

## МЕХАНИКА

УДК 531.13  
MSC 83C10

## ДИНАМИКА ПЛАТФОРМЫ СТЮАРТА\*

*Б. Р. Андриевский<sup>1,3</sup>, Д. Г. Арсеньев<sup>1,2</sup>, С. А. Зегжда<sup>1</sup>, Д. В. Казунин<sup>1</sup>,  
Н. В. Кузнецов<sup>1</sup>, Г. А. Леонов<sup>1</sup>, П. Е. Товстик<sup>1</sup>, Т. П. Товстик<sup>3</sup>, М. П. Юшков<sup>1</sup>*

<sup>1</sup> Санкт-Петербургский государственный университет,

Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

<sup>2</sup> Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,

Российская Федерация, 195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

<sup>3</sup> Институт Проблем Машинovedения Российской Академии Наук,

Российская Федерация, 199178, Санкт-Петербург, Большой пр. В. О., 61

Рассматривается кинематика и динамика платформы Стюарта, опирающейся на шесть пневмоцилиндров. Записываются дифференциальные уравнения движения и вычисляются силы, обеспечивающие выполнение заданного закона движения. Для уточнения уравнений движения в рассмотрение вводятся инерция и вес пневмоцилиндров. Полученные уравнения применяются для исследования движения нагруженной платформы Стюарта, при этом для создания устойчивости этого движения строится обратная связь. Рассматриваются численные примеры. Библиогр. 17 назв. Ил. 5. Табл. 4.

*Ключевые слова:* платформа Стюарта, пневмоцилиндры, устойчивость движения.

**1. Введение.** Платформа Гью-Стюарта [1] получила широкое распространение в технике и используется, например, для создания универсальных металлообрабатывающих центров, при проектировании роботов-манипуляторов типа «хобот», для ориентации поверхностей радиотелескопов, при конструировании динамических стендов для обучения и тренировки летчиков и шоферов, а также для испытания на надежность бортовых систем самолетов и летательных аппаратов.

Работы [2–4] посвящены изучению кинематики платформы Стюарта. В статье [5] предложен алгоритм нахождения множества достижимых положений платформы. Для исследования динамики платформы в статьях [6, 7] используется формализм Ньютона—Эйлера, а в [4, 8] — формализм Лагранжа. В монографии [9] предлагается использование специальной формы уравнений движения твердого тела [10]. Вопросы устойчивости движений платформы Стюарта обсуждаются в работах [8, 11].

\*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (№ 14-21-00041).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2017

Вследствие неустойчивости таких движений полноценная работа стэнда может обеспечиваться только введением обратной связи. Способ ее построения для платформы с тремя стержнями указан в статье [12].

Предлагаемая работа является развитием статей [13, 14]. Управление движением платформы Стюарта осуществляется с помощью шести пневмоцилиндров, при этом учитываются их инерция и вес. Введены в рассмотрение обратные связи по перемещениям и по скоростям штоков, и исследована устойчивость движений при их наличии. Отметим, что аналогичные вопросы для платформы Стюарта с гидроцилиндрами рассмотрены в работе [15], причем в ней приведен обширный список литературы.

**2. Кинематика платформы Стюарта с шестью стержнями переменной длины.** Введем неподвижную систему координат  $O_0x_0y_0z_0$  с ортами  $i_0, j_0, k_0$  и подвижную систему координат  $Oxyz$  с ортами  $i, j, k$ , жестко связанную с платформой Стюарта (рис. 1, а). Шесть стержней переменной длины  $B_kA_k$  ( $k = \overline{1,6}$ ) имитируют пневмоцилиндры и прикреплены с помощью сферических шарниров одними концами к неподвижным точкам  $B_k$  пространства  $O_0x_0y_0z_0$ , а другими концами к платформе в точках  $A_k$  ( $k = \overline{1,6}$ ). Требуется получить заданное движение платформы Стюарта за счет изменения длин стержней (пневмоцилиндров).

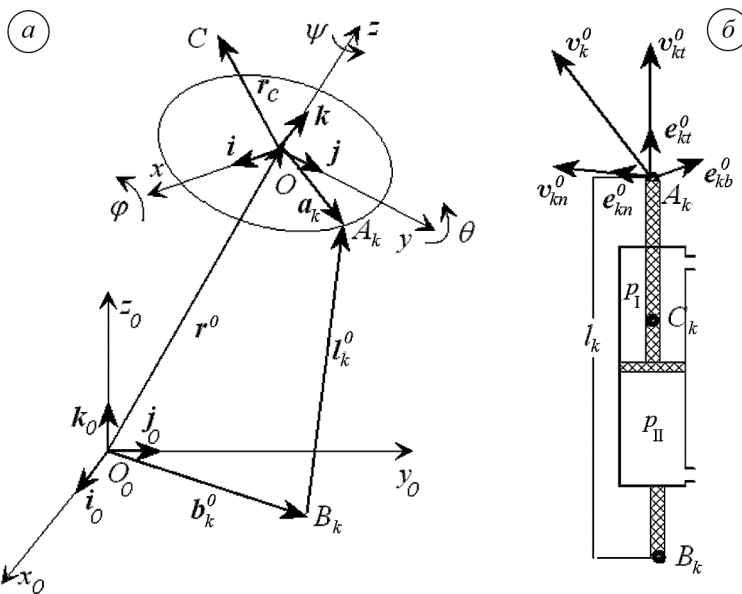


Рис. 1. Кинематика стэнда (а); пневмоцилиндр (б).

Ориентация платформы Стюарта определяется положением точки  $O$  (полюса):

$$\overrightarrow{O_0O} = \mathbf{r}^0(t) = x_0(t)\mathbf{i}_0 + y_0(t)\mathbf{j}_0 + z_0(t)\mathbf{k}_0 \quad (2.1)$$

и тремя последовательными углами поворота платформы вокруг полюса на углы рыскания ( $\psi$ ), тангажа ( $\theta$ ) и крена ( $\varphi$ ). Тензор поворота платформы  $\mathbf{P}(\psi, \theta, \varphi)$  опре-

деляется равенством

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_\psi C_\theta & -S_\psi C_\varphi + C_\psi S_\theta S_\varphi & S_\psi S_\varphi + C_\psi S_\theta C_\varphi \\ S_\psi C_\theta & C_\psi C_\varphi + S_\psi S_\theta S_\varphi & -C_\psi S_\varphi + S_\psi S_\theta C_\varphi \\ -S_\theta & C_\theta S_\varphi & C_\theta C_\varphi \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

где для краткости обозначено  $C_\varphi = \cos \varphi$ ,  $S_\theta = \sin \theta$  и т. п. Приведем формулы Пуассона для производной по времени тензора  $\mathbf{P}$  [16]:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}} &= \boldsymbol{\omega}^0 \times \mathbf{P}, \quad \boldsymbol{\omega}^0 = \omega_x^0 \mathbf{i}_0 + \omega_y^0 \mathbf{j}_0 + \omega_z^0 \mathbf{k}_0 = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k}, \\ \omega_x^0 &= \dot{\varphi} \cos \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi, \quad \omega_y^0 = \dot{\varphi} \cos \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \quad \omega_z^0 = \dot{\psi} - \dot{\varphi} \sin \theta, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $\boldsymbol{\omega}^0$  — угловая скорость вращения платформы.

Введем вектор обобщенных координат, определяющих положение платформы Стюарта,

$$\mathbf{q} = \{q_i\} = \{x_0, y_0, z_0, \varphi, \theta, \psi\}. \quad (2.4)$$

Если величины (2.4) заданы, длины пневмоцилиндров  $l_k$  и их направления  $\mathbf{e}_{kt}^0$  определяются по явным формулам

$$\overrightarrow{B_k A_k} = \mathbf{l}_k^0 = l_k \mathbf{e}_{kt}^0 = \mathbf{r}^0 + \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_k - \mathbf{b}_k^0, \quad k = \overline{1, 6}, \quad (2.5)$$

где постоянные векторы  $\mathbf{a}_k = \overrightarrow{O A_k}$  и  $\mathbf{b}_k^0 = \overrightarrow{O_0 B_k}$  задают координаты точек  $A_k$  и  $B_k$  крепления пневмоцилиндров в подвижной и неподвижной системах координат соответственно.

При задании длин пневмоцилиндров  $l_k$  для определения координат (2.4) нужно решить систему шести нелинейных уравнений

$$(\mathbf{r}^0 + \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_k - \mathbf{b}_k^0)^2 = l_k^2, \quad k = \overline{1, 6}, \quad (2.6)$$

относительно величин (2.4), входящих в  $\mathbf{r}^0$  и  $\mathbf{P}$ . После дифференцирования уравнений (2.6) по времени получаем систему линейных уравнений относительно  $\dot{\mathbf{r}}^0$ ,  $\boldsymbol{\omega}^0$ :

$$\dot{\mathbf{r}}^0 \cdot \mathbf{e}_{kt}^0 + (\boldsymbol{\omega}^0 \times \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_k) \cdot \mathbf{e}_{kt}^0 = \dot{l}_k, \quad k = \overline{1, 6}. \quad (2.7)$$

Перепишем систему (2.7) в виде

$$\mathbf{L}_k \cdot \mathbf{V}^0 = \dot{l}_k, \quad k = \overline{1, 6}, \quad (2.8)$$

где шестимерные «векторы»  $\mathbf{V}^0$  и  $\mathbf{L}_k$  определяются так:

$$\mathbf{V}^0 = \{\dot{\mathbf{r}}^0, \boldsymbol{\omega}^0\} = (\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, \omega_x^0, \omega_y^0, \omega_z^0)^T, \quad \mathbf{L}_k = \{\mathbf{e}_{kt}^0, \mathbf{a}_k^0 \times \mathbf{e}_{kt}^0\}, \quad \mathbf{a}_k^0 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_k. \quad (2.9)$$

В матричной форме система (2.8) записывается в виде

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{V}^0 = \dot{\mathbf{i}}, \quad \dot{\mathbf{i}} = (\dot{l}_1, \dots, \dot{l}_6)^T, \quad (2.10)$$

где матрица  $\mathbf{A}$  составлена из векторов-строк  $\mathbf{L}_k$ , значком  $T$  обозначено транспонирование.

Таким образом, если длины пневмоцилиндров  $l_k$  заданы как функции времени, то, решая систему (2.8) или (2.10), найдем, координаты вектора  $\mathbf{V}^0$ . Производные  $\dot{\varphi}$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\psi}$  находим по формулам

$$\dot{\varphi} = \frac{\omega_y^0 \sin \psi + \omega_x^0 \cos \psi}{\cos \theta}, \quad \dot{\theta} = \omega_y^0 \cos \psi - \omega_x^0 \sin \psi, \quad \dot{\psi} = \omega_z^0 + \dot{\varphi} \sin \theta. \quad (2.11)$$

Теперь величины  $q_i(t)$  получаем интегрированием, считая, что в начальный момент времени  $t = 0$  значения  $q_i(0) = q_i^0$  известны.

Движение возможно до тех пор, пока определитель матрицы  $\mathbf{A}$  отличен от нуля. Его обращение в нуль говорит о выходе на границу области управляемости.

**3. Дифференциальные уравнения движения нагруженной платформы Стюарта.** Уравнение движения центра тяжести  $C$  нагруженной платформы в неподвижной системе координат запишем следующим образом:

$$m(\ddot{\mathbf{r}}^0 + \dot{\boldsymbol{\omega}}^0 \times \mathbf{r}_c^0 + \boldsymbol{\omega}^0 \times (\boldsymbol{\omega}^0 \times \mathbf{r}_c^0)) + mg\mathbf{k}_0 = \mathbf{F}^0 = \sum_{k=1}^6 F_k \mathbf{e}_{kt}^0, \quad \mathbf{r}_c^0 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{r}_c, \quad (3.1)$$

где  $m$  — масса платформы с грузом,  $g$  — ускорение свободного падения,  $\overrightarrow{OC} = \mathbf{r}_c$  — радиус-вектор центра тяжести платформы в подвижной системе координат,  $\ddot{\mathbf{r}}^0$  — ускорение точки  $O$ ,  $F_k$  — силы, действующие на платформу со стороны стержней.

Уравнение моментов относительно центра тяжести  $C$  в подвижной системе координат имеет вид

$$J_c \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (J_c \cdot \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{M} = \sum_{k=1}^6 F_k (\mathbf{a}_k - \mathbf{r}_c) \times \mathbf{e}_{kt}, \quad \mathbf{e}_{kt} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{e}_{kt}^0, \quad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega}^0, \quad (3.2)$$

где  $J_c$  — тензор инерции относительно точки  $C$ . Через  $\mathbf{F}^0$  и  $\mathbf{M}$  обозначены главный вектор и главный момент сил, действующих на платформу со стороны пневмоцилиндров.

Система уравнений (3.1), (3.2), (2.10) имеет 12-й порядок и описывает движение нагруженной платформы при заданных силах.

#### 4. Решение прямой и обратной задач динамики платформы Стюарта.

Вначале остановимся на прямой задаче динамики платформы Стюарта, под которой будем понимать нахождение сил, развиваемых пневмоцилиндрами, обеспечивающих заданное движение платформы. Если обобщенные координаты (2.4)  $q_i(t)$  заданы как функции времени, тогда в уравнениях (3.1) и (3.2) величины  $\mathbf{F}^0$  и  $\mathbf{M}$  становятся известными. Переходя в уравнении (3.2) к проекциям на оси неподвижной системы координат, запишем систему (3.1), (3.2) в виде

$$\sum_{k=1}^6 F_k \mathbf{e}_{kt}^0 = \mathbf{F}^0, \quad \sum_{k=1}^6 F_k (\mathbf{a}_k^0 \times \mathbf{e}_{kt}^0) = \mathbf{M}^0 + \mathbf{r}_c^0 \times \mathbf{F}^0 = \hat{\mathbf{M}}^0, \quad \mathbf{M}^0 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{M}. \quad (4.1)$$

В матричной форме система (4.1) имеет вид

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{F} = \mathcal{F}^0, \quad \mathbf{F} = (F_1, \dots, F_6)^T, \quad \mathcal{F}^0 = (F_x^0, F_y^0, F_z^0, \hat{M}_x^0, \hat{M}_y^0, \hat{M}_z^0)^T, \quad (4.2)$$

где матрица  $\mathbf{A}$  та же, что и в (2.10).

При решении обратной задачи по известным силам, приложенным к платформе, путем интегрирования системы уравнений (3.1), (3.2), (2.10) находится движение нагруженной платформы Стюарта.

**5. Влияние инерции и веса пневмоцилиндров.** Найдем поправки, которые нужно внести в уравнения движения (3.1) и (3.2) для учета влияния сил инерции и веса пневмоцилиндров. Разложим вектор скорости  $\mathbf{v}_k^0 = \dot{\mathbf{r}}^0 + \boldsymbol{\omega}^0 \times \mathbf{a}_k^0$  точки  $A_k$  на направление  $\mathbf{e}_{kt}^0$  и перпендикулярное к нему направление  $\mathbf{e}_{kn}^0$  (см. рис. 1, б):

$$\mathbf{v}_k^0 = v_{kt}^0 \mathbf{e}_{kt}^0 + v_{kn}^0, \quad v_{kt}^0 = \mathbf{v}_k^0 \cdot \mathbf{e}_{kt}^0 = \dot{l}_k, \quad v_{kn}^0 = v_{kn}^0 \mathbf{e}_{kn}^0. \quad (5.1)$$

Тогда угловая скорость  $\boldsymbol{\omega}_k^0$  пневмоцилиндра определяется равенством

$$\boldsymbol{\omega}_k^0 = \frac{v_{kn}^0}{l_k} \mathbf{e}_{kb}^0, \quad \mathbf{e}_{kb}^0 = \mathbf{e}_{kt}^0 \times \mathbf{e}_{kn}^0. \quad (5.2)$$

Единичные векторы  $\mathbf{e}_{kt}^0$ ,  $\mathbf{e}_{kn}^0$  и  $\mathbf{e}_{kb}^0$  описывают подвижную систему координат, связанную с  $k$ -м пневмоцилиндром. Запишем ускорение точки  $A_k$ :

$$\mathbf{w}_k^0 = \ddot{\mathbf{r}}^0 + \dot{\boldsymbol{\omega}}^0 \times \mathbf{a}_k^0 + \boldsymbol{\omega}^0 \times (\boldsymbol{\omega}^0 \times \mathbf{a}_k^0) = w_{kt}^0 \mathbf{e}_{kt}^0 + w_{kn}^0 \mathbf{e}_{kn}^0 + w_{kb}^0 \mathbf{e}_{kb}^0. \quad (5.3)$$

С другой стороны, по теореме Кориолиса [17] имеем

$$\mathbf{w}_k^0 = \ddot{l}_k \mathbf{e}_{kt}^0 + 2\boldsymbol{\omega}_k^0 \times \dot{l}_k \mathbf{e}_{kt}^0 + \boldsymbol{\varepsilon}_k^0 \times \mathbf{l}_k^0 + \boldsymbol{\omega}_k^0 \times (\boldsymbol{\omega}_k^0 \times \mathbf{l}_k^0), \quad \mathbf{l}_k^0 = l_k \mathbf{e}_{kt}^0, \quad (5.4)$$

где  $\boldsymbol{\varepsilon}_k^0 = \varepsilon_{kn}^0 \mathbf{e}_{kn}^0 + \varepsilon_{kb}^0 \mathbf{e}_{kb}^0$  — искомое угловое ускорение пневмоцилиндра. Сравнивая формулы (5.3) и (5.4), находим

$$w_{kt}^0 = \ddot{l}_k - (\boldsymbol{\omega}_k^0)^2 l_k, \quad \varepsilon_{kn}^0 = -\frac{w_{kb}^0}{l_k}, \quad \varepsilon_{kb}^0 = \frac{w_{kn}^0}{l_k} - \frac{2v_{kn}^0 \dot{l}_k}{l_k^2}. \quad (5.5)$$

Запишем уравнения движения пневмоцилиндра и штока

$$J_k \boldsymbol{\varepsilon}_k^0 = \mathbf{M}_k^0 = \mathbf{l}_k^0 \times \hat{\mathbf{F}}_k - S_k g \mathbf{e}_{kt}^0 \times \mathbf{k}_0, \quad \hat{\mathbf{F}}_k = \hat{F}_{kn} \mathbf{e}_{kn}^0 + \hat{F}_{kb} \mathbf{e}_{kb}^0, \quad (5.6)$$

$$\hat{m}(\ddot{l}_k - \boldsymbol{\omega}_k^0{}^2 l_k) = \hat{F}_{kt} - \hat{m} g \mathbf{e}_{kt}^0 \cdot \mathbf{k}_0, \quad \hat{F}_{kt} = P_k - F_{kt}^0 - \nu \dot{l}_k,$$

где  $J_k = J_0 + \hat{J} + \hat{m} l_{kc}^2$ ,  $J_0$  — момент инерции пневмоцилиндра относительно точки  $B_k$ ,  $\hat{J}$  — момент инерции штока с поршнем относительно его центра тяжести  $C_k$  (см. рис. 1, б),  $\hat{m}$  — масса штока с поршнем,  $l_{kc} = B_k C_k = l_k - l_0$  — расстояние от центра тяжести  $C_k$  до неподвижной точки  $B_k$ ,  $l_0 = C_k A_k = \text{const}$ ,  $S_k = S_0 + \hat{m} l_{kc}$ ,  $S_0$  — статический момент пневмоцилиндра относительно точки  $B_k$ ,  $P_k$  — сила давления воздуха на поршень,  $\nu$  — коэффициент вязкого трения при движении поршня.

Теперь можно найти силу

$$\mathbf{F}_k^0 = F_{kt}^0 \mathbf{e}_{kt}^0 + F_{kn}^0 \mathbf{e}_{kn}^0 + F_{kb}^0 \mathbf{e}_{kb}^0, \quad (5.7)$$

действующую со стороны пневмоцилиндра на платформу, где

$$F_{kt}^0 = P_k - \nu \dot{l}_k - \hat{m}(w_{kt}^0 + \boldsymbol{\omega}_k^0{}^2 l_0 + g \mathbf{e}_{kt}^0 \cdot \mathbf{k}_0),$$

$$F_{kn}^0 = -\hat{F}_{kn} = -\frac{J_k w_{kn}^0}{l_k^2} + \frac{2J_k v_{kn}^0 \dot{l}_k}{l_k^3} - \frac{S_k g \mathbf{e}_{kn}^0 \cdot \mathbf{k}_0}{l_k}, \quad (5.8)$$

$$F_{kb}^0 = -\hat{F}_{kb} = -\frac{J_k w_{kb}^0}{l_k^2} - \frac{S_k g \mathbf{e}_{kb}^0 \cdot \mathbf{k}_0}{l_k}.$$

В уточненном варианте система (3.1), (3.2) записывается в виде

$$\begin{aligned} m(\ddot{\mathbf{r}}^0 + \dot{\boldsymbol{\omega}}^0 \times \mathbf{r}_c^0 + \boldsymbol{\omega}^0 \times (\boldsymbol{\omega}^0 \times \mathbf{r}_c^0)) + mg\mathbf{k}_0 &= \sum_{k=1}^6 \mathbf{F}_k^0, \\ J \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (J \cdot \boldsymbol{\omega}) &= \sum_{k=1}^6 \mathbf{a}_k \times \mathbf{F}_k, \quad \mathbf{F}_k = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{F}_k^0, \end{aligned} \quad (5.9)$$

где силы  $\mathbf{F}_k^0$  вычисляются по формуле (5.7).

При  $F_{kt} = P_k$ ,  $F_{kn} = F_{kb} = 0$  система (5.9) переходит в систему (3.1), (3.2). Для системы (5.9) задача вычисления сил по заданному движению платформы трансформируется в задачу вычисления величин  $P_k$ .

**6. Численные примеры.** Рассмотрим платформу Стюарта, у которой шарниры  $A_k$  и  $B_k$  симметрично расположены на подвижной и неподвижной окружностях соответственно радиусов  $R_a$  и  $R_b$ , находящихся в плоскостях  $Oxy$  и  $O_0x_0y_0$ .

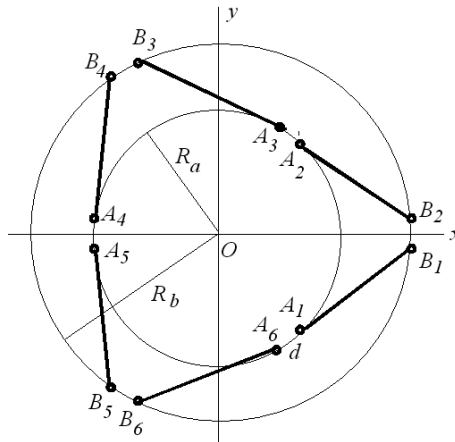


Рис. 2. Платформа Стюарта в проекции на горизонтальную плоскость.

Пусть минимальное расстояние между верхними и нижними шарнирами равно  $d$  (например,  $A_2A_3 = B_1B_2 = d$ ), а угол, при повороте на который получаем прежнее расположение шарниров, равен  $2\pi/3$  (рис. 2). Примем, что в начальном положении расстояние между плоскостями верхних и нижних шарниров равно  $h$ . Считаем, что в начальном положении центр тяжести  $C$  платформы и укрепленного на ней твердого тела лежит над центрами окружностей, причем  $z_c > 0$ .

Пусть  $R_a = 0.7608$  м,  $R_b = 1$  м,  $d = 0.2$  м,  $h = 1.0196$  м,  $z_c = 0.8$  м,  $l = 1.255$  м,  $mg = 10^4$  Н. В уравнениях кинематики и динамики данной платформы перейдем к безразмерным переменным. За единицу длины примем величину  $R_b$ , за единицу силы – вес  $mg$  нагруженной платформы. Введем безразмерное время, полагая  $\tilde{t} = \omega t$  ( $\omega^2 = g/R_b$ ). В дальнейшем знак  $\sim$  опускаем.

Сила инерции и вес пневмоцилиндров не учитывались.

Анализ динамики платформы начнем с вычисления усилий в пневмоцилиндрах, обеспечивающих простейшее заданное колебательное вертикальное движение платформы по закону

$$z_0(t) = 0.2(1 - e^{-t/2})^2 \sin t. \quad (6.1)$$

Перемещение по вертикали представлено в таком виде для того, чтобы в начальный момент времени и скорость, и ускорение платформы были равны нулю. В против-

ном случае в начальный момент времени потребовалось бы мгновенное ударное приложение силы или ее скачок. При сделанных предположениях усилия, создаваемые пневмоцилиндрами для осуществления движения (6.1), будут одинаковыми (рис. 3).

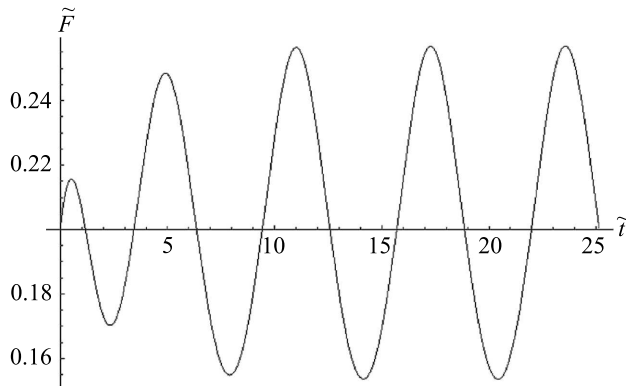


Рис. 3. Усилия в пневмоцилиндрах.

Перейдем к обсуждению обратной задачи динамики для случая движения по вертикали. Это движение описывается одним дифференциальным уравнением второго порядка относительно  $z_0(t)$ . Поэтому решение прямой задачи позволяет определить усилие  $F(t)$  в аналитической форме. Его использование при численном решении обратной задачи приводит при достаточно большом промежутке времени к заметной ошибке, что говорит о неустойчивости. Устойчивого движения удастся добиться лишь с помощью обратной связи, которая будет введена в следующем пункте.

**7. Построение обратной связи. Стабилизация положения равновесия и движений по вертикали и по горизонтали.** Целью управления является получение заданного движения платформы. Предположим для простоты, что силы инерции пневмоцилиндров не учитываются. Тогда в соответствии со сказанным в пункте 4 по заданным функциям  $q_i^p(t)$  находим силы  $F_k^p(t)$ , которые нужно приложить к платформе со стороны пневмоцилиндров (индексом  $p$  отмечаем программное движение). Однако такой способ управления невозможен, ибо, как отмечалось выше, даже простейшее движение платформы в виде вертикальных колебаний оказывается неустойчивым. Поэтому предлагается ввести обратные связи и задавать приложенные силы в виде

$$F_k(t) = F_k^p(t) + G(l_k^p(t) - l_k(t)), \quad k = \overline{1, 6}, \quad (7.1)$$

где  $l_k^p(t)$  — программные длины пневмоцилиндров, вычисляемые по формулам (2.6),  $l_k(t)$  — длины, измеряемые в процессе движения,  $G$  — коэффициент обратной связи.

При обсуждении величины  $G$  ограничимся линейным приближением. Предположим первоначально, что  $q_i^p(t) = 0$ , т. е. рассмотрим задачу о стабилизации положения равновесия платформы. В этом случае в формуле (7.1) функции  $F_k^p(t)$  и  $l_k^p(t)$  становятся постоянными величинами, при этом система оказывается консервативной, ибо обратные связи можно рассматривать как пружины с жесткостью  $G$ . Потенциальная энергия системы определяется выражением

$$\Pi = -\frac{1}{2}mgz_c(\varphi^2 + \theta^2) + \frac{1}{2}G \sum_{k=1}^6 (\Delta l_k)^2 = -\frac{1}{2}mgz_c(\varphi^2 + \theta^2) + \frac{1}{2}G \mathbf{q}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{q}. \quad (7.2)$$

Здесь  $\mathbf{q}$  — вектор обобщенных координат (2.4), а матрица  $\mathbf{C}$  такова:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}, \quad (7.3)$$

где матрица  $\mathbf{A}$  та же, что и в (2.10). Матрица  $\mathbf{C}$  симметричная и положительно определенная, поэтому коэффициент  $G$  можно выбрать настолько большим, чтобы потенциальная энергия (7.2) была положительно определенной, что обеспечивает устойчивость положения равновесия платформы [16]. Из расчетов следует, что в рассматриваемом случае это будет при  $G > 0.5807mgz_0l^{-2}$ .

Используя численный эксперимент, покажем, что введение обратной связи (7.1) позволяет стабилизировать установившиеся колебания рассматриваемой платформы по вертикали и горизонтали, заданные в виде

$$z_0^p(t) = 0.2 \sin t, \quad (7.4)$$

$$x_0^p(t) = 0.2 \sin t. \quad (7.5)$$

Выше, когда была обнаружена неустойчивость движения платформы по вертикали, использовалось точное аналитическое решение прямой задачи, так как вертикальное движение описывалось одним дифференциальным уравнением второго порядка. Теперь при исследовании и горизонтального, и вертикального движений платформы будем применять единый подход, при котором при решении как прямой, так и обратной задач будут использоваться все шесть дифференциальных уравнений движения.

В случае вертикальных колебаний (7.4) безразмерные усилия  $F_k^p(t)$  во всех стержнях изменяются по периодическому закону с периодом  $2\pi$  и с амплитудой 0.056 относительно среднего значения 0.212 и не зависят от  $k$ . Возмутим эти программные усилия, добавляя к ним соответственно силы

$$\Delta F_k^p(t) = \delta \sin(2t + k\pi/3), \quad k = \overline{1, 6}. \quad (7.6)$$

Устойчивость движений при наличии этих возмущений будем обеспечивать введением обратных связей (7.1). Расчеты показали, что при  $\tilde{G} = GR_b/(mg) = 100$  и  $\delta = 0.04$  отклонения  $z_0^p(t) - z_0(t)$ ,  $k = \overline{1, 6}$ , (здесь  $z_0(t)$  — безразмерное осуществляемое движение) не превосходят по модулю величины  $10^{-5}$ , а при  $\tilde{G} = 30$  и  $\delta = 0.02$  — величины  $4 \cdot 10^{-5}$ . Отметим, что  $\delta = 0.02$  соизмеримо с амплитудой колебаний  $F_k^p(t)$ . Обратим внимание на то, что если в (7.1) отсутствуют  $F_k^p(t)$ , то и в этом случае отклонения  $z_0^p(t) - z_0(t)$  по модулю не превосходят величины  $6 \cdot 10^{-3}$ , если  $\tilde{G} = 100$ . Отсюда следует, что точная информация об усилиях  $F_k^p(t)$ , обеспечивающих программное движение, необязательна.

При горизонтальных колебаниях (7.5) усилия в пневмоцилиндрах представлены на рис. 4. Расчеты показали, что при возмущении данных усилий на величины (7.6) получим следующие результаты: при  $\tilde{G} = 30$ ,  $\delta = 0.02$  отклонения  $x_{0k}^p(t) - x_{0k}(t)$  не превосходят по модулю величины  $4 \cdot 10^{-3}$ , а при  $\tilde{G} = 30$ ,  $\delta = 0.04$  — величины 0.0075. Если же  $\tilde{G} = 100$ ,  $\delta = 0.02$ , то погрешность по сравнению с предыдущим случаем уменьшится в 10 раз. Особо отметим, что величина  $\delta = 0.04$  согласно рис. 4 соизмерима с амплитудой колебаний в программных усилиях в 4-м и 5-м стержнях.

**8. Линеаризация уравнений движения платформы.** Рассмотрим малые колебания симметричной платформы в предположениях, сделанных в п. 6. В качестве



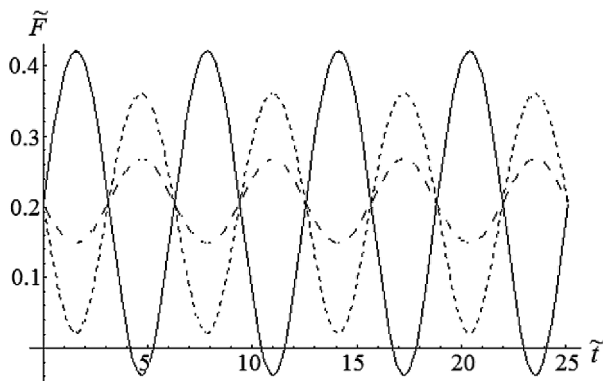


Рис. 4. Программные усилия в пневмоцилиндрах при горизонтальных колебаниях (стержни 1 и 2 — сплошная линия, 3 и 6 — пунктир, 4 и 5 — штрих-пунктир).

отсчетного возьмем положение равновесия, в котором все обобщенные координаты равны нулю, а длины стержней и усилия в них постоянны:

$$\mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad l_k = l_0 = 1.255, \quad F_k = F_0 = 0.205, \quad k = \overline{1, 6}. \quad (8.1)$$

Введем возмущения  $s_k$  длин стержней (перемещения поршней) по формуле  $l_k = l_0 + s_k$ . При малых  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_6)^T$  и  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_6)^T$  связь между ними дается формулой

$$\mathbf{s} = \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{q}, \quad \mathbf{A}_0 = \left\{ \left. \frac{\partial l_j}{\partial q_i} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} \right\} = \lim_{\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{0}} \mathbf{A}, \quad (8.2)$$

где матрица  $\mathbf{A}$  та же, что и в (2.10).

Матрица  $\mathbf{A}_0$  для размеров стенда, приведенных в п. 6, имеет вид

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} -0.424 & -0.401 & 0.812 & -0.490 & -0.377 & -0.442 \\ -0.424 & 0.401 & 0.812 & 0.490 & -0.377 & 0.442 \\ 0.559 & -0.166 & 0.812 & 0.571 & -0.236 & -0.442 \\ -0.136 & -0.568 & 0.812 & 0.081 & 0.612 & 0.442 \\ -0.136 & 0.568 & 0.812 & -0.081 & 0.612 & -0.442 \\ 0.559 & 0.166 & 0.812 & -0.571 & -0.236 & 0.442 \end{pmatrix}. \quad (8.3)$$

Предположим дополнительно, что тензор инерции  $\mathbf{J}$  платформы шаровой:

$$\mathbf{J} = m\rho^2 \mathbf{E}, \quad \rho = 0.8, \quad (8.4)$$

где  $\rho$  — радиус инерции,  $\mathbf{E}$  — единичный тензор.

Для малых  $\mathbf{q}$  запишем уравнения движения платформы, выделив в них линейные слагаемые:

$$\mathbf{B} \cdot \ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{C} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{f} + \mathbf{f}^{err} = \mathcal{F}^0 = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{F}, \quad (8.5)$$

где ненулевые элементы постоянных матриц  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  и вектора  $\mathbf{f}$  равны

$$\begin{aligned} b_{11} = b_{22} = b_{33} = 1, \quad b_{44} = b_{55} = b_{66} = \rho^2 + z_c^2, \\ b_{15} = b_{51} = \rho^2 z_c, \quad b_{24} = b_{42} = -\rho^2 z_c, \\ c_{44} = c_{55} = z_c, \quad f_3 = 1. \end{aligned} \quad (8.6)$$

В формуле (8.5) вектор  $\mathbf{f}^{err}$  включает нелинейные слагаемые системы (3.1), (3.2), а также погрешности модели, в частности, вес и инерцию пневмоцилиндров, вектор  $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_6)^T$  описывает силы, приложенные со стороны стержней.

Пусть задано программное движение  $\mathbf{q}^p(t)$ . По формуле (8.2) находим  $\mathbf{s}^p = \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{q}^p$ . Строго говоря, величина  $\mathbf{s}^p$  должна определяться, как это описано в п. 2. Совершенное при этом различие может быть включено в  $\mathbf{f}^{err}$ . Программное значение  $\mathbf{F} = \mathbf{F}^p$  определяем из системы (8.5) при  $\mathbf{f}^{err} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{q} = \mathbf{q}^p$ . Теперь можем написать

$$\mathbf{B} \cdot \ddot{\mathbf{q}}^p - \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{q}}^p + \mathbf{f} = \mathbf{A}_0^T \cdot \mathbf{F}^p. \quad (8.7)$$

Как показано на примерах в п. 7, точность задания  $\mathbf{F}^p$  слабо влияет на результирующее движение.

С целью стабилизации движения добавим к силам  $\mathbf{F}^p$  управляющие силы  $\mathbf{F}^c$ , положив в уравнении (8.5)  $\mathbf{F} = \mathbf{F}^p + \mathbf{F}^c$ . Введем разности действительного и программного движений:

$$\delta \mathbf{q} = \mathbf{q} - \mathbf{q}^p, \quad \delta \mathbf{s} = \mathbf{s} - \mathbf{s}^p, \quad \delta \mathbf{s} = \mathbf{A}_0 \cdot \delta \mathbf{q}. \quad (8.8)$$

Зададим управляющие силы  $\mathbf{F}^c$  по формуле

$$\mathbf{F}^c = -G\delta \mathbf{s} - G_f \delta \dot{\mathbf{s}}, \quad (8.9)$$

где постоянные  $G \geq 0$  и  $G_f \geq 0$  подлежат выбору из условия минимизации вектора  $\delta \mathbf{s}$ . Разность уравнений (8.5) и (8.7) дает

$$\mathbf{B} \cdot (\mathbf{A}_0)^{-1} \cdot \delta \ddot{\mathbf{s}} - \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A}_0)^{-1} \cdot \delta \dot{\mathbf{s}} + \mathbf{A}_0^T \cdot (G\delta \mathbf{s} + G_f \delta \dot{\mathbf{s}}) + \mathbf{f}^{err} = \mathbf{0}. \quad (8.10)$$

Это уравнение позволяет исследовать устойчивость движения и оценить величину  $\delta \mathbf{s}$ .

**9. Исследование уравнения (8.10).** Перепишем уравнение (8.10) в виде

$$\delta \ddot{\mathbf{s}} - \mathbf{C}_* \cdot \delta \dot{\mathbf{s}} + \mathbf{A}_* \cdot (G\delta \mathbf{s} + G_f \delta \dot{\mathbf{s}}) + \mathbf{A}_{err} \cdot \mathbf{f}^{err} = \mathbf{0}, \quad (9.1)$$

где

$$\mathbf{C}_* = \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A}_0)^{-1}, \quad \mathbf{A}_* = \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}_0^T, \quad \mathbf{A}_{err} = \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{B}^{-1}. \quad (9.2)$$

При  $\mathbf{f}^{err} = \mathbf{0}$  нулевое решение уравнения (9.1) асимптотически устойчиво, если все корни  $\lambda$  характеристического уравнения

$$\det(\lambda^2 \mathbf{E} - \mathbf{C}_* + \mathbf{A}_*(G + \lambda G_f)) = 0 \quad (9.3)$$

имеют отрицательные вещественные части.

Матрица  $\mathbf{C}_*$  симметричная положительная, а матрица  $\mathbf{A}_*$  симметричная положительно определенная. Отсюда сразу следует, что при отсутствии управления ( $G = G_f = 0$ ) нулевое решение неустойчиво, а при достаточно большом  $G$  устойчиво и при  $G_f > 0$  асимптотически устойчиво.

Приведем численные результаты для платформы с параметрами, принятыми выше.

При  $G = G_f = 0$  уравнение (9.3) имеет 8-кратный нулевой корень и две пары корней  $\lambda = \pm 0.887$ , что говорит о неустойчивости.

Таблица 1. Частоты собственных колебаний

$G$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$	$\omega_6$
1	0.47	0.47	0.97	1.23	1.23	1.99
2	0.93	0.93	1.35	1.84	1.84	2.81
10	2.37	2.37	3.033	4.34	4.34	6.29
100	7.65	7.65	9.75	13.88	13.88	19.89
$\infty$	0.77	0.77	0.96	1.39	1.39	1.99

Устойчивость наступает при  $G > 0.706$ , и при  $G_f = 0$  имеет место режим незатухающих колебаний. В табл. 1 для ряда значений  $G$  приведены частоты собственных колебаний  $\omega_k = i\lambda_k$ .

Две пары частот  $\omega_1 = \omega_2$  и  $\omega_4 = \omega_5$  являются кратными. В последней строке табл. 1 приведены предельные отношения  $\omega_k/\sqrt{G}$  при  $G \rightarrow \infty$ . Информация о частотах важна для того, чтобы избежать возможных резонансов, которые могут иметь место в случаях, когда малые возмущения  $\mathbf{f}^{err}$  являются периодическими функциями времени.

В табл. 1 приведены безразмерные частоты. Размерные частоты  $\nu_k$  (в Герцах) могут быть найдены по формуле

$$\nu_k = \frac{\omega_k}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{R_b}} = 0.498 \omega_k, \quad k = \overline{1, 6}. \quad (9.4)$$

**10. О выборе коэффициентов  $G$  и  $G_f$ .** Здесь приводятся нестрогие оценки о выборе коэффициентов  $G$  и  $G_f$ . Пусть  $\omega_0$  — характерная частота программного движения  $\mathbf{q}^p(t)$ . Характерной частотой возмущений  $\mathbf{f}^{err}$  следует считать  $2\omega_0$ , ибо они состоят в основном из квадратичных слагаемых. Поэтому следует выбирать  $G$  таким образом, чтобы было выполнено неравенство

$$2\omega_0 < \min_k \omega_k(G). \quad (10.1)$$

Пусть  $G \gg 1$ ,  $G_f \sim 1$ . Тогда главными в уравнении (8.10) будут слагаемые

$$GA_0^T \cdot \delta \mathbf{s} + \mathbf{f}^{err} = \mathbf{0}. \quad (10.2)$$

Отсюда следует, что при отсутствии резонансов имеет место оценка

$$|\delta \mathbf{s}| \sim \frac{|\mathbf{f}^{err}|}{G}. \quad (10.3)$$

Рассмотрим влияние запаздывания на управление. Запишем уравнение (9.1), введя в управление постоянное запаздывание  $\tau$ :

$$\delta \ddot{\mathbf{s}}(t) - \mathbf{C}_* \cdot \delta \mathbf{s}(t) + \mathbf{A}_* \cdot (G\delta \mathbf{s}(t - \tau) + G_f \delta \dot{\mathbf{s}}(t - \tau)) + \mathbf{A}_{err} \cdot \mathbf{f}^{err} = \mathbf{0}. \quad (10.4)$$

Запаздывание естественным образом связано со временем, которое необходимо пневмоцилиндрам для создания управляющего давления по формулам (8.9).

Считая запаздывание малым, введем в уравнение (10.4) разложение

$$\delta \mathbf{s}(t - \tau) = \delta \mathbf{s}(t) - \tau \delta \dot{\mathbf{s}}(t) + \frac{\tau^2}{2} \delta \ddot{\mathbf{s}}(t). \quad (10.5)$$

Тогда характеристическое уравнение для (10.5) принимает вид

$$\det(\lambda^2(\mathbf{E} - k\mathbf{A}_*) + \lambda\mathbf{A}_*(G_f - \tau G) + G\mathbf{A}_* - \mathbf{C}) = 0, \quad (10.6)$$

где  $k = \tau G_f - \tau^2 G/2$ . Для асимптотической устойчивости достаточно выполнения трех условий: установленного ранее условия  $G > 0.706$ , неравенства  $G_f > \tau G$  и положительной определенности матрицы  $\mathbf{E} - k\mathbf{A}_*$ . Последнее условие будет выполнено при

$$k < \frac{1}{\rho_{\max}}, \quad (10.7)$$

где  $\rho_{\max}$  — наибольшее собственное значение матрицы  $\mathbf{A}_*$ . Для рассматриваемых параметров  $\rho_{\max} = 3.956$ .

Для коэффициента  $G_f$  получаем двухстороннюю оценку

$$\tau G < G_f < \frac{\tau G}{2} + \frac{1}{\tau \rho_{\max}}. \quad (10.8)$$

Левая часть неравенства (10.8) меньше правой, если

$$G < \frac{2}{\tau^2 \rho_{\max}}. \quad (10.9)$$

Последнее неравенство накладывает ограничение на коэффициент  $G$  при наличии запаздывания.

**11. Некоторые численные результаты.** Рассмотрим динамику симметричной управляемой платформы Стюарта с параметрами, описанными в п. 6. Используем введенные в п. 6 безразмерные переменные. Дополнительно предположим, что тензор инерции подвижного тела круговой с радиусом инерции  $\rho = 0.8$ .

Множество возможных движений тела весьма обширно. В дополнение к примерам п. 7 рассмотрим моделирование сложного движения тела, участвующего в одном поступательном и двух вращательных движениях. В качестве программного движения возьмем

$$\begin{aligned} q_1^p(t) &= a_1 \sin \nu t, & q_5^p(t) &= a_5 \sin \nu t, & q_6^p(t) &= a_6 \sin \nu t, \\ q_2^p(t) &= q_3^p(t) = q_4^p(t) = 0, \end{aligned} \quad (11.1)$$

где  $a_k$  — заданные амплитуды линейных и угловых колебаний.

Будем интегрировать систему уравнений (8.5), вычисляя вектор программных перемещений поршней  $\mathbf{s}^p$  по точным формулам (2.6), а программные усилия в штоках  $\mathbf{F}^p$  — из приближенной системы (8.7), в которой удержаны только линейные слагаемые. Возможное запаздывание управления, а также динамику пневмоцилиндров не учитываем.

Качество управления будем оценивать относительной погрешностью  $\eta$ , равной

$$\eta = \frac{\|\delta \mathbf{q}\|}{\|\mathbf{q}^p\|}, \quad \delta \mathbf{q} = \mathbf{q} - \mathbf{q}^p, \quad (11.2)$$

где норма вектора определена соотношением

$$\|\mathbf{q}\| = \max_{t,k} |q_k(t)|. \quad (11.3)$$

Будем исследовать качество управления в зависимости от параметров обратной связи  $G$ ,  $G_f$ , от амплитуды колебаний программного движения  $a$  (в предположении, что  $a = a_1 = a_5 = a_6$ ) и от частоты колебаний  $\nu \leq 5$  (в размерном времени частота ограничена 2.5 Гц). Считаем сначала, что начальные условия для действительного и программного движений совпадают.

Таблица 2. Зависимость  $\eta(\nu)$

№	$a$	$G$	$G_f$	$\nu = 1$	2	3	4	5
1	0.1	100	5	0.010	0.016	0.027	0.042	0.061
2	0.1	30	2	0.034	0.055	0.094	0.152	0.231
3	0.1	10	1	0.107	0.183	0.331	0.556	0.911
4	0.1	3	0.3	0.476	1.043	2.660	2.377	1.811
5	0.2	100	5	0.010	0.016	0.027	0.042	0.062
6	0.2	30	2	0.033	0.054	0.094	0.155	0.239
7	0.2	10	1	0.107	0.183	0.341	0.581	0.962
8	0.2	3	0.3	0.482	1.094	3.074	2.417	1.865
9	0.2	30	1	0.033	0.055	0.096	0.163	0.266
10	0.2	30	5	0.033	0.052	0.084	0.126	0.174

В табл. 2 для двух значений амплитуды  $a$  и пяти значений частоты колебаний  $\nu$  представлены значения функции качества управления  $\eta(\nu)$  в зависимости от параметров обратной связи  $G$  и  $G_f$ . Данные табл. 2 позволяют сделать следующие выводы.

В соответствии с приближенной формулой (10.3) с ростом  $G$  функция  $\eta(\nu)$  убывает примерно как  $1/G$ . При  $G \sim 3$  принятый способ управления неприменим (требуется более точное задание сил  $F^p$ ).

Функция  $\eta(\nu)$  существенно возрастает вместе с частотой  $\nu$ .

Как показывает сравнение строк 1–4 и 5–8, для относительно малых значений  $\eta(\nu)$  (скажем,  $\eta(\nu) < 0.5$ ) эта функция слабо зависит от амплитуды  $a$ . Зависимость проявляется лишь в области, где описанный способ управления неприменим.

Зависимость от параметра  $G_f$  следует из сравнения строки 6 со строками 9 и 10. С ростом  $G_f$  функция  $\eta(\nu)$  убывает, причем более существенно при больших частотах  $\nu$ .

Данные табл. 2 получены в предположении, что начальные условия для действительного и программного движений совпадают, т. е.

$$q_k = 0, \quad k = \overline{1, 6}, \quad \dot{q}_1 = \dot{q}_5 = \dot{q}_6 = \nu a, \quad \dot{q}_2 = \dot{q}_3 = \dot{q}_4 = 0 \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (11.4)$$

Однако обеспечение неоднородных по скорости начальных условий технически трудно реализовать. Поэтому возьмем для действительного движения однородные условия

$$q_k = \dot{q}_k = 0, \quad k = \overline{1, 6}, \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (11.5)$$

Полученное решение состоит из переходного процесса при  $0 \leq t \leq t_*$ , который с течением времени стремится к периодическому решению с частотой  $\nu$ . Поэтому при вычислении нормы этого решения по формуле (11.3) следует считать  $t > t_*$ . Естественно, проведенные вычисления дали результаты, совпадающие с приведенными в табл. 2. Речь может идти лишь о длительности переходного процесса, который согласно проведенным вычислениям меньше половины периода (см. также рис. 5).

Рассмотрим еще упрощенное задание программных сил, положив  $F_k^p = 0.205$ ,  $k = \overline{1, 6}$ , при которых невозмущенное положение является равновесным. При этих силах выполним интегрирование системы (8.5) при нулевых начальных условиях (11.5). Соответствующие результаты для фрагмента данных из табл. 2 приведены в табл. 3.

Таблица 3. Зависимость  $\eta(\nu)$  при упрощенном задании программных сил

№	$a$	$G$	$G_f$	$\nu = 1$	2	3	4	5
5*	0.2	100	5	0.012	0.019	0.030	0.045	0.066
6*	0.2	30	2	0.041	0.066	0.107	0.168	0.254
7*	0.2	10	1	0.137	0.227	0.395	0.666	1.078
8*	0.2	3	0.3	0.770	1.549	3.717	2.640	1.942

Сравнение результатов табл. 3 со строками 5–7 табл. 2 говорит о том, что принятое упрощение в задании программных сил лишь незначительно увеличивает значения функции  $\eta(\nu)$  в области, где эта функция мала.

Можно пойти дальше по пути упрощения задания программных сил, положив  $F_k^p = 0$ ,  $k = \overline{1, 6}$ . В табл. 4 приведены полученные при интегрировании результаты. Видим, что по крайней мере для  $G = 100$  и  $G = 30$  результаты по сравнению с приведенными в табл. 3 изменились незначительно.

Таблица 4. Зависимость  $\eta(\nu)$  при нулевых программных силах

№	$a$	$G$	$G_f$	$\nu = 1$	2	3	4	5
5**	0.2	100	5	0.015	0.019	0.029	0.045	0.065
6**	0.2	30	2	0.049	0.065	0.105	0.167	0.252
7**	0.2	10	1	0.153	0.225	0.391	0.643	1.028
8**	0.2	3	0.3	0.781	1.6329	3.316	2.500	1.892

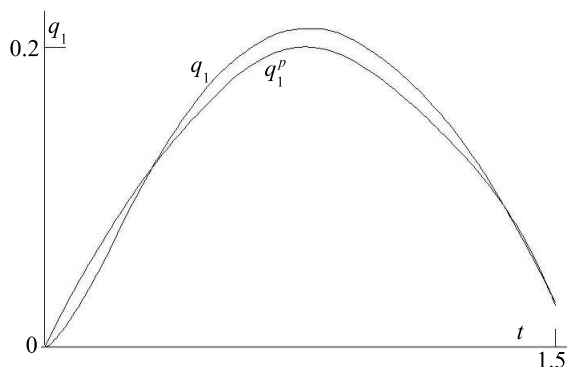


Рис. 5. Программное и действительное движения.

Для иллюстрации сближения действительного и программного движений при несовпадении начальных условий и неточности задания программных усилий в штоках на рис. 5 приведены графики функций  $q_1(t)$  и  $q_1^p(t)$ . Взяты значения параметров  $a = 0.2$ ,  $G = 30$ ,  $G_f = 2$ ,  $\nu = 2$  и рассмотрен случай, когда  $F_k^p = 0$ , а функции  $q_k(t)$  удовлетворяют нулевым начальным условиям (11.5). В случае  $F_k^p = 0.205$  кривая  $q_1(t)$  располагается между показанными на рис. 5 кривыми.

**12. Заключение.** Выведены уравнения динамики платформы Стюарта под действием сил, приложенных к стержням. Решены прямая и обратная задачи динамики. Как известно, решение обратной задачи динамики неустойчиво. Для реализации программного движения необходимо введение обратных связей. Рассмотрено управление по перемещениям и по скоростям штоков, которое приводит к устойчивому движению. Для получения достаточно точного программного движения платформы имеются две возможности — либо точно задавать усилия в штоках, либо сильно увеличивать ко-

эффицент обратной связи  $G$  по перемещению штоков. При снижении требований к точности возможно получение приемлемых результатов в случае задания приближенных выражений для программных сил в штоках или даже приравнивание их нулю. Правда, при этом приходится увеличивать коэффициент  $G$ .

Представленный материал будет полезен при анализе более сложной системы, включающей динамику пневмоцилиндров.

## Литература

1. Stewart D. A platform with six degrees of freedom // Proc. of the Institution of mechanical engineers. London. 1965. Vol. 180, N 15. P. 371–386.
2. Nanua P., Waldron K. J., Murthy V. Direct kinematic solution of a Stewart platform // IEEE Trans. on robotics and automation. 1990. Vol. 6, N 4. P. 438–443.
3. Harib K., Srinivasan K. Kinematic and dynamic analysis of Stewart platform-based machine tool structures // Robotica. 2003. Vol. 21, N 05. P. 541–554.
4. Geng Z., Haynes L. S., Lee J. D., Carroll R. L. On the dynamic model and kinematic analysis of a class of Stewart platforms // Robotics and autonomous systems. 1992. Vol. 9. P. 237–254.
5. Adkins F. A., Haug E. J. Operational envelope of a spatial Stewart platform // Trans. ASME. J. Mech. Des. 1997. Vol. 31, N 368. P. 330–332.
6. Ji Z. Study of the effect of leg inertia in Stewart platform // Proc. of the IEEE Conf. on robotics and automation. 1993. Vol. 1. P. 212–226.
7. Dasgupta B., Mruthyunjaya T. S. A Newton-Euler formulation for the inverse dynamics of the Stewart platform manipulator // Mechanism and machine theory. 1998. Vol. 33, N 8. P. 1135–1152.
8. Leuret G., Liu K., Lewis F. L. Dynamic analysis and control of a Stewart platform manipulator // J. robotic systems. 1993. Vol. 10, N 5. P. 629–655.
9. Зегжда С. А., Солтаханов Ш. Х., Юшков М. П. Неголономная механика. Теория и приложения. М.: Наука; Физматлит, 2009. 344 с.
10. Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П. Специальная форма уравнений динамики системы твердых тел // Докл. АН СССР. 1989. Т. 309, № 4. С. 805–807.
11. Александров В. В. Абсолютная устойчивость имитационных динамических систем в первом приближении // Докл. АН СССР. 1988. Т. 299, № 2. С. 296–301.
12. Александров В. В., Локшин Б. Я., Гомес Е. Л. и др. Стабилизация управляемой платформы при наличии ветровых возмущений // Фундамент. и прикл. матем. 2005. Т. 11, вып. 7. С. 97–115.
13. Леонов Г. А., Зегжда С. А., Кузнецов Н. В. и др. Движение твердого тела, управляемое шестью стержнями переменной длины // Докл. РАН. 2014. Т. 455, № 3. С. 282–286.
14. Леонов Г. А., Зегжда С. А., Зуев С. М. и др. Динамика платформы Стюарта и управление ее движением // Докл. РАН. 2014. Т. 458, № 1. DOI: 10.7868/S0869565214250094.
15. Nedic N., Prsic D., Dubonjic L., Stojanovic V., Djordjevic V. Optimal cascade hydraulic control for a parallel robot platform by PSO // Int. J. Adv. Manuf. Technol. DOI: 10.1007/s00170-014-5735-5.
16. Жилин П. А. Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве. СПб.: Нестор, 2001. 276 с.
17. Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П. Теоретическая механика. 3-е изд. М.: Юрайт, 2012. 592 с.

Статья поступила в редакцию 27 февраля 2017 г.; рекомендована в печать 30 марта 2017 г.

## Сведения об авторах

Андриевский Борис Ростиславич — доктор физико-математических наук, профессор; boris.andrievsky@gmail.com

Арсеньев Дмитрий Германович — доктор технических наук, профессор; vicerector.int@spbstu.ru

Зегжда Сергей Андреевич — доктор физико-математических наук, профессор (1935–2015)

Казунин Дмитрий Владимирович — доктор технических наук, главный научный сотрудник; dvk@mail.ru

Кузнецов Николай Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор; nkuznetsov239@mail.ru

Леонов Геннадий Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор;  
leonov@math.spbu.ru

Товстик Петр Евгеньевич — доктор физико-математических наук, профессор; peter.tovstik@mail.ru

Товстик Татьяна Петровна — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник;  
tovstik\_t@mail.ru

Юшков Михаил Петрович — доктор физико-математических наук, профессор; yushkovmp@mail.ru

## DYNAMICS OF THE STEWART PLATFORM

Boris R. Andrievskiy<sup>1,3</sup>, Dmitriy G. Arseniev<sup>1,2</sup>, Sergey A. Zegzhda<sup>†</sup>, Dmitriy V. Kazunin<sup>1</sup>,  
Nikolai V. Kuznetsov<sup>1</sup>, Gennady A. Leonov<sup>1</sup>, Petr E. Tovstik<sup>1</sup>, Tatiana P. Tovstik<sup>3</sup>, Mikhail P. Yushkov<sup>1</sup>

<sup>1</sup> St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation;  
boris.andrievsky@gmail.com, dvk@mail.ru, nkuznetsov239@mail.ru, leonov@math.spbu.ru,

peter.tovstik@mail.ru, yushkovmp@mail.ru

<sup>2</sup> Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Polytechnicheskaya ul., 29, St. Petersburg, 195251,  
Russian Federation; vicerector.int@spbstu.ru

<sup>3</sup> Institute of Problems of Mechanical Engineering RAS, Bolshoy pr. V. O., 61, St. Petersburg, 199178,  
Russian Federation; tovstik\_t@mail.ru

The kinematics and dynamics of the Stewart platform, based on six pneumatic cylinders, are considered. Differential equations of motion and derived and the forces, providing the fulfillment of a given law of motion, are calculated. Inertia and weight of pneumatic cylinders are introduced into consideration. The obtained equations are used for the study of loaded Stewart platform, for which stability is achieved by feedback control. Numerical examples are provided. Refs 17. Figs 5. Tables 4.

*Keywords:* Stewart platform, pneumatic cylinders stability of motion.

## References

1. Stewart D., “A platform with six degrees of freedom”, *Proc. of the Institution of mechanical engineers* **180**(15), 371–386 (1965).
2. Nanua P., Waldron K. J., Murthy V., “Direct kinematic solution of a Stewart platform”, *IEEE Trans. on robotics and automation* **6**(4), 438–443 (1990).
3. Harib K., Srinivasan K., “Kinematic and dynamic analysis of Stewart platform-based machine tool structures”, *Robotica* **21**(05), 541–554 (2003).
4. Geng Z., Haynes L. S., Lee J. D., Carroll R. L., “On the dynamic model and kinematic analysis of a class of Stewart platforms”, *Robotics and autonomous systems* **9**, 237–254 (1992).
5. Adkins F. A., Haug E. J., “Operational envelope of a spatial Stewart platform”, *Trans. ASME. J. Mech. Des.* **31**(368), 330–332 (1997).
6. Ji Z., “Study of the effect of leg inertia in Stewart platform”, *Proc. of the IEEE Conf. on robotics and automation* **1**, 212–226 (1993).
7. Dasgupta B., Mruthyunjaya T. S., “A Newton-Euler formulation for the inverse dynamics of the Stewart platform manipulator”, *Mechanism and machine theory* **33**(8), 1135–1152 (1998).
8. Lebreton G., Liu K., Lewis F. L., “Dynamic analysis and control of a Stewart platform manipulator”, *J. robotic systems* **10**(5), 629–655 (1993).
9. Zegzhda S. A., Soltakhanov Sh. Kh., Yushkov M. P., *Nonholonomic mechanics. Theory and applications* (Nauka, Fizmatgiz, Moscow, 2009, 344 p.) [in Russian].
10. Polyakhov N. N., Zegzhda S. A., Yushkov M. P., “Special equation form of the dynamics of solid system”, *Soviet Mathematics* **309**(4), 805–807 (1989) [in Russian].
11. Alexandrov V. V., “Absolute stability of imitation dynamic systems in the first approximation”, *Soviet Mathematics* **299**(2), 296–301 (1988) [in Russian].
12. Alexandrov V. V., Lokshin B. Ya., Gomez Esparza L., Salazar Ibarguen H. A., “Stabilization of a platform under wind loads”, *Journal of Mathematical Sciences* **146**(3), 5863–5876 (2007). DOI: 10.1007/s10958-007-0402-0.
13. Leonov G. A., Zegzhda S. A., Kuznetsov N. V., Tovstik P. E., Tovstik T. P., Yushkov M. P., “Motion of a solid driven by six rods of variable length”, *Doklady Physics* **59**(3), 153–157 (2014).
14. Leonov G. A., Zegzhda S. A., Zuev S. M., etc., “Dynamics of Stewart platform and control of its motion”, *Docl. RAN* **458**(1) (2014) [in Russian]. DOI: 10.7868/S0869565214250094.
15. Nedic N., Prsic D., Dubonjic L., Stojanovic V., Djordjevic V., “Optimal cascade hydraulic control for a parallel robot platform by PSO”, *Int. J. Adv. Manuf. Technol.* DOI: 10.1007/s00170-014-5735-5.



16. Zilin P. A., *Vectors and second-rank tensors in three-dimensional space* (Nestor, St. Petersburg, 2001, 276 p.) [in Russian].

17. Polyakhov N. N., Zegzhda S. A., Yushkov M. P., *Theoretical mechanics* (Urait, Moscow, 2012, 592 p.) [in Russian].

**Для цитирования:** Андриевский Б. Р., Арсеньев Д. Г., Зегжда С. А., Казунин Д. В., Кузнецов Н. В., Леонов Г. А., Товстик П. Е., Товстик Т. П., Юшков М. П. Динамика платформы Стюарта // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 3. С. 489–506. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.311

**For citation:** Andrievskiy B. R., Arseniev D. G., Zegzhda S. A., Kazunin D. V., Kuznetsov N. V., Leonov G. A., Tovstik P. E., Tovstik T. P., Yushkov M. P. Dynamics of the Stewart platform. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2017, vol. 4 (62), issue 3, pp. 489–506. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.311

## ХРОНИКА

15 февраля 2017 г. на заседании секции теоретической механики им. проф. Н. Н. Поляхова в Санкт-Петербургском Доме Ученых РАН выступил доктор физ.-мат. наук, профессор А. А. Тихонов (Санкт-Петербургский государственный университет) с докладом на тему «Электродинамические системы стабилизации космических аппаратов».

Краткое содержание доклада:

В докладе рассмотрен процесс формирования и современное состояние концепции электродинамических систем стабилизации (ЭДСС) космических аппаратов, дан обзор задач, решаемых с использованием ЭДСС, рассмотрены математические основы функционирования ЭДСС, продемонстрированы результаты численного моделирования. Особое внимание уделено задаче электродинамической стабилизации космического аппарата в режиме двухосной закрутки. Дана оценка возможностей и перспектив применения ЭДСС для решения актуальных задач космодинамики.

15 марта 2017 г. на заседании секции теоретической механики им. проф. Н. Н. Поляхова в Санкт-Петербургском Доме Ученых РАН выступил кандидат физ.-мат. наук, доцент В. Г. Быков (Санкт-Петербургский государственный университет) с докладом на тему «Синхронные прецессии и асинхронные автоколебания статически неуравновешенного ротора с вязко-упругим ортотропным валом».

Краткое содержание доклада:

Рассматривается динамически симметричный ротор в виде жесткого тонкого диска, закрепленного посередине невесомого гибкого упругого вала с ортотропными вязко-упругими характеристиками. Предполагается, что движение ротора происходит под действием заданного внешнего вращающего момента, при учете сил внешнего сопротивления и внутреннего трения. Для анализа стационарных режимов движения ротора используются математические модели, построенные во вращающейся и полярной системах координат. Показано, что в зависимости от параметров системы возможно существование двух типов устойчивых стационарных режимов движения: регулярных синхронных прецессий и асинхронных самовозбуждающихся автоколебаний. Для каждого типа получены аналитические формулы, выражающие условия их существования и асимптотической устойчивости.