

## ДИНАМИКА СТЕРЖНЯ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ УДАРЕ ТЕЛОМ\*

А. К. Беляев<sup>1</sup>, Ч.-Ч. Ма<sup>2</sup>, Н. Ф. Морозов<sup>3</sup>,  
П. Е. Товстик<sup>3</sup>, Т. П. Товстик<sup>1</sup>, А. О. Шурпатов<sup>4</sup>

<sup>1</sup> Институт проблем машиноведения Российской Академии Наук,  
Российская Федерация, 199178, Санкт-Петербург, Большой пр. В. О., 61

<sup>2</sup> Национальный Университет Тайваня,  
Тайвань, 10617, Тайбэй, Рузвельт роад, Секция 4, 1

<sup>3</sup> Санкт-Петербургский государственный университет,  
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

<sup>4</sup> Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,  
Российская Федерация, 195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

Рассматривается продольный удар упругим телом по концу упругого стержня с закрепленным противоположным концом. Учитывается распространение упругих волн в стержне и локальные деформации в зоне контакта. После отскока тела стержень совершает свободные продольные колебания, которые при определенных условиях могут вызвать параметрические поперечные колебания, имеющие характер биений. В зависимости от параметров задачи теоретически и экспериментально определяются время соударения, форма ударного импульса и максимальная амплитуда поперечных колебаний при параметрическом резонансе. Обсуждаются результаты экспериментальных исследований, проведенных в Национальном Тайваньском университете. Библиогр. 12 назв. Ил. 6. Табл. 1.

*Ключевые слова:* стержень, удар, теории Сен-Венана, Герца и Сирса, время соударения, ударный импульс, параметрический резонанс.

**1. Введение.** Рассматриваются динамические процессы, происходящие при продольном ударе телом по стержню. Задача соударения упругих тел при учете их деформации имеет богатую историю. Сен-Венан [1] с учетом распространения продольных волн рассмотрел продольное соударение стержней. Оказалось, что время соударения, найденное теоретически, плохо подтверждается экспериментами. Это связано с трудновыполнимым в эксперименте условием, при котором концы стержней были бы идеально плоскими. В то же время Герц [2], опираясь на исследования Буссинеска [3] по деформации упругого полупространства, решил задачу о прямом центральном соударении упругих тел (типа шаров). Учитываются только местные статические деформации, а распространение волн не рассматривается. При этом совпадение теоретического и экспериментального времен соударения оказалось хорошим. Сирс [4] объединил подходы Сен-Венана и Герца и рассмотрел соударение стержней с закругленными концами. При этом учитывались и местные деформации, и распространение волн. Этот подход приводит к хорошему совпадению теоретических и экспериментальных результатов и используется в многочисленных последующих работах [5, 6].

После отскока ударника стержень совершает свободные продольные колебания, которые в случае параметрического резонанса возбуждают поперечные колебания, имеющие характер биений. В работах [7–9] исследовано возбуждение поперечных колебаний, вызванных продольным ударом, причем ударная сила  $P(t)$  была заданной функцией времени. В настоящей работе сила  $P(t)$  находится в процессе решения задачи о продольном ударе телом по стержню. Получена оценка амплитуды биений при главных параметрических резонансах.

\*Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 16.51.52025 МНТ-а, № 16.01.00580-а).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2017

Обсуждаются результаты экспериментальных исследований, проведенных в Национальном Тайваньском университете.

**2. Продольный удар телом по стержню.** Рассматривается упругий стержень длиной  $L$ , правый конец которого закреплен (рис. 1). К левому концу в начальный момент времени со скоростью  $v_0$  подлетает ударник массой  $m$ , в результате чего в системе возникает контактное взаимодействие. Ударник считается абсолютно твердым телом, однако учитывается местное смятие  $\alpha$  в зоне контакта. По стержню со скоростью  $a$  распространяются плоские продольные волны. Сила тяжести не учитывается. Определяется величина контактной силы  $P(t)$  и время соударения.

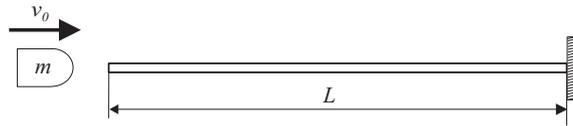


Рис. 1. Удар телом по стержню.

Это классическая задача удара тела по стержню. Запишем условие совпадения координат точек контакта [5, 6, 10]:

$$u_0 - \alpha = u, \quad u_0 = v_0 t - \frac{1}{m} \int_0^t (t - \theta) P(\theta) d\theta, \quad u = \int_0^t P(\theta) Y(t - \theta) d\theta. \quad (2.1)$$

Здесь  $u_0$  — перемещение ударника,  $u$  — перемещение левого конца стержня,

$$Y(t) = \frac{a}{EF} \begin{cases} 1, & 0 < t < 2L/c, \\ -1, & 2L/c < t < 4L/c, \end{cases} \quad Y(t + 4L/c) = Y(t), \quad (2.2)$$

$$P = k\alpha^{3/2}, \quad k = \left( \frac{3(1 - \nu^2)}{4E} + \frac{3(1 - \nu_0^2)}{4E_0} \right)^{-1} \sqrt{\varkappa},$$

где  $Y(t)$  — реакция стержня на приложенный к нему единичный импульс, контактная сила  $P(t)$  связана с местным смятием  $\alpha$  по формуле Герца [2],  $E_0, E$  и  $\nu_0, \nu$  — модули Юнга и коэффициенты Пуассона ударника и стержня соответственно,  $F$  — площадь поперечного сечения стержня,  $c = \sqrt{E/\rho}$  — скорость звука в стержне,  $\rho$  — плотность материала стержня,  $\varkappa$  — сумма кривизн соударяющихся тел в точке контакта (предполагается, что в зоне контакта тела осесимметричны). Если тело ударяет по плоскому концу стержня и материал соударяющихся тел одинаковый, то

$$P = k\alpha^{3/2}, \quad k = \frac{2E\sqrt{R}}{3(1 - \nu^2)}, \quad (2.3)$$

где  $R$  — радиус кривизны ударника в точке контакта.

В результате (2.1) становится нелинейным интегральным уравнением относительно силы  $P(t)$  вида

$$\frac{1}{m} \int_0^t P(\theta)(t - \theta) d\theta + \int_0^t P(\theta) Y(t - \theta) d\theta + \left( \frac{P(t)}{k} \right)^{2/3} = v_0 t. \quad (2.4)$$

Удар заканчивается при обращении силы  $P(t)$  в нуль.

Перейдем к безразмерным переменным, считая длину стержня и скорость звука в нем, равными единице, и отнеся силу  $P$  к  $EF$ . Тогда уравнение (2.4) примет вид

$$\xi \int_0^\tau \hat{P}(\tau_1)(\tau - \tau_1) d\tau_1 + \int_0^\tau \hat{P}(\tau_1) \hat{Y}(\tau - \tau_1) d\tau_1 + r \hat{P}(\tau)^{2/3} = \hat{v}_0 \tau, \quad \hat{Y}(\tau) = (-1)^{[\tau/2]}, \quad (2.5)$$

где

$$\hat{P} = \frac{P}{EF}, \quad \tau = \frac{at}{L}, \quad \hat{v}_0 = \frac{v_0}{c}, \quad \xi = \frac{M}{m}, \quad r = \frac{1}{L} \left( \frac{EF}{k} \right)^{2/3}. \quad (2.6)$$

Здесь через  $[z]$  обозначена целая часть числа  $z$ , параметр  $\xi$  равен отношению массы стержня  $M = \rho FL$  и массы ударника  $m$ , параметр  $r$  учитывает местное смятие.

Уравнение (2.5) содержит три безразмерных параметра  $\xi$ ,  $\hat{v}_0$  и  $r$ . При  $r = 0$  местное смятие не учитывается, уравнение (2.5) становится линейным, время удара зависит только от  $\xi$ , а сила  $\hat{P}(\tau)$  зависит от  $\xi$  и линейно зависит от  $\hat{v}_0$ . При  $r = 0$  уравнение (2.5) имеет аналитическое решение, построенное, например, в [1, 6].

При  $r > 0$  путем дополнительного изменения масштаба три параметра  $\xi$ ,  $\hat{v}_0$ ,  $r$  можно свести к двум. Положим  $\hat{P} = r^3 \tilde{P}$ ,  $\hat{v}_0 = r^3 \tilde{v}_0$ . Тогда в уравнении (2.5) величины  $\hat{P}$  и  $\hat{v}_0$  заменятся на  $\tilde{P}$  и  $\tilde{v}_0 = \hat{v}_0/r^3$ , а  $r$  заменится на 1, т. е. в уравнении (2.5) останется два параметра  $\tilde{v}_0$  и  $\xi$ .

Вернемся к уравнению (2.5). Дифференцирование по  $\tau$  дает [6]

$$\frac{d\hat{P}}{d\tau} = \frac{3}{2r} \hat{P}(\tau)^{1/3} \left( \hat{v}_0 - \xi \int_0^\tau \hat{P}(\tau_1) d\tau_1 - \hat{P}(\tau) + 2\hat{P}(\tau - 2) - 2\hat{P}(\tau - 4) + \dots \right). \quad (2.7)$$

Уравнение (2.7) интегрируем при условии  $\hat{P}(\tau) = 0$  при  $\tau < 0$ . Чтобы уйти от тривиального решения  $\hat{P}(\tau) \equiv 0$  при численном интегрировании, следует задать  $\hat{P}(0)$  малым положительным числом, например  $10^{-10}$ . Интегрируем уравнение (2.7) последовательно на промежутках  $(0, 2)$ ,  $(2, 4)$ ,  $(4, 6)$  и т. д., пользуясь тем, что на предыдущем промежутке значение функции  $\hat{P}(\tau)$  уже найдено. При этом учитываем непрерывность функции  $\hat{P}$  при  $\tau = 2, 4, \dots$ . Заметим, что в пакете Wolfram Mathematica-9 возможно непосредственное интегрирование уравнения (2.7) без разбиения времени на интервалы.

В зоне контакта характер распространения плоской продольной волны нарушается. В работах [4, 6] влияние краевого эффекта в зоне контакта учитывается в рамках предположения о том, что плоская волна деформации распространяется по стержню, начиная с некоторого удаления от его конца. Это приводит к тому, что слагаемое  $\hat{P}(\tau)$  в уравнении (2.7) заменяется на  $\hat{P}(\tau - \delta)$ , где  $\delta$  — величина порядка толщины стержня [6]. Нам представляется, что такой подход нуждается в уточнении, в основном, из-за того, что не учитываются силы инерции участка  $(0, \delta)$  стержня. В дальнейшем считаем  $\delta = 0$ .

Выше функция  $\hat{Y}(\tau)$  и уравнение (2.7) получены на основании анализа распространения волн по стержню. Те же результаты могут быть получены методом Фурье. Рассмотрим краевую задачу (в переменных (2.6))

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\hat{P}(\tau), \quad u(1, \tau) = 0 \quad (2.8)$$

с нулевыми начальными условиями. Ее решение имеет вид

$$u(x, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(\tau) \cos \nu_k x, \quad \nu_k = (k - 0.5)\pi,$$

$$\frac{d^2 \varphi_k}{d\tau^2} + \nu_k^2 \varphi_k = 2\hat{P}(\tau), \quad \varphi_k(0) = 0, \quad \left. \frac{d\varphi_k}{d\tau} \right|_{\tau=0} = 0, \quad (2.9)$$

$$\varphi_k(\tau) = \frac{2}{\nu_k} \int_0^{\tau} \hat{P}(\tau_1) \sin(\nu_k(\tau - \tau_1)) d\tau_1.$$

Теперь перемещение левого конца стержня записывается в виде

$$u(\tau) = u(0, \tau) = \int_0^{\tau} \hat{P}(\tau_1) \tilde{Y}(\tau - \tau_1) d\tau_1, \quad \tilde{Y}(\tau) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \nu_k \tau}{\nu_k}. \quad (2.10)$$

Ряд  $\tilde{Y}(\tau)$  медленно сходится к разрывной функции  $\hat{Y}(\tau)$ . На рис. 2 показана сумма 20 первых слагаемых при  $0 \leq \tau \leq 6$ .

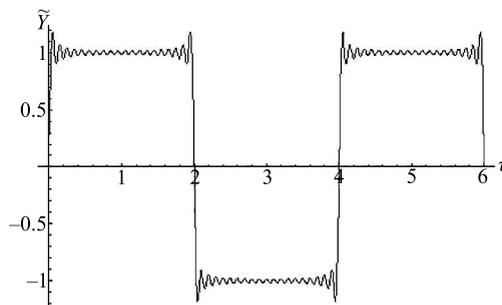


Рис. 2. Функция  $\tilde{Y}(\tau)$ .

**3. Метод конечных элементов. Сравнение результатов.** Рассмотрим продольный удар телом с радиусом закругления  $R$  по плоскому концу стержня из того же материала. Пусть  $L = 0.5$  м,  $F = 5 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup>,  $R = 0.01$  м,  $m = 0.5$  кг,  $v_0 = 1$  м/с,  $E = E_0 = 2.1 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\nu = \nu_0 = 0.3$ ,  $\rho = \rho_0 = 7.8 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. Находим  $c = 5189$  м/с,  $M = 0.195$  кг и безразмерные параметры  $\hat{v}_0 = v_0/c = 0.0001927$ ,  $\xi = M/m = 0.39$ ,  $r = 0.0155$ , входящие в уравнение (2.7).

Зависимость  $\hat{P}(\tau)$  в переменных (2.6) представлена на рис. 3. Кривая  $\hat{P}(\tau)$  имеет три максимума. Продолжительность удара примерно в 6 раз превосходит время пробега волны по длине стержня.

Для ударника и стержня с теми же параметрами были проведены расчеты для задачи в трехмерной постановке по методу конечных элементов (МКЭ) [10]. Было использовано 3000000 элементов, число степеней свободы около 1000000. Подробности выбора элементов приводятся в [10]. На рис. 4 представлено сравнение результатов расчетов по одномерной модели (2.7) и по МКЭ. Сравнение кривых на рис. 4 говорит о том, что одномерная модель дает более короткое время удара и большую величину максимальной ударной силы, чем МКЭ в трехмерной постановке.

**4. Послеударные колебания стержня.** Пусть отскок ударника произошел в момент времени  $\tau = T$ . При  $\tau > T$  стержень совершает свободные продольные колебания, которые при определенных условиях могут вызвать изгибные колебания.

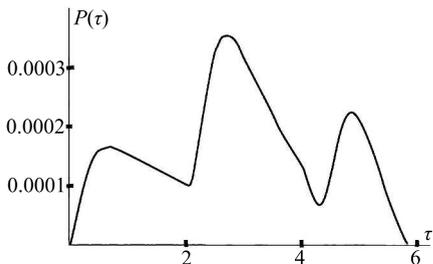


Рис. 3. Зависимость  $\hat{P}(\tau)$  в безразмерных переменных.

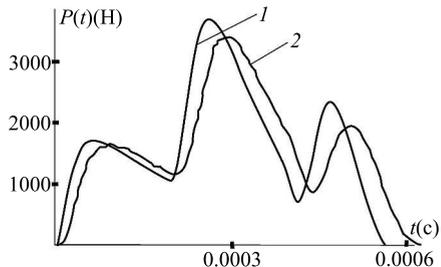


Рис. 4. Сравнение зависимостей  $P(t)$  по уравнению (2.7) — кривая 1, и по МКЭ — кривая 2.

Запишем в переменных (2.6) систему уравнений, описывающих связанные продольно-поперечные колебания [8],

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad u(1, \tau) = 0, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \varepsilon \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \mu^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0, \quad \varepsilon = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad x = 0, 1. \quad (4.2)$$

Здесь  $u(x, \tau)$  и  $w(x, \tau)$  — продольное и поперечное перемещения оси стержня,  $\mu = \sqrt{J/(FL^2)}$  — малый параметр толщины стержня,  $J$  — момент инерции поперечного сечения. Уравнение (4.2) записано для шарнирно опертых концов стержня. Начальные условия для функции  $u(x, \tau)$  при  $\tau = T$  совпадают с ее значениями в момент окончания удара. Имея в виду возможность появления параметрических колебаний, начальные условия для  $w(x, \tau)$  берем ненулевыми исчезающе малыми.

В уравнении (4.2)  $\varepsilon(x, \tau)$  — осевая деформация стержня. Пренебрегая в уравнении (4.1) нелинейным слагаемым, с учетом (2.9) находим выражение для перемещения точек стержня в виде ряда Фурье по системе собственных функций  $\cos \nu_k x$  с безразмерными частотами  $\nu_k$ :

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\nu_k} \int_0^T \hat{P}(\tau_1) \sin(\nu_k(\tau - \tau_1)) d\tau_1 \cos \nu_k x = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (b_k \cos \nu_k \tau + c_k \sin \nu_k \tau) \cos \nu_k x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\nu_k \tau + \alpha_k) \cos \nu_k x, \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$b_k = -\frac{2}{\nu_k} \int_0^T \hat{P}(\tau) \sin(\nu_k \tau) d\tau, \quad c_k = \frac{2}{\nu_k} \int_0^T \hat{P}(\tau) \cos(\nu_k \tau) d\tau, \quad a_k = \sqrt{b_k^2 + c_k^2}.$$

Следовательно, функция  $u(x, \tau)$ , а вместе с ней и функция  $\varepsilon(x, \tau)$  являются периодическими функциями  $\tau$  с периодом 4. Коэффициенты  $b_k$  и  $c_k$  могут быть вычислены при интегрировании уравнения (2.7). Ниже при рассмотрении параметрических резонансов используется амплитуда колебаний по первой форме  $a_1$ . Начальная фаза  $\alpha_1$  не используется, ибо за счет сдвига начала отсчета времени при послеударных колебаниях можно считать  $\alpha_1 = 0$ .

Условием возникновения параметрических резонансов для уравнения (4.2) является равенство [7–9, 11]

$$|\omega_m \pm \omega_n| = k\nu_1, \quad m, n, k = 1, 2, \dots, \quad \nu_1 = \pi/2, \quad \omega_m = \mu m^2 \pi^2, \quad (4.4)$$

где  $\omega_m$  — частоты поперечных колебаний по формам  $w(x) = \sin m\pi x$ . Точнее, резонансы могут возбуждаться в окрестностях значений параметров, удовлетворяющих соотношению (4.4). Для главных параметрических резонансов, возбуждающихся, как правило, с наибольшей интенсивностью, будет

$$m = n, \quad k = 1, \quad 4\pi\mu_m m^2 = 1, \quad l_m = 4\pi m^2, \quad l = 1/\mu. \quad (4.5)$$

Здесь введен большой параметр длины  $l$ , измеряемый в долях радиуса инерции поперечного сечения стержня. Формула (4.5) определяет критические длины стержня  $l_m$ , в окрестностях которых возбуждаются главные параметрические резонансы.

В линейном приближении при параметрических резонансах амплитуда поперечных колебаний неограниченно возрастает, поэтому в уравнение (4.1) введено нелинейное слагаемое, описывающее влияние поперечных колебаний на продольные. При этом колебания при параметрическом резонансе имеют характер биений с последовательной передачей энергии продольных колебаний поперечным и обратно [7–9]. С использованием двухмасштабных асимптотических разложений [12] при интегрировании системы (4.1), (4.2) для главных параметрических резонансов получена оценка амплитуды прогиба [8, 9]:

$$\max_{x,\tau} w(x,\tau) \leq 2a_1, \quad (4.6)$$

где  $a_1$  — амплитуда перемещения по первой форме продольных колебаний, определенная по формуле (4.3).

Обратимся к рассмотренному в п. 2 примеру. Параметр длины равен  $l = L\sqrt{F/J}$ , и при  $L = 0.5$  м,  $F = 5 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup> для круглого стержня находим  $l = 250.7$ . Ближайшие критические длины равны  $l_4 = 201.1$ ,  $l_5 = 314.2$ , поэтому для круглого стержня главный параметрический резонанс не возбуждается. Однако при тех же значениях  $L$  и  $F$  для стержня другого поперечного сечения (например, прямоугольного) возможно равенство  $l = l_5$ , при этом резонанс возбуждается по форме  $w = w_0(\tau) \sin 5\pi x$ . При интегрировании системы (2.7) по формулам (4.3) находим амплитуду продольных колебаний  $a_1$ , а затем по формуле (4.6) — амплитуду биений  $\max w_0(\tau) = 4.27 \cdot 10^{-5}$ . Учитывая, что за единицу длины принято  $L = 0.5$  м, находим, что амплитуда биений равна 0.0214 мм.

**5. Сравнение теоретических и экспериментальных результатов.** В Национальном Тайваньском университете была проведена серия экспериментов по определению времени соударения при продольном ударе с использованием пьезоэлектрического эффекта. Рассматривается ударник в виде стального шарика с теми же параметрами  $E_0, \rho_0, \nu_0$ , что и в примере п. 3, масса шарика  $m$  принимает 6 значений, приведенных в таблице. Был взят стержень с параметрами: длина  $L = 0.0301$  м, площадь поперечного сечения  $F = 10^{-4}\pi$  м<sup>2</sup>, модуль Юнга  $E = 7.342 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>, коэффициент Пуассона  $\nu = 0.34$ , плотность  $\rho = 2696.6$  кг/м<sup>3</sup>. Скорость удара  $v_0 = 0.3225$  м/с. Находим скорость звука в стержне  $c = 5218$  м/с и его массу  $M = 25.5$  г.

В столбцах  $t_{\text{экс}}$  и  $t_{\text{МКЭ}}$  таблицы в безразмерном виде приведены времена соударения, найденные экспериментально и по методу конечных элементов. В качестве единицы времени принято время пробега волны по длине стержня. Время в секундах получается умножением на  $L/c = 5.77 \cdot 10^{-6}$  с.

В столбце  $t_{(2.7)}$  приведено время, полученное в результате решения уравнения (2.7), причем  $\hat{v}_0 = v_0/c = 0.0000618$ , а безразмерные коэффициенты  $\xi$  и  $r$  для разных значений  $m$  приведены в таблице.

**Сравнение теоретических  
и экспериментальных значений времени удара**

$m$ (г)	$t_{\text{экс}}$	$t_{\text{МКЭ}}$	$t_{(2.7)}$	$t_{\text{app}}$	$\xi$	$r$
0.13	6.31	5.41	4.66	4.70	196.15	2.477
0.44	8.12	10.53	6.99	7.04	57.95	2.163
0.71	9.06	13.54	8.23	8.25	35.91	2.051
1.04	10.41	14.15	9.32	9.33	24.52	1.966
3.51	14.73	18.41	14.04	14.05	7.26	1.718
8.46	19.26	21.10	18.84	18.84	3.01	1.556

На рис. 5 показан график функции  $\hat{P}(\tau)$  для  $m = 8.46$  г. Для других значений  $m$  графики по форме такие же.

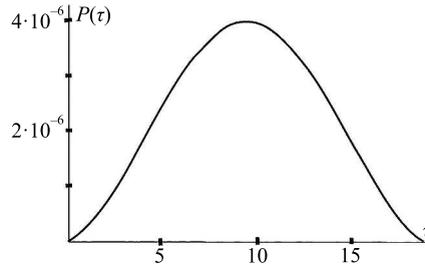


Рис. 5. Функция  $\hat{P}(\tau)$  для параметров при эксперименте.

Кривая на рис. 5 существенно отличается от кривых на рис. 2 и 3 тем, что не проявляется распространение волн по стержню. Она похожа на график функции, описывающей ударную силу при соударении двух шаров.

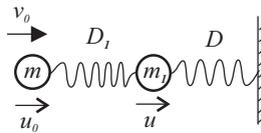


Рис. 6. Приближенная модель с двумя массами.

Это обстоятельство для описания результатов экспериментов позволяет приближенно заменить рассматриваемую систему системой с двумя степенями свободы (рис. 6), в которой  $D_1$  — нелинейная пружина, моделирующая местное смятие согласно формуле (2.3),  $D$  — линейная пружина жесткостью  $EF/L$ , равной жесткости стержня на растяжение, а масса второго тела принимается равной половине массы стержня ( $m_1 = M/2$ ). Вместо уравнения (2.7) приходим к уравнению

$$\frac{d\hat{P}}{d\tau} = \frac{3}{2r} \hat{P}(\tau)^{1/3} \left( \hat{v}_0 - \xi \int_0^\tau \hat{P}(\tau_1) d\tau_1 - 2 \int_0^\tau \hat{P}(\tau_1) \cos(\sqrt{2}(\tau - \tau_1)) d\tau_1 \right). \quad (5.1)$$

Время удара  $t_{\text{app}}$ , полученное в результате решения уравнения (5.1) при тех же начальных условиях, что и для уравнения (2.7), помещено в столбце  $t_{\text{app}}$  таблицы. Видим, что значения  $t_{\text{app}}$  и  $t_{(2.7)}$  близки друг к другу, причем разница убывает вместе с ростом времени удара. Разумеется, для других значений параметров задачи, для которых безразмерное время удара является более коротким, модель, показанная на рис. 6, не применима.

Причины различия результатов в столбцах  $t_{\text{экс}}$ ,  $t_{\text{МКЭ}}$  и  $t_{(2,7)}$  таблицы подлежат дальнейшему изучению, причем одной из причин расхождения является влияние краевого эффекта, которое для короткого стержня относительно велико.

**6. Заключение.** Рассмотрен продольный упругий удар телом по тонкому стержню. Сравниваются результаты трех подходов к решению задачи: теоретического, конечно-элементного и экспериментального. При теоретическом подходе учитывается как распространение продольных волн в стержне, так и местное смятие по модели Герца. Этот подход приводит к известному дифференциальному уравнению с запаздывающим аргументом. При конечно-элементном подходе рассматривается трехмерная динамическая задача, при решении которой распространение волн и местное смятие учитываются автоматически. Сравнение этих двух подходов показало полное качественное и удовлетворительное количественное совпадение результатов по закону изменения контактной силы и по времени соударения. Для сближения теоретических и конечно-элементных результатов следует более подробно изучить влияние краевого эффекта в зоне контакта, который при теоретическом подходе не учитывался.

При эксперименте определялось только время соударения. Сравнение с теоретическим и конечно-элементными результатами было удовлетворительным. В связи с тем, что стержень был относительно коротким, для вычисления времени соударения была использована также приближенная модель с двумя степенями свободы.

Решена задача о возбуждении поперечных колебаний после отскока тела от стержня. При параметрическом резонансе движение носит характер биений, при которых энергия продольных колебаний переходит в энергию поперечных колебаний и наоборот. Получена оценка максимально возможной амплитуды поперечных колебаний. Анализ был ограничен рассмотрением одного примера. Целесообразно проведение более подробного анализа, при котором параметры задачи меняются в широком диапазоне.

## Литература

1. *Saint-Venant A.* Sur le choc longitudinal de deux barres élastiques // *J. de Math.* (Liouville) Ser. 2. T. 12. 1867.
2. *Hertz H.* Über die Berührung fester elastischer Körper // *Za. f. Math.* (Crelle). 1881. Bd 92.
3. *Boussinesq J.* Applications des potentials. Paris, 1885.
4. *Sears J. E.* On the longitudinal impact of metal rods with rounded ends // *Proc. Cambridge Phil. Soc.* 1908. Vol. 14.
5. *Бидерман В. Л.* Теория удара. М., 1952.
6. *Зегюда С. А.* Соударение упругих тел. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 1997. 316 с.
7. *Морозов Н. Ф., Товстик П. Е.* Динамика стержня при продольном ударе // *Вестн. С.-Петербург. ун-та.* Сер. 1. 2009. Вып. 2. С. 105–111.
8. *Беляев А. К., Морозов Н. Ф., Товстик П. Е., Товстик Т. П.* Биения в задаче о продольном ударе по тонкому стержню // *Изв. РАН. МТТ.* 2015. № 4. С. 104–117.
9. *Беляев А. К., Морозов Н. Ф., Товстик П. Е., Товстик Т. П.* Параметрические резонансы в задаче о продольном ударе по тонкому стержню // *Вестн. С.-Петербург. ун-та.* Сер. 1. 2016. Т. 3(61), вып. 1. С. 77–94.
10. *Беляев А. К., Ма Ч.-Ч., Шурпатов А. О.* Полуаналитическое, конечно-элементное и экспериментальное определение контактной силы осевого соударения стержня и ударника // *Науч. техн. ведомости СПбГТУ. Физ.-мат. науки.* (в печати).
11. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972.
12. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1969.

Статья поступила в редакцию 22 февраля 2017 г.; рекомендована в печать 30 марта 2017 г.

## Сведения об авторах

Беляев Александр Константинович — доктор физико-математических наук, профессор;  
vice.ipme@gmail.com

Ма Чин-Чин — профессор; ccma@ntu.edu.tw

Морозов Никита Федорович — академик РАН, доктор физико-математических наук, профессор;  
morozov@nm1016.spb.edu

Товстик Петр Евгеньевич — доктор физико-математических наук, профессор; peter.tovstik@mail.ru

Товстик Татьяна Петровна — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник;  
tovstik\_t@mail.ru

Шурпатов Анатолий Олегович — аспирант; a.shurpatov@gmail.com

## DYNAMICS OF ROD UNDER AXIAL IMPACT BY A BODY

Alexander K. Belyaev<sup>1</sup>, Chien-Ching Ma<sup>2</sup>, Nikita F. Morozov<sup>3</sup>, Petr E. Tovstik<sup>3</sup>,  
Tatiana P. Tovstik<sup>1</sup>, Anatoly O. Shurpatov<sup>4</sup>

<sup>1</sup> Institute for Problems in Mechanical Engineering RAS, Bolshoy pr. V. O., 61, St. Petersburg, 199178, Russian Federation; vice.ipme@gmail.com, tovstik\_t@mail.ru

<sup>2</sup> National Taiwan University, No. 1, Sec. 4, Roosevelt Rd., Taipei 10617, Taiwan (R.O.C.);  
ccma@ntu.edu.tw

<sup>3</sup> St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation;  
morozov@nm1016.spb.edu, peter.tovstik@mail.ru

<sup>4</sup> Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Polytechnicheskaya ul., 29, St. Petersburg, 195251, Russian Federation; a.shurpatov@gmail.com

A longitudinal elastic impact a body makes on a thin rod is considered. The results of theoretical, finite element and experimental approaches to the solution of the problem are compared. The theoretical approach takes into account both the propagation of longitudinal waves in the rod and the local deformation due to the Hertz model. This approach leads to a differential equation with a delayed argument. A three-dimensional dynamic problem is considered within the framework of finite-element approach, in which the wave propagation and local deformation are automatically taken into account. A benchmark of these two approaches showed a complete qualitative and satisfactory quantitative agreement of the results in the contact force and the impact time.

In the experiment, only the impact time was determined. Comparison of the measured impact time with the theoretical and finite-element results was satisfactory. Due to the fact that the tested rod was relatively short, an approximate model with two degrees of freedom was also developed to calculate the impact time.

The problem of excitation of transverse oscillations after the impactor rebound off the rod is solved. For parametric resonance, the motion has the character of beats at which the energy of longitudinal oscillation is transferred into the energy of transverse oscillation and vice versa. An estimate for the maximum possible amplitude of transverse oscillation is obtained. Refs 12. Figs 6. Table 1.

*Keywords:* rod, impact, Saint-Venant theory, Hertz theory, Sears theory, impact time, impact impulse, parametric resonance.

## References

1. Saint-Venant A., “Sur le choc longitudinal de deux barres élastiques”, *J. de Math. (Liouville). Ser. 2* **12** (1867).
2. Hertz H., “Über die Berührung fester elastischer Körper”, *Za. f. Math. (Crelle)* **92** (1881) [in German].
3. Boussinesq J., *Applications des potentials* (Paris, 1885).
4. Sears J. E., “On the longitudinal impact of metal rods with rounded ends”, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **14** (1908).
5. Biderman V. L., *Theory of impact* (Mashgiz, Moscow, 1952) [in Russian].
6. Zegzhda S. A., *Collision of elastic bodies* (Publishers of St. Petersburg University, 1997) [in Russian].
7. Morozov N. F., Tovstik P. E., “Rod dynamics under axial impact”, *Vestnik St. Petersburg University, Series 1*, issue 2, 105–111 (2009) [in Russian].
8. Belyaev A. K., Morozov N. F., Tovstik P. E., Tovstik T. P., “Beating in the problem of axial impact on a thin rod”, *Mechanics of Solids* **50**(4) (2015).

9. Belyaev A. K., Morozov N. F., Tovstik P. E., Tovstik T. P., "Parametric Resonances in the Problem of Longitudinal Impact on a Thin Rod", *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **49**(1), 53–67 (2016).

10. Belyaev A. K., Ma Chien-Ching, Shurpatov A. O., "Semi-analytic, finite-element and experimental determination of contact force of axial collision of rod and impactor", *St. Petersburg Polytechnic University Journal: Physics and Mathematics* (to appear in 2017) [in Russian].

11. Yakubovich V. A., Starzhinski V. M., *Linear differential equations with periodic coefficients* (Wiley, New York, 1975).

12. Bogoliubov N. N., Mitropolsky Yu. A., *Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations* (Gordon and Breach, New York, 1961).

**Для цитирования:** Беляев А. К., Ма Ч.-Ч., Морозов Н. Ф., Товстик П. Е., Товстик Т. П., Шурпатов А. О. Динамика стержня при продольном ударе телом // Вестник СПбГУ. Математика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 3. С. 506–515. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.312

**For citation:** Belyaev A. K., Ma Ch.-Ch., Morozov N. F., Tovstik P. E., Tovstik T. P., Shurpatov A. O. Dynamics of rod under axial impact by a body. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2017, vol. 4 (62), issue 3, pp. 506–515. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.312

## О МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ ПО МЕХАНИКЕ «ВОСЬМЫЕ ПОЛЯХОВСКИЕ ЧТЕНИЯ»

Международная научная конференция по механике «Восьмые Поляховские чтения» пройдет с 30 января по 2 февраля 2018 года в Санкт-Петербургском государственном университете и посвящается памяти В. В. Белецкого — выдающегося ученого, специалиста в области небесной механики, теории вращательных движений искусственных и естественных небесных тел. Владимир Васильевич был членом научного комитета «Поляховских чтений», внёс большой вклад в развитие секции «Динамика космического полёта».

История конференции восходит к 1997 г., когда она впервые была проведена в формате Всероссийской конференции в связи с 90-летием выдающегося ученого, профессора СПбГУ Н. Н. Поляхова (1906–1987). С 2003 года «Поляховские чтения» приобрели статус международной конференции и по традиции проводятся в Санкт-Петербурге один раз в три года. Тематика «Поляховских чтений» охватывает практически все фундаментальные направления современной механики и продолжает расширяться в соответствии с развитием науки.

### Научные направления конференции

- |   |  |
|---|--|
| I. Теоретическая и прикладная механика.                 | VI. Устойчивость и стабилизация механических и электромеханических систем. |
| II. Динамика естественных и искусственных небесных тел. | VII. Биомеханика.  |
| III. Гидрогазодинамика.                                 | VIII. Физическая механика.   |
| IV. Физико-химическая аэромеханика.                     | IX. История механики.  |
| V. Механика деформируемого твердого тела.               |  |

Рабочие языки конференции — русский и английский.

Сборник тезисов докладов (на русском или на английском языках) будет опубликован в электронном виде к началу конференции. Труды конференции будут опубликованы в электронном виде (на английском языке) в периодическом издании AIP Conference Proceedings, входящем в Scopus и WoS Core Collection.

Адрес сайта конференции — [https://events.spbu.ru/events/polyakhov\\_readings](https://events.spbu.ru/events/polyakhov_readings).

Электронный адрес Оргкомитета конференции — [polyakhov\\_readings@spbu.ru](mailto:polyakhov_readings@spbu.ru).

Председатель конференции: Никита Федорович Морозов (академик РАН).

Сопредседатели конференции: Г. А. Леонов (член-корр. РАН), Е. В. Кустова (СПбГУ), М. П. Юшков (СПбГУ).