АСТРОНОМИЯ

УДК 521.14
MSC 31B05

КОЭФФИЦИЕНТЫ СТОКСА СЖАТОГО ЭЛЛИПСОИДА ВРАЩЕНИЯ, ЭКВИДЕНСИТЫ КОТОРОГО ПОДОБНЫ ЕГО ПОВЕРХНОСТИ*

К. В. Холшевников[1,2], *Д. В. Миланов*[1], *В. Ш. Шайдулин*[1]

[1] Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9
[2] Институт прикладной астрономии РАН,
Российская Федерация, 191187, Санкт-Петербург, наб. Кутузова, 10

Теория фигур равновесия активно развивалась в XIX столетии, когда выяснились причины, по которым наблюдаемые массивные небесные тела (Солнце, планеты, спутники) обладают близкой к эллипсоидальной формой. Было установлено, что существуют и в точности эллипсоидальные фигуры. Гравитационный потенциал таких фигур представляется рядом Лапласа, коэффициенты которого (постоянные Стокса I_n) определяются некоторым интегральным оператором. В случае однородного эллипсоида вращения был найден общий член ряда, а для некоторых других распределений масс найдены первые члены ряда. Здесь мы получили общий член ряда для произвольного распределения масс при условии, что эквиденситы (поверхности равной плотности) подобны внешней поверхности эллипсоида вращения. Получены также простые оценки и асимптотика I_n. Библиогр. 13 назв.

Ключевые слова: гравитационный потенциал, ряд Лапласа, эллипсоид.

Введение. Представление гравитационного потенциала эллипсоидов со времен Ньютона являлось важной областью математического естествознания. Сотни работ посвящены этой теме. Результаты собраны в многочисленных монографиях (см., например, [1–8]). В частности, еще Лежандр [9] сумел вычислить коэффициенты Стокса ряда Лапласа однородного эллипсоида вращения, и этот результат приводится в учебниках и монографиях. В работах [7, 10] он использован для доказательства точности оценок скорости убывания общего члена ряда Лаплапса в случае тела аналитической структуры.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Программы проведения фундаментальных исследований СПбГУ по приоритетным направлениям (грант 6.37.341.2015).

 DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.313

В настоящей статье мы обобщаем результат Лежандра на случай эллипсоида вращения, эквиденситы (поверхности равной плотности) которого подобны внешней поверхности эллипсоида, а в остальном распределение масс произвольно.

Коэффициенты Стокса. Пусть тело T ограничено поверхностью сжатого эллипсоида вращения $\mathcal{S}$ с экваториальной полуосью a и полярной полуосью $c < a$. Обозначим через ε, β первый и второй эксцентриситеты меридионального сечения эллипсоида:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}, \qquad \beta = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{c}, \qquad \varepsilon = \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}, \qquad \beta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}},$$

$$\frac{c}{a} = \sqrt{1-\varepsilon^2} = \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}}, \qquad (1-\varepsilon^2)(1+\beta^2) = 1. \tag{1}$$

Плотность ϱ тела T предполагается интегрируемой и постоянной на эллипсоидах, подобных поверхности $\mathcal{S}$.

По симметрии ряд Лапласа гравитационного потенциала V тела T содержит лишь зональные гармоники четного порядка [7]

$$V = \frac{\mathcal{G}M}{a} \sum_{n=0}^{\infty} I_n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_n\left(\frac{z}{r}\right). \tag{2}$$

Здесь $\mathcal{G}$ — гравитационная постоянная, P_n — многочлен Лежандра со стандартной нормировкой $P_n(1) = 1$, M — масса T,

$$I_n = \frac{1}{Ma^n} \int\limits_T \varrho r^n P_n\Big(\frac{z}{r}\Big) d\tau, \qquad M = \int\limits_T \varrho d\tau, \tag{3}$$

где ϱ — плотность, $d\tau$ — элемент объема. Поскольку $I_0 = 1$, а при нечетном n коэффициенты Стокса I_n равны нулю, считаем ниже индекс n четным положительным числом.

Сделаем подстановку

$$\begin{aligned} x &= au \sin\theta \cos\lambda, & r &= au\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\theta}, \\ y &= au \sin\theta \sin\lambda, & \frac{z}{r} &= \frac{\cos\theta\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\theta}}, \\ z &= cu\cos\theta. \end{aligned} \tag{4}$$

Поверхности $u = \mathrm{const}$ являются эллипсоидами $\mathcal{S}(u)$

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = u^2, \tag{5}$$

подобными внешней поверхности $\mathcal{S} = \mathcal{S}(1)$. Поэтому ϱ зависит лишь от u.

Ниже понадобятся элемент объема сплошного эллипсоида $d\tau$ и элемент поверхности граничного эллипсоида dS [11]:

$$d\tau = a^2 c\, u^2 \sin\theta\, du\, d\theta\, d\lambda, \qquad dS = a^2 \sin\theta \sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\theta}\, d\theta\, d\lambda. \tag{6}$$

Подставляя (4) в (3) и вычисляя интеграл по λ (а для массы и по θ), получим

$$I_n = \frac{2\pi a^2 c}{M} \int\limits_0^1 \varrho(u) u^{n+2}\, du \int\limits_0^\pi (1-\varepsilon^2\cos^2\theta)^{n/2} \sin\theta\, P_n\left(\frac{\cos\theta\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\theta}}\right) d\theta, \qquad (7)$$

$$M = 4\pi a^2 c \int\limits_0^1 \varrho(u) u^2\, du. \qquad (8)$$

Впрочем, для определения массы выгоднее пользоваться ее выражением через среднюю плотность $\bar{\varrho}$ (отношение массы к объему):

$$M = \frac{4\pi a^2 c}{3}\, \bar{\varrho}. \qquad (9)$$

В интеграле по θ заменим переменную:

$$\xi = \frac{\cos\theta\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\theta}}\,, \qquad \cos\theta = \frac{\xi}{\sqrt{(1-\varepsilon^2)(1+\beta^2\xi^2)}}\,, \qquad 1-\varepsilon^2\cos^2\theta = \frac{1}{1+\beta^2\xi^2}\,,$$

$$\sin\theta\, d\theta = -\frac{d\xi}{\sqrt{(1-\varepsilon^2)(1+\beta^2\xi^2)^3}}\,.$$

В понятных обозначениях имеем

$$\int\limits_0^\pi = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \int\limits_{-1}^1 \frac{P_n(\xi) d\xi}{(1+\beta^2\xi^2)^{(n+3)/2}}\,. \qquad (10)$$

Вычисленный Лежандром [9] интеграл (10) приведен в [4, 5]:

$$\int\limits_{-1}^1 \frac{P_n(\xi) d\xi}{(1+\beta^2\xi^2)^{(n+3)/2}} = \frac{2(-1)^{n/2}\,\beta^n}{(n+1)(1+\beta^2)^{(n+1)/2}} = \frac{2(-1)^{n/2}\sqrt{1-\varepsilon^2}}{n+1}\,\varepsilon^n. \qquad (11)$$

Замечание. Формула (11) доказана для вещественных чисел β^2 из интервала $-1 < \beta^2 < 1$. По принципу аналитического продолжения она верна при вещественных β^2 на луче $-1 < \beta^2 < \infty$. В частности, она справедлива при $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$.

Окончательно, будем иметь

$$I_n = (-1)^{n/2} J_n\,, \qquad J_n = \frac{\varepsilon^n}{n+1}\left(\int\limits_0^1 \varrho(u) u^{n+2}\, du\right)\left(\int\limits_0^1 \varrho(u) u^2\, du\right)^{-1} \qquad (12)$$

или

$$J_n = \frac{3\varepsilon^n}{(n+1)\bar{\varrho}} \int\limits_0^1 \varrho(u) u^{n+2}\, du. \qquad (13)$$

Оценки и асимптотика коэффициентов Стокса. ***1. Постоянная плотность.*** При $\varrho = \text{const}$ интеграл (13) элементарен, и мы получаем результат Лежандра:

$$J_n = \frac{3\varepsilon^n}{(n+1)(n+3)}\,. \tag{14}$$

2. Плотность, ограниченная и отделенная от нуля. Пусть $\varrho_1 \leqslant \varrho \leqslant \varrho_2$, где постоянные ϱ_s удовлетворяют неравенствам

$$0 < \varrho_1 < \bar{\varrho} < \varrho_2 < \infty.$$

По теореме о среднем имеем

$$J_n = \frac{3\varepsilon^n \tilde{\varrho}}{(n+1)(n+3)\bar{\varrho}}\,, \tag{15}$$

где зависящая от n величина $\tilde{\varrho}$ заключена между ϱ_1 и ϱ_2. В частности,

$$J_n = \frac{A_n}{n^\sigma}\,\varepsilon^n\,, \qquad \sigma = 2, \quad 0 < A_* < A_n < A^* < \infty \tag{16}$$

при некоторых постоянных $A_*\,, A^*$.

Замечание. Если плотность постоянна, следует считать $0 < \varrho = \varrho_1 = \varrho_2 = \bar{\varrho} = \tilde{\varrho}$.

Получим асимптотику A_n при $n \to \infty$ при дополнительном условии непрерывности ϱ слева в точке $u = 1$. Разобьем промежуток интегрирования в (13) на два точкой

$$u_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+3}}\,.$$

По теореме о среднем можем записать

$$(n+3)\int\limits_0^1 \varrho(u) u^{n+2}\,du = \tilde{\varrho}_1 u_n^{n+3} + \tilde{\varrho}_2\left(1 - u_n^{n+3}\right) = \left[\tilde{\varrho}_1 - \tilde{\varrho}_2\right] u_n^{n+3} + \tilde{\varrho}_2. \tag{17}$$

Здесь зависящие от n величины $\tilde{\varrho}_s$ ограничены, причем $\tilde{\varrho}_2$ заключена между нижней и верхней гранью функции $\varrho(u)$ на отрезке $u_n \leqslant u \leqslant 1$. Очевидно, $\tilde{\varrho}_2 \to \varrho(1)$ при $n \to \infty$,

$$\lim u_n^{n+3} = \lim\left[\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+3}}\right)^{\sqrt{n+3}}\right]^{\sqrt{n+3}} = 0. \tag{18}$$

В результате, получим

$$J_n \sim \frac{A}{n^\sigma}\varepsilon^n\,, \qquad \sigma = 2, \quad A = \frac{3\varrho(1)}{\bar{\varrho}}\,. \tag{19}$$

Пусть, например, $\varrho = \varrho_0(1 - \gamma u)$, $0 < \gamma < 1$, т. е. плотность непрерывна и возрастает с глубиной. Тогда будем иметь

$$\varrho_1 = \varrho_0(1-\gamma), \quad \varrho_2 = \varrho_0\,, \quad \bar{\varrho} = 3\int\limits_0^1 \varrho(u) u^2\,du = \left(1 - \frac{3}{4}\gamma\right)\varrho_0\,,$$

$$J_n = \frac{3\varepsilon^n[(1-\gamma)n + (4-3\gamma)]\varrho_0}{(n+1)(n+3)(n+4)\bar{\varrho}}\,, \tag{20}$$

что совпадает с (15) при

$$\tilde{\varrho} = \left[(1-\gamma) + \frac{\gamma}{n+4}\right]\varrho_0\,. \tag{21}$$

Непосредственно проверяются соотношения

$$\varrho_1 < \tilde{\varrho} < \bar{\varrho} < \varrho_2\,, \qquad \lim_{n\to\infty}\tilde{\varrho} = \varrho_1 = \varrho(1), \tag{22}$$

что подтверждает равенство (19).

3. Плотность, ограниченная сверху, но не снизу. Предположим, что плотность с ростом u от 0 до 1 убывает до нуля. Пусть, например, $\varrho = \varrho_0(1-u)^\nu$, $\nu > 0$. Тогда можем записать

$$\varrho_1 = 0, \quad \varrho_2 = \varrho_0\,, \quad \bar{\varrho} = 3\varrho_0 B(3, \nu+1),$$

$$J_n = \frac{3\varepsilon^n\varrho_0}{(n+1)\bar{\varrho}}\,B(n+3, \nu+1).$$

Выразим бета-функции через гамма-функции:

$$J_n = \frac{\varepsilon^n\Gamma(\nu+4)\Gamma(n+3)}{2(n+1)\Gamma(n+\nu+4)}\,. \tag{23}$$

Пусть ν — натуральное число. Тогда (23) равносильно

$$J_n = \frac{(\nu+3)!\varepsilon^n}{2(n+1)(n+\nu+3)(n+\nu+2)\cdots(n+3)}\,. \tag{24}$$

Отсюда вытекает асимптотика (19) при

$$\sigma = \nu + 2, \qquad A = \frac{(\nu+3)!}{2}\,. \tag{25}$$

Пусть ν — произвольное положительное число. Асимптотика гамма-функции при $n \to \infty$ подтверждает справедливость представления (19), (25) при замене $(\nu+3)!$ на $\Gamma(\nu+4)$.

Этот результат нетрудно обобщить на случай плотности вида $\varrho = \varrho_0 g(u)(1-u)^\nu$, где g ограничена, непрерывна слева в точке $u = 1$, причем $g(1) = 1$. Поступая так же, как при выводе формулы (17), получим

$$\int_0^1 \varrho(u)u^{n+2}\,du = \varrho_0(\tilde{g}_1 - \tilde{g}_2)\int_0^{u_n}(1-u)^\nu u^{n+2}\,du + \varrho_0\tilde{g}_2\int_0^1(1-u)^\nu u^{n+2}\,du. \tag{26}$$

Здесь $\tilde{g}_s$ ограничены, причем $\tilde{g}_2 \to g(1) = 1$ при $n \to \infty$. Второй интеграл справа асимптотически равен

$$B(n+3, \nu+1) = \frac{\Gamma(\nu+1)\Gamma(n+3)}{\Gamma(n+\nu+4)} \sim \frac{\Gamma(\nu+1)}{(n)^{\nu+1}}\,.$$

Первый интеграл справа согласно (18) убывает быстрее, как $e^{-\sqrt{n}}$. Мы приходим к асимптотике (19) при

$$\sigma = \nu + 2, \qquad A = \frac{3\varrho_0 \Gamma(\nu+1)}{\bar{\varrho}}\,.$$

Для целого $\nu \geqslant 0$ и ν раз дифференцируемой в точке $u = 1$ функции ϱ справедливо

$$A = \frac{3\varrho^{(\nu)}(1)}{\bar{\varrho}}\,.$$

4. Бесконечная в центре плотность. Плотность небесных тел в центре может быть весьма большой. Например, в центре Солнца плотность на 9 порядков выше, чем на границе фотосферы [12]. Поэтому допустима модель убывающей с ростом u плотности, бесконечной в точке $u = 0$, но интегрируемой по объему. Иными словами, интегрируемой должна быть функция $u^2\varrho(u)$. По принципу поверхностного слоя [7, 13] это не влияет на результаты пп. 2 и 3. Впрочем, это легко доказать и формально, выделяя в T малое ядро.

5. Бесконечная на периферии плотность. Это допущение относится только к модельным телам. Пусть тело T является тонким слоем между двумя эллипсоидами $\mathcal{S}(1-du)$ и $\mathcal{S}(1)$, а его плотность постоянна. Точнее, она не зависит от координат u, θ, λ, но зависит от параметра $du > 0$. Согласно (6) масса элементарного параллелепипеда и его *поверхностная* плотность определяются равенствами

$$dM = a^2 c\varrho \sin\theta \, du \, d\theta \, d\lambda, \qquad \varrho_{surf} = \frac{dM}{dS} = \frac{c\varrho \, du}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2\theta}}\,. \tag{27}$$

С другой стороны, полная масса T согласно (8) может быть записана в виде

$$M = \frac{4\pi}{3}\, a^2 c\varrho [1 - (1-du)^3] = 4\pi a^2 c\varrho \, du + \mathcal{O}(du^2).$$

Переходя к пределу $\varrho \to \infty$, $du \to 0$ при постоянной массе M, получим двумерное тело, эллипсоид $\mathcal{S}$, с конечной поверхностной плотностью

$$\varrho_{surf} = \frac{\delta}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2\theta}}\,, \qquad \delta = \frac{M}{4\pi a^2}\,. \tag{28}$$

Из (27), (28) вытекает $c\varrho \, du = \delta$, так что (7) переходит в

$$I_n = \frac{2\pi a^2 \delta}{M} \int\limits_0^{\pi} (1 - \varepsilon^2 \cos^2\theta)^{n/2} \sin\theta \, P_n\!\left(\frac{\cos\theta\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2\cos^2\theta}}\right) d\theta.$$

Последний интеграл дается формулами (10), (11). Окончательно, получаем

$$J_n = \frac{1}{n+1}\, \varepsilon^n. \tag{29}$$

6. Более сложная асимптотика. Асимптотика J_n может и отличаться от вида (19). Пусть, например, $\varrho = -\varrho_0 \ln(1-u)$. Для вычисления входящих в (12) интегралов достаточно воспользоваться легко проверяемой формулой

$$-(k+1) \int u^k \ln(1-u)\, du = \left(1 - u^{k+1}\right) \ln(1-u) + L(k+1),$$

где

$$L(n) = \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{s}\,.$$

Отсюда получаем

$$-(k+1)\int\limits_0^1 u^k \ln(1-u)\,du = L(k+1).$$

В частности, будем иметь

$$\int\limits_0^1 \varrho(u)u^2\,du = \frac{11}{18}\,\varrho_0\,,$$

$$\int\limits_0^1 \varrho(u)u^{n+2}\,du = \frac{\varrho_0}{n+3}\,L(n+3).$$

Окончательно,

$$J_n = \frac{18\varepsilon^n L(n+3)}{11(n+1)(n+3)}\,, \qquad J_n \sim \frac{18\varepsilon^n \ln n}{11n^2}\,. \tag{30}$$

Заключение. Мы определили коэффициенты Стокса сплошного эллипсоида, поверхности равной плотности которого подобны граничному эллипсоиду. В случае ограниченной сверху и отделенной от нуля плотности коэффициенты убывают по закону (19), причем $\sigma = 2$. Если плотность спадает до нуля на поверхности, то σ может быть произвольным числом, большем двух, в зависимости от скорости убывания плотности. Если плотность бесконечна в центре масс, это не влияет на оценки (16), (19). Напротив, бесконечная на периферии плотность может повлечь $\sigma < 2$ или более сложный закон, чем (19). Например, для распределения масс по поверхности граничного эллипсоида имеем $\sigma = 1$. Это является следствием известного факта, что дифференциальные свойства потенциала простого слоя хуже свойств потенциала трехмерного тела. Соответственно, ряд Лапласа двумерных тел сходится медленнее, чем для трехмерных.

Полученные простые оценки и асимптотика позволяют найти область сходимости ряда Лапласа (2). Важно, что при любой функции $\varrho(u)$ эта область одна и та же: $r > a\varepsilon$, а при ограниченности $\varrho(u)$ вблизи поверхности $\mathcal{S}$ даже $r \geqslant a\varepsilon$. Впрочем, уже для градиента потенциала ряд расходится (или сходится условно) в некоторых точках сферы $r = a\varepsilon$. Напомним, что ряд Лапласа сходится именно к потенциалу (т. е. в (2) имеет место равенство) в пересечении указанной области и внешнего к эллипсоиду пространства. Таким образом, ряд (2) представляет потенциал во всем внешнем пространстве при $\varepsilon \leqslant 1/\sqrt{2} = 0.707107$, или, что то же, $c/a \geqslant 1/\sqrt{2}$. В противном случае ряд расходится в части внешнего пространства в окрестности полюсов.

Литература

1. *Пуанкаре А.* Фигуры равновесия жидкой массы. М.; Ижевск: РХД, 2000. 208 с.
2. *Аппель П.* Фигуры равновесия вращающейся жидкости. Л.; М.: ОНТИ, 1936. 376 с.
3. *Сретенский Л. Н.* Теория ньютоновского потенциала. М.; Л.: ГИТТЛ, 1946. 320 с.
4. *Гобсон Е. В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: ИЛ, 1952. 476 с.
5. *Дубошин Г. Н.* Теория притяжения. М.: Физматлит, 1961. 288 с.

6. *Чандрасекар С.* Эллипсоидальные фигуры равновесия. М.: Мир, 1973. 289 с.

7. *Антонов В. А., Тимошкова Е. И., Холшевников К. В.* Введение в теорию ньютоновского потенциала. М.: Наука, 1988. 270 с.

8. *Кондратьев Б. П.* Теория потенциала и фигуры равновесия. М.; Ижевск: Изд. ИКИ, 2003. 624 с.

9. *Legendre A. M.* Mémoires présentés par les savants étrangers. 1785. Vol. X.

10. *Kholchevnikov C.* Le développement du potentiel dans le cas d'une densité analytique // Celestial Mechanics. 1971. Vol. 3, No 2. P. 232–240.

11. *Фавар Ж.* Курс локальной дифференциальной геометрии. М.: ИЛ, 1960. 560 с.

12. *Guenther D. B., Demarque P., Kim Y. C., Pinsonneault M. H.* Standard solar model // The Astrophysical Journal. 1992. Vol. 387. P. 372–393.

13. *Kholshevnikov K. V., Shaidulin V. Sh.* Existence of a class of irregular bodies with a higher convergence rate of Laplace series for the gravitational potential // Celest. Mech. Dyn. Astr. 2015. Vol. 122, issue 4. P. 391–403.

Статья поступила в редакцию 13 декабря 2016 г.; рекомендована в печать 30 марта 2017 г.

Сведения об авторах

Холшевников Константин Владиславович — доктор физико-математических наук, профессор; kvk@astro.spbu.ru

Миланов Данила Владимирович — аспирант; danila.milanov@gmail.com

Шайдулин Вахит Шамильевич — кандидат физико-математических наук, доцент; shvak@yandex.ru

STOKES CONSTANTS OF AN OBLATE ELLIPSOID OF REVOLUTION WITH EQUIDENSITES HOMOTHETIC TO ITS SURFACE

Konstantin V. Kholshevnikov[1,2], *Danila V. Milanov*[1], *Vakhit Sh. Shaidulin*[1]

[1] St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; kvk@astro.spbu.ru, danila.milanov@gmail.com, shvak@yandex.ru

[2] Institute of Applied Astronomy RAS, nab. Kutuzova, 10, St. Petersburg, 191187, Russian Federation; kvk@astro.spbu.ru

Theory of the figures of equilibrium was developed actively during XIX century when causes making the form of observable massive celestial bodies (the Sun, planets, moons) almost ellipsoidal were discovered. The existence of exactly ellipsoidal figures was established. The gravitational potential of such figures can be presented as Laplace series. Its coefficients (Stoke's constants I_n) are defined by a certain integral operator. The general term of the series was found in case of a homogeneous ellipsoid, and first few terms were found for several other mass distributions. Here we have found the general term of the series for an arbitrary mass distributions under condition that equidensits (surfaces of equal density) are homothetic to the outer surface of the ellipsoid of revolution. Simple estimates and asymptotics of I_n are also found. Refs 13.

Keywords: gravitational potential, Laplace series, ellipsoid.

References

1. Poincaré H., *Figures d'équilibre d'une masse fluide* (Gauthier-Villars, Paris, 1900) [in French].

2. Appell P., *Figures d'équilibre d'une masse liquide homogène en rotation* (Gauthier-Villars, Paris, 1932) [in French].

3. Sretensky L. N., *Theory of Newtonian Potential* (GITTL, Moscow, Leningrad, 1946, 320 p.) [in Russian].

4. Hobson E. W., *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1931, 476 p.).

5. Duboshin G. N., *Theory of Attraction* (Fizmatgis, Moscow, 1961) [in Russian].

6. Chandrasekhar S., *Ellipsoidal Figures of Equilibrium* (Dover Publs, 1987, 264 p.).

7. Antonov V. A., Timoshkova E. I., Kholshevnikov K. V., *Introduction to the Theory of Newtonian Potential* (Nauka, Moscow, 1988, 270 p.) [in Russian].

8. Kondratiev B. P., *Theory of Potential, and Figures of Equilibrium* (Inst. Kosm. Res. Publ., Moscow, Ijevsk, 2003, 624 p.) [in Russian].

9. Legendre A. M., *Mémoires présentées par les savants étrangers* (**X**, 1785) [in French].

10. Kholchevnikov C., “Le développement du potentiel dans le cas d’une densité analytique”, *Celestial Mechanics* **3**(2), 232–240 (1971).

11. Favard J., *Cours de géométrie différentielle locale* (Gauthier-Villars, Paris, 1957) [in French].

12. Guenther D. B., Demarque P., Kim Y. C., Pinsonneault M. H., “Standard solar model”, *The Astrophysical Journal* **387**, 372–393 (1992).

13. Kholshevnikov K. V., Shaidulin V. Sh., “Existence of a class of irregular bodies with a higher convergence rate of Laplace series for the gravitational potential”, *Celest. Mech. Dyn. Astr.* **122**, 391–403 (2015).

Для цитирования: Холшевников К. В., Миланов Д. В., Шайдулин В. Ш. Коэффициенты Стокса сжатого эллипсоида вращения, эквиденситы которого подобны его поверхности // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 3. С. 516–524. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.313

For citation: Kholshevnikov K. V., Milanov D. V., Shaidulin V. Sh. Stokes constants of an oblate ellipsoid of revolution with equidensites homothetic to its surface. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2017, vol. 4 (62), issue 3, pp. 516–524. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.313