gamma\, dx) \right| \right),$$

$$\hat{\Gamma} = \sup_{|\theta|=1} \int\limits_{R_k} \left((\theta,\, x)^2 \wedge |(\theta,\, x)|^3 \right)\, \Theta(\gamma\, dx), \quad \tilde{\Gamma} = \int\limits_{R_k} (|x|^2 \wedge |x|^3)\, \Theta(\gamma\, dx).$$

Замечание 2. Справедливы оценки

$$\Gamma \le \check{\Gamma} \le 2, \quad \Lambda(\gamma) \le \check{\Gamma} \le \bar{\Gamma} + \Lambda(\gamma) \le 2\,\bar{\Gamma} \quad \text{и} \quad \check{\Gamma} \le 2\,\hat{\Gamma} \le 2\,\tilde{\Gamma}.$$

Кроме того,

$$\Gamma \le 2 \sup_{|\theta|=1} V_\theta^{-2-r} \sum_{j\ge1} \mathbf{E}|(\theta, X_j)|^{2+r} \le 2\gamma^{-2-r} \sum_{j\ge1} \mathbf{E}|X_j|^{2+r}, \quad 0 < r \le 1$$

(см. также [4, замечание 1 и формулы (14)–(16)] и [7, стр. 29–30]).

Далее проанализируем параметр δ из (1.6).

Замечание 3. Пусть

$$\Lambda(d) < 1/4 \quad \text{для некоторого} \quad d \in (0, \infty). \qquad (1.11)$$

1. При $r > 0$ положим

$$\beta_{2+r}(d) = \sup_{|\theta|=1} V_\theta^{-2} \int\limits_{|(\theta,x)|\le d} |(\theta, x)|^{2+r}\, \Theta(dx), \quad \bar{\beta}_{2+r}(d) = \gamma^{-2} \int\limits_{|x|\le d} |x|^{2+r}\, \Theta(dx)$$

(очевидно, что $\beta_{2+r}(d) \le \bar{\beta}_{2+r}(d)$).

Условие (1.5) выполняется при $\delta = d \wedge \left(c_d\, \beta_{2+r}(d)\right)^{1/r}$ или $\delta = d \wedge \left(c_d\, \bar{\beta}_{2+r}(d)\right)^{1/r}$, где $c_d = (1/4 - \Lambda(d))^{-1}$, а также при

$$\delta = d \wedge 4 \sup_{0<z<d} z\, \Lambda(z). \qquad (1.12)$$

Отметим, что в этом случае справедливо неравенство

$$d\, \Lambda(d) \le \sup_{0<z<d} z\, \Lambda(z) \le d\, \Lambda(d) + \sup_{|\theta|=1} V_\theta^{-2} \int\limits_{|(\theta,\, x)|\le d} |(\theta,\, x)|^3\, \Theta(dx).$$

2. Имеем $\Lambda(\varepsilon) \le \Lambda(0) = 1$ и (см. (1.2))

$$\Lambda(\varepsilon) \le \bar{\Lambda}(\varepsilon) = \gamma^{-2} \sup_{|\theta|=1} \int\limits_{(\theta,\, x)>\varepsilon} |(\theta,\, x)|^2\, \Theta(dx) \le \tilde{\Lambda}(\varepsilon) = \gamma^{-2} \int\limits_{|x|>\varepsilon} |x|^2\, \Theta(dx)$$

(таким образом, в (1.5), (1.11) и (1.12) вместо $\Lambda(\cdot)$ можно подставить $\bar{\Lambda}(\cdot)$ или $\tilde{\Lambda}(\cdot)$).

3. В важном частном случае $S = S_n = \sum_{j=1}^n Y_j/\sqrt{n},\ n \ge 1$, где Y_j — независимые копии случайного k-мерного вектора Y с нулевым средним, ковариационной матрицей V и распределением F, получаем (т. е. X_j при $1 \le j \le n$ распределены также, как $Y_j/\sqrt{n}$, и $X_j = 0$ при $j > n$)

$$\delta = \delta_0/\sqrt{n}, \qquad \text{где} \qquad \Lambda(\delta_0)\Big|_{\Theta=F} \le 1/4.$$

Если $\beta_r = \mathbf{E}|Y|^{2+r} < \infty,\ r > 0$, можно положить $\delta_0 = (4 \sup\limits_{|\theta|=1} V_\theta^{-2} \mathbf{E}|(\theta, Y)|^{2+r})^{1/r}$, а Γ (см. (1.4)) оценить с помощью неравенства

$$\Gamma \le 2\, n^{-r/2} \sup_{|\theta|=1} V_\theta^{-2-r} \mathbf{E}|(\theta, Y)|^{2+r} \le 2\, n^{-r/2}\, \gamma^{-2-r}\, \beta_r, \quad 0 < r \le 1.$$

Приведем два следствия теоремы 1 и замечания 3.

Следствие 1. *Пусть*

$$\Lambda(\gamma) < 1/4. \tag{1.13}$$

Положим $\delta_* = \sup\limits_{0<z<\gamma} z\, \Lambda(z)$. *Тогда для любого борелевского множества* $\mathcal{B}$ *в* R_k

$$|(W - \Phi_V)(\mathcal{B})| \le$$
$$\le A \left(\det{}^{-1/2} V\, \nu(\mathcal{B}^{a\delta_*})\, \gamma^{-1} \left(\delta_* + \sup_{|\theta|=1} V_\theta^{-2} \left| \int\limits_{|(\theta,\, x)|\le\gamma} (\theta,\, x)^3\, \Theta(dx) \right| \right) + \alpha(\mathcal{B}, a\delta_*) \right),$$

где постоянные A *и* a *зависят лишь от* k. *При этом, если* $\bar{\gamma} < c(k)\, \gamma$ *(см.* (1.2)), *где* $c(k)$ *зависит лишь от* k, *то условие* (1.13) *можно отбросить.*

Следствие 2. *В условиях и обозначениях замечания* 3, *п.* 3, *для любого борелевского множества* $\mathcal{B}$ *в* R_k

$$|(W - \Phi_V)(\mathcal{B})| \le A \left(\nu(\mathcal{B}^{a\,\delta_0/\sqrt{n}})\, \gamma^{-2-r}\, \beta_r\, n^{-r/2} + \alpha\left(\mathcal{B}, a\frac{\delta_0}{\sqrt{n}} \right) \right),$$

где a *удовлетворяет* (1.9), *а постоянная* A *зависит лишь от* k.

Следствие 2 уточняет теорему 3(a) из [1]. Следствие 1 представляет собой новый результат.

Замечание 4. Очевидно неравенство

$$\alpha(\mathcal{B}, \varepsilon) \le (2\pi)^{-k/2} \det{}^{-1/2} V\, \nu(\mathcal{B}^{\varepsilon} \setminus \mathcal{B}^{-\varepsilon}). \tag{1.14}$$

Кроме того, если борелевское множество $\mathcal{B}$ является выпуклым, выполняется

$$\alpha(\mathcal{B},\varepsilon) \le 2\sqrt{2}\,\frac{\Gamma((k+1)/2)}{\Gamma(k/2)}\,\frac{\varepsilon}{\gamma}, \quad \alpha(\mathcal{B},\varepsilon) \le 2\,(2\pi)^{-k/2}\det{}^{-1/2}V\,\varepsilon\, s(\mathcal{B}^{\varepsilon}) \tag{1.15}$$

(при $k=1$ полагаем $s(\mathcal{B}^{\varepsilon})=1$).

Отметим, что из следствия 2 и оценки (1.14) вытекает лемма 4 из [2].

Приведем еще одно следствие теоремы 1 (и замечания 4).

Следствие 3. *Если выполнено условие* (1.5), *то для любого выпуклого борелевского множества* $\mathcal{B}$ *в* R_k

$$|(W-\Phi_V)(\mathcal{B})| \le A\det{}^{-1/2}V\left(\nu(\mathcal{B}^{a\delta})\,\Gamma + \frac{\det^{1/2}V}{\gamma}\wedge s(\mathcal{B}^{a\delta})\delta\right),$$

где постоянные A *и* a *зависят лишь от* k.

Ключевую роль в доказательстве теоремы 1 играет нижеследующий, представляющий самостоятельный интерес, результат, для формулировки которого нам понадобятся дополнительные обозначения.

Пусть $F(\cdot)$ является распределением, а $G(\cdot)$ — конечной обобщенной мерой в R_k, $\Delta(\mathcal{B})=(F-G)(\mathcal{B})$, $\hat{\Delta}(t)=\int\limits_{R_k} e^{i(t,x)}\Delta(dx)$. Обозначим

$$\Delta = \sup_{z\in R_k}|\Delta(\mathcal{B}+z)|, \quad G_\eta = \sup_{z\in R_k}\left|\int\limits_{\partial\mathcal{B}^{\,\eta}} G(z+dy)\right|, \tag{1.16}$$

где $\partial\mathcal{B}^{\,\eta}=\mathcal{B}^{\,\eta}\setminus\mathcal{B}$, если $\eta>0$, и $\mathcal{B}\setminus\mathcal{B}^{\,\eta}$ при $\eta<0$.

Теорема 2. *Пусть* $\gamma<1/2$ *и* $c>0$ *удовлетворяют условию* (*см.* (1.9))

$$k\int\limits_0^{c/2}\frac{J^2_{k/2}(r)}{r}\,dr \ge 1-\gamma. \tag{1.17}$$

Для любого борелевского множества $\mathcal{B}$ *в* R_k *и любого* $T>0$

$$\Delta \le (1-2\,\gamma)^{-1}\Bigg((2\pi)^{-k}\,\nu(\mathcal{B}^{c/T})\int\limits_{|t|\le T}|\hat{\Delta}(t)|\,u\left(1-\frac{|t|}{T}\right)dt+ \\ + \max_{\eta=\pm c/T} G_\eta + q\sup_{z\in R_k}\int\limits_{|y|\le c}\left|G(\mathcal{B}+z)-G\left(\mathcal{B}+z+\frac{y}{T}\right)\right|dy\Bigg), \tag{1.18}$$

где

$$u(z)=1\wedge\alpha_k\,z, \quad q=\frac{c_k}{(4\pi)^k}, \quad \alpha_k=\frac{k\,\Gamma(k/2)}{\Gamma((k+1)/2)\sqrt{\pi}}, \quad c_k=\frac{\pi^{k/2}}{\Gamma(k/2+1)} \tag{1.19}$$

(c_k — объем k-мерного единичного шара).

Обращаем внимание, что параметры в неравенстве (1.2) и теореме 2 различны.

Замечание 5. Если G является мерой в R_k, справедлива оценка

$$\sup_{z\in R_k}\int\limits_{|y|\le c}\left|G(\mathcal{B}+z)-G\left(\mathcal{B}+z+\frac{y}{T}\right)\right|dy\le c_k\,c^k\max_{\eta=\pm c/T}G_\eta.$$

Отметим, что в одномерном случае, когда $\mathcal{B}$ является конечным интервалом, теорема 2 представляет собой интервальную версию важной теоремы 1 из [3, гл. 5]. Основное отличие теоремы 2 от других аналогичных «лемм сглаживания» (см., например, [1, 2]) в том, что в ней не используются характеристики типа $\int\limits_{\partial\mathcal{B}^{\,\eta}}|G(z+dy)|$.

2. Доказательство теоремы 2. Дополним обозначения из (1.16). Пусть $Q(\cdot)$ является распределением в R_k, символ $*$ обозначает свертку,

$$\Delta_\eta=\sup_{z\in R_k}\left|\int\limits_{\mathcal{B}^{\,\eta}}\Delta*Q(z+dy)\right|,\quad \tilde G_\eta=\sup_{z\in R_k}\int\limits_{\partial\mathcal{B}^{\,\eta}}|G(z+dy)|. \tag{2.1}$$

Лемма 1. *Пусть* $\varepsilon>0$ *и* $0\le\gamma<1/2$ *удовлетворяют условию*

$$\int\limits_{|y|>\varepsilon}Q(dy)\le\gamma; \tag{2.2}$$

$$A_\varepsilon=\sup_{z\in R_k}\left|\int\limits_{|y|\le\varepsilon}\big(G(\mathcal{B}+z)-G(\mathcal{B}+z-y)\big)Q(dy)\right|. \tag{2.3}$$

Тогда

$$\Delta\le(1-2\,\gamma)^{-1}\left(\max_{\eta=\pm\varepsilon}\big(\Delta_\eta+G_\eta\big)+A_\varepsilon\right). \tag{2.4}$$

Замечание 6. Можно показать, что в обозначениях из (2.1) справедливы неравенства $A_\varepsilon\le(1-\gamma)(\tilde G_\varepsilon+\tilde G_{-\varepsilon})$ и $A_\varepsilon\le(1-\gamma)\max\limits_{\eta=\pm\varepsilon}\tilde G_\eta$, если G является мерой в R_k.

Доказательство леммы 1. Пусть $0<\tau<\Delta$. Выберем $z_0\in R_k$ таким образом, чтобы выполнялось $|\Delta(\mathcal{B}+z_0)|>\Delta-\tau$.

Пусть для определенности $\Delta(\mathcal{B}+z_0)<0$. Тогда, если множество $\mathcal{B}^{-\varepsilon}$ является пустым, будем иметь

$$\Delta<G(\mathcal{B}+z_0)+\tau\le G_{-\varepsilon}+\tau. \tag{2.5}$$

Далее рассмотрим случай непустого $\mathcal{B}^{-\varepsilon}$.

Имея в виду, что $\mathcal{B}^{-\varepsilon}\subset\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}^{-\varepsilon}-y\subset\mathcal{B}$, если $|y|\le\varepsilon$, получим

$$\Delta_{-\varepsilon}\ge-\int\limits_{R_k}(F-G)(\mathcal{B}^{-\varepsilon}+z_0-y)\,Q(dy)\ge$$

$$\ge-\int\limits_{|y|\le\varepsilon}\Delta(\mathcal{B}+z_0)\,Q(dy)-\int\limits_{|y|>\varepsilon}\Delta(\mathcal{B}+z_0-y)\,Q(dy)-$$

$$
-\int\limits_{|y|\le\varepsilon} G(\mathcal{B}+z_0)\,Q(dy) - \int\limits_{|y|>\varepsilon} G(\mathcal{B}+z_0-y)\,Q(dy)+
$$

$$
+\int\limits_{R_k} G(\mathcal{B}^{-\varepsilon}+z_0-y)\,Q(dy) \ge (1-\gamma)(\Delta-\tau)-\gamma\Delta - I_1 - I_2, \quad (2.6)
$$

где

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \left|\ \int\limits_{|y|\le\varepsilon} \big(G(\mathcal{B}+z_0)-G(\mathcal{B}+z_0-y)\big)\,Q(dy)\right|,\\
I_2 &= \left|\int\limits_{R_k} \big(G(\mathcal{B}+z_0-y)-G(\mathcal{B}^{-\varepsilon}+z_0-y)\big)\,Q(dy)\right|.
\end{aligned} \quad (2.7)
$$

Пусть теперь $\Delta(\mathcal{B}+z_0)>0$. Тогда, аналогично (2.6) и (2.7), получаем

$$
\Delta_\varepsilon \ge \int\limits_{R_k} (F-G)(\mathcal{B}^{\varepsilon}+z_0-y)\,Q(dy) \ge (1-2\,\gamma)\Delta-(1-\gamma)\tau - I_1 -
$$

$$
-\left|\int\limits_{R_k} (G(\mathcal{B}^{\varepsilon}+z_0-y)-G(\mathcal{B}+z_0-y))\,Q(dy)\right|. \quad (2.8)
$$

Оценка (2.4) следует из (2.5)–(2.8) в силу произвольности τ.
Лемма 1 доказана.

Положим (см. обозначения в (1.9) и теореме 2)

$$
q(x) = \frac{1}{c_k}\left(\frac{J_{k/2}(|x|/2)}{|x|^{k/2}}\right)^2, \quad x\in R_k. \quad (2.9)
$$

Можно показать, используя [8, п. 8.411.8] и проделав некоторые вычисления, что $q(x)$ является плотностью распределения с характеристической функцией

$$
\hat{q}(t) = \int e^{i(t,x)} q(x)\,dx = h_k(1-|t|) = 2\,B\left(\frac{k+1}{2},\frac{k+1}{2};\frac{1-|t|}{2}\right), \quad (2.10)
$$

где $B(m,n;z)$ обозначает бета-распределение с параметрами m и n в точке z (при $k=1$, например, $h_k(1-|t|)=1-|t|$). Также получаем

$$
\sup q(x) \le q = \frac{c_k}{(4\pi)^k}. \quad (2.11)
$$

Если в лемме 1 в качестве $Q(dy)$ выбрать $T^k\,q(T\,y)\,dy,\ T>0$, и положить $\varepsilon=c/T$, где $c=c(\gamma)$ удовлетворяет условию $\int_{|x|>c} q(x)\,dx\le\gamma$, или, что равносильно, (1.17), то условие (2.2) будет выполнено.

Далее (см. [1, 2]), при любом борелевском множестве $\mathcal{B}$ будем иметь

$$
\Delta * Q(\mathcal{B}) = (2\pi)^{-k}\int\limits_{R_k} v_{\mathcal{B}}(-t)\,\hat{\Delta}(t)\,\hat{Q}(t)\,dt,
$$

где

$$v_{\mathcal{B}}(t) = \int\limits_{\mathcal{B}} e^{i\,(t,x)} dx, \quad \hat{\Delta}(t) = \int\limits_{R_k} e^{i\,(t,x)} (F-G)(dx), \quad \hat{Q}(t) = \int\limits_{R_k} e^{i\,(t,x)} Q(dx),$$

и, следовательно, $|\Delta * Q(\mathcal{B})| \le \nu(\mathcal{B})\,(2\pi)^{-k} \int\limits_{R_k} |\hat{\Delta}(t)\,\hat{Q}(t)|\,dt$.

В нашем случае это дает

$$|\Delta * Q(\mathcal{B})| \le \nu(\mathcal{B})\,(2\pi)^{-k} \int\limits_{|t|\le T} |\hat{\Delta}(t)|\,h_k\left(1 - \frac{|t|}{T}\right) dt. \tag{2.12}$$

Очевидно (см. (2.10) и (1.19)), что выполняются неравенства $h_k(z) \le 1$ и

$$h_k(z) \le \alpha_k\, z\,(z\,(2-z))^{(k-1)/2} \le \alpha_k\, z, \quad 0 \le z \le 1. \tag{2.13}$$

Кроме того (см. 2.3)), при $\varepsilon = c/T$ имеем

$$A_\varepsilon \le \sup_{|y|\le c} q(y) \sup_{z\in R_k} \int\limits_{|y|\le c} \left| G(\mathcal{B}+z) - G\left(\mathcal{B} + z - \frac{y}{T}\right)\right| dy. \tag{2.14}$$

Теорема 2 является следствием соотношений (2.11)–(2.14).

3. Доказательства теоремы 1 и замечаний 1–4. Сначала приведем два вспомогательных результата. Пусть $Y_j,\ j = 1, 2, \ldots$, обозначают независимые (одномерные) случайные величины с нулевыми средними, конечными дисперсиями σ_j^2, функциями распределения $V_j(\cdot)$ и характеристическими функциями $v_j(\cdot)$. Будем предполагать, что

$$\sum_{j\ge 1} \sigma_j^2 = 1. \tag{3.1}$$

Обозначим

$$\begin{gathered} \mu_j = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x^2 \wedge x^4)\, dV_j(x), \quad \alpha_j = \int\limits_{|x|\le 1} x^3\, dV_j(x), \\ \tilde{\mu} = \sum_{j\ge 1} \mu_j, \quad \bar{\mu} = |\sum_{j\ge 1} \alpha_j|, \quad \mu = \tilde{\mu} + \bar{\mu}. \end{gathered} \tag{3.2}$$

Заметим, что в силу (3.1) $\tilde{\mu} \le 1$, $\mu \le 2$. Положим $v(t) = \prod\limits_{j\ge 1} v_j(t)$.

Лемма 2. *Пусть* $\mu \le 1/4$ *и* $|t| \le \mu^{-1/4}$. *Тогда*

$$|v(t) - e^{-t^2/2}| \le 1.042\,(t^2 \vee t^4)\, e^{-t^2/2}\, \mu.$$

Доказательство леммы 2. При $\mu_k \le 1/4$ имеем

$$\sigma_k^2 \le \int\limits_{|x|>1} x^2\, dV_k(x) + \sqrt{\int\limits_{|x|\le 1} x^4\, dV_k(x)} \le \sqrt{\mu_k}.$$

Отсюда (см. также [5, формула (3)]), получаем

$$\begin{gathered}|v_k(t)-1| \le \frac{1}{2}\,t^2\,\sigma_k^2 \le \frac{1}{2}\,t^2\,\sqrt{\mu_k} \le \frac{1}{2}\,t^2\,\sqrt{\tilde\mu} \le 1/2,\\ |v_k(t)-1|^2 \le \frac{1}{4}\,t^4\,\sigma_k^4 \le \frac{1}{4}\,t^4\,\mu_k,\\ \ln v_k(t) = v_k(t)-1+\theta_1\,|v_k(t)-1|^2, \quad |\theta_1| \le c_1 = 4\ln 2 - 2 = 0.7725887\ldots.\end{gathered} \tag{3.3}$$

Обозначим (см. (3.2))

$$\psi(t) = \sum_{k\ge 1}\left(v_k(t)-1+\frac{1}{2}\,t^2\,\sigma_k^2\right), \quad \tilde\mu_1 = \sum_{k\ge 1}\int\limits_{|x|>1} x^2\,dV_k(x), \quad \tilde\mu_2 = \tilde\mu - \tilde\mu_1.$$

Согласно (3.1)–(3.3) имеем $\ln v(t)\,e^{t^2/2} = \psi(t) + \theta_2\,\frac{1}{4}\,t^4\,\tilde\mu$, $|\theta_2| \le c_1$. При этом, можем записать

$$|\psi(t)| \le \frac{1}{6}\,|t|^3\,\bar\mu + \frac{1}{24}\,t^4 + c_2\,t^2\,\tilde\mu_1, \quad c_2 = \sup_{u>0}\frac{|e^{iu}-1-iu+u^2/2|}{u^2} = 0.5315518\ldots.$$

Таким образом, в условиях леммы 2 с учетом значений постоянных c_1, c_2 получаем

$$\ln v(t)\,e^{t^2/2} = \theta_3\,\left(\left(\frac{1}{24}+\frac{c_1}{4}\right)t^4 \vee \left(c_2+\frac{c_1}{4}\right)t^2\right)\mu, \quad |\theta_3| \le 1,$$

и $v(t)\,e^{t^2/2} - 1 = \theta_4\,2\tau\,e^{\tau}\,(t^2 \vee t^4)$, $|\theta_4| \le 1$, где $\tau = (c_2 + c_1/4)/2 < 0.3625$. Отсюда следует утверждение леммы 2.

Лемма 3 (см. [5, лемма]). *При любом* $\alpha \in [0, 2\pi]$

$$|v(t)| \le \exp\left\{-d(\alpha)\,t^2\,\left(1 - 3\,\lambda\left(\frac{\alpha}{2|t|}\right)\right)\right\},$$

где $\lambda(\varepsilon) = \sum\limits_{k\ge 1}\int\limits_{|x|>\varepsilon} x^2\,dV_k(x)$, $d(\alpha) = (1-\cos\alpha)/\alpha^2$.

Перейдем к непосредственному доказательству теоремы 1.

Пусть $Y_j = (t, X_j)/V_t$, $t \in R_k$, $j = 1, 2, \ldots$ ($V_t = \sqrt{t'\,V\,t}$). Тогда условие (3.1) выполняется. Положим

$$\Gamma_t = \int\limits_{R_k}\left((t,\,x)^2 \wedge (t,\,x)^4\right)\,\Theta(V_t\,dx) + \left|\int\limits_{|(t,\,x)|\le 1}(t,\,x)^3\,\Theta(V_t\,dx)\right|.$$

Из леммы 2 с учетом соотношений $f(t) = \mathbf{E}e^{i(t,S)} = v(V_t)$ и (см. (1.4) и (3.2)) $\mu = \Gamma_t \le \Gamma$ при любом $t \in R_k$ следует

$$|f(t) - e^{-V_t^2/2}| \le 1.042\,(V_t^2 \vee V_t^4)\,e^{-V_t^2/2}\,\Gamma, \quad \Gamma \le 1/4, \quad V_t \le \Gamma^{-1/4}, \tag{3.4}$$

а из леммы 3 (см. (1.3)) — $|f(t)| \le \exp\{-d(\alpha)\,V_t^2\left(1 - 3\,\Lambda(\alpha/2|t|)\right)\}$. Поэтому при выполнении условия (1.5) получаем

$$|f(t)| \le \exp\left\{-d(\alpha)\,\frac{V_t^2}{4}\right\}, \quad |t| \le \frac{\alpha}{2\delta}. \tag{3.5}$$

Оценка (1.6) в теореме 1 является следствием теоремы 2 (и замечания 5) при $F(\cdot) = W(\cdot)$, $G(\cdot) = \Phi_V(\cdot)$, $\gamma = 1/3$, $T = 2/\delta$, $c = 2a$ (см. (1.9)), и соотношений (3.4), (3.5) с $\alpha = 4$. Соотношения (1.7) и (1.8) получим аналогично, полагая $G(\cdot) = 0$ и применяя для оценки $|f(t)|$ неравенства (3.5) и $|f(t)| \le 1$ соответственно.

К замечанию 1. Поскольку $\nu(\mathcal{B}^\varepsilon)$ при непустом $\mathcal{B}$ не может быть меньше объема k-мерной сферы радиуса ε, из (1.9) вытекает, что оценка (1.8) становится тривиальной, а соотношение (1.6) малоинтересным, если, например, $\delta > c(k)\,(\det V)^{1/2k}$, тем более $\delta > c(k)\,\bar{\gamma}$.

К замечанию 3 п. 1. Если в (1.12) $\delta = d$, то условие (1.5) вытекает из (1.11). Иначе (т. е. при $\delta < d$), имеем $\Lambda(\delta) = \delta^{-1}\,(\delta\,\Lambda(\delta)) \le \delta^{-1} \sup\limits_{\delta<z<d} z\,\Lambda(z) \le 1/4$.

К замечанию 4. Пусть $E^2 = V^{-1}$. Тогда (см. (1.2)) получим $|Ex| \le |x|/\gamma$ и $(E\mathcal{B})^\varepsilon = \{x : |x-y| < \varepsilon,\ y \in E\mathcal{B}\} = \{x : |x - Ez| < \varepsilon,\ z \in \mathcal{B}\} = \{x : |E(E^{-1}x - z)| < \varepsilon,\ z \in \mathcal{B}\} \supset \{x : |E^{-1}x - z| < \varepsilon,\ z \in \mathcal{B}\} = E\mathcal{B}^\varepsilon$. Отсюда следует, что при любом борелевском множестве $\mathcal{B}$ в R_k

$$\Phi_V(\mathcal{B}^\varepsilon) = \Phi_I(E\mathcal{B}^\varepsilon) \le \Phi_I\big((E\mathcal{B})^{\varepsilon/\gamma}\big) \quad (I \text{ — единичная матрица}).$$

Остается применить эту оценку к $\partial\mathcal{B}$ — границе множества $\mathcal{B}$, имея в виду соотношение $\mathcal{B}^\varepsilon \setminus \mathcal{B}^{-\varepsilon} = (\partial\mathcal{B})^\varepsilon$, и затем воспользоваться леммой 9 из [1].

К следствию 1. $\check{\Gamma} \le \gamma^{-1}\left(2\,\delta_* + \sup\limits_{|\theta|=1} V_\theta^{-2}\left|\int\limits_{|(\theta,\,x)|\le\gamma} (\theta,\,x)^3\,\Theta(dx)\right|\right).$

Если условие (1.13) нарушается, то (см. (1.10)) $\check{\Gamma} \ge \Lambda(\gamma) \ge 1/4$. Далее используем оценки (1.7) и (1.8) при $\varepsilon = a\,\delta_*$, имея в виду неравенство, аналогичное (1.14).

Литература

1. *von Bahr B.* Multidimensional integral limit theorem // Ark. Mat. 1967. Vol. 7, N 6. P. 71–88.

2. *Osipov L. V.* On large deviations for sums of random vectors in R_k // J. Mult. Analysis. 1981. Vol. 11, N 2. P. 115–126.

3. *Петров В. В.* Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987. 320 с.

4. *Розовский Л. В.* Оценка скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме без моментных предположений // Матем. зам. 1978. Т. 23, № 4. С. 627–640.

5. *Розовский Л. В.* О точности нормального приближения // Зап. науч. семин. ЛОМИ. 1989. Т. 177. С. 129–137.

6. *Фомин С. В.* Оценка скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме // Теор. вероятн. и ее примен. 1982. Т. 27, вып. 2. С. 345–348.

7. *Бикялис А.* О центральной предельной теореме в R^k. I // Литовский матем. сб. 1971. Т. XI, вып. 1. С. 27–58.

8. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.

Статья поступила в редакцию 11 февраля 2017 г.; рекомендована в печать 30 марта 2017 г.

Сведения об авторе

Розовский Леонид Викторович — доктор физико-математических наук, профессор;
L_Rozovsky@mail.ru

ESTIMATES OF THE CONVERGENCE RATE IN THE “INTERVAL” CLT FOR SUMS OF INDEPENDENT RANDOM VECTORS

Leonid V. Rozovsky

St. Petersburg State Chemical Pharmaceutical Academy, ul. Professora Popova, 14, St. Petersburg, 197022, Russian Federation; L_Rozovsky@mail.ru

The remainder term in the multidimensional central limit theorem for sum of independent random vectors is evaluated taking into account the measure of the set which this sum falls into. The obtained estimates refine and supplement some previously known results due to the weakening of the moment conditions and a more accurate account of the dependence on the covariance matrix. A variant of the smoothing lemma, which in the one-dimensional case is an interval version of the known Esseen—Petrov lemma is also given. Refs 8.

Keywords: central limit theorem, independent random vectors, volume of borel set.

References

1. von Bahr B., “Multidimensional integral limit theorem”, *Ark. Mat.* **7**(6), 71–88 (1967).

2. Osipov L. V., “On large deviations for sums of random vectors in R_k”, *J. Mult. Analysis* **11**(2), 115–126 (1981).

3. Petrov V. V., *Limit theorems for sums of independent random variables* (Nauka, Moscow, 1987, 320 p.) [in Russian].

4. Rosovsky L. V., “An estimate of the speed of convergence in the multidimensional central limit theorem without moment hypotheses”, *Math. Notes* **23**(4), 343–351 (1978). DOI:10.1007/BF01786968.

5. Rosovsky L. V., “Accuracy of the normal approximation”, *J. Math. Sci.* **61**(1), 1911–1918 (1992). DOI:10.1007/BF01362804.

6. Fomin S. V., “An Estimate of the Rate of Convergence in the Multi-Dimensional Central Limit Theorem”, *Theory Probab. Appl.* **27**(2), 365–368 (1983). https://doi.org/10.1137/1127040.

7. Bikelis A., “On the central limit theorem in R^k. I”, *Litov. matem. sb.* **XI**(1), 27–58 (1971).

8. Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M., *Tables of integrals, sums, series and products* (Nauka, Moscow, 1971) [in Russian].

Для цитирования: Розовский Л. В. Оценки скорости сходимости в «интервальной» ЦПТ для сумм независимых случайных векторов // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 3. С. 466–476. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.309

For citation: Rozovsky L. V. Estimates of the convergence rate in the “interval” CLT for sums of independent random vectors. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2017, vol. 4 (62), issue 3, pp. 466–476. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.309