

ОСОБЕННОСТИ ДВИЖЕНИЯ МАЯТНИКА С СИНГУЛЯРНЫМ КОНФИГУРАЦИОННЫМ ПРОСТРАНСТВОМ

С. Н. Бурьян

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Рассматривается плоский двойной математический маятник, незакрепленный конец которого движется по эллипсу. В общем случае конфигурационное пространство маятника представляет собой две непересекающиеся кривые. Можно подобрать параметры так, что эти кривые будут пересекаться под ненулевым углом. При определенных условиях на кривизну эллипса кривые не только пересекаются, но и имеют касание первого порядка. В этом случае возникает геометрическая неопределенность — по какой ветви двигаться маятнику после прохождения особой точки.

Показывается, что для случая, когда кривые конфигурационного пространства пересекаются под ненулевым углом, множители Лагранжа по модулю стремятся к бесконечности при движении к особой точке. Наблюдаемое же движение оказывается динамически определенным. Маятник всегда переходит с одной ветви на другую при прохождении особой точки. Предложено качественное объяснение этого эффекта. Библиогр. 11 назв. Ил. 3.

Ключевые слова: конфигурационные пространства с особенностями, множители Лагранжа, двойной маятник.

1. Введение. Механические системы с особенностями конфигурационного пространства естественно возникают в классической механике. Например, если в шарнирном механизме часть звеньев может складываться в одно звено, то его конфигурационное пространство уже не будет многообразием. Так, шарнирная рама со звеньями $(1; 1; 1; 1)$ и одним закрепленным звеном допускает три типа движения. Его конфигурационное пространство представляет собой объединение трех попарно пересекающихся окружностей. Другим примером служит двойной плоский маятник со специальным ограничением, рассматриваемым далее в статье. На этом маятнике физически реализуется особенность касания первого порядка.

На данный момент нет общей теории для описания поведения систем с особенностями конфигурационного пространства. Постулируется, что вне особенности движение механической системы описывается классическими уравнениями Лагранжа или Гамильтона.

С точки зрения лагранжевой механики двойной маятник со связью — это механическая система с тремя голономными связями. Уравнения связей независимы вне особой точки. В особой точке, где геометрически возможен переход с одной кривой движения на другую, ранг матрицы градиентов уравнений связей падает на единицу. Это приводит к трудностям, связанными с уравнениями Лагранжа первого рода. Похожие результаты, но в неголономной механике, получены в [1] для движения балки с двумя коньками. При анализе и составлении уравнений будем следовать [2, 3]. Вопросы о реализации связей рассматриваются, например, в статье [4].

Существует несколько подходов к решению проблемы особенностей, основанных на обобщении гамильтонова формализма, который связан с различными обобщениями понятия гладкого многообразия: пространства Сикорского [5], пространства

Фр елихера [6], диффеология [7], диффеотопия [8] и др. Каждый из указанных методов позволяет решить отдельные вопросы механики и дифференциальной геометрии (см., например, [9–11]) и претендует на универсальность. Однако есть основания полагать, что применение перечисленных методов к задачам теоретической механики имеет существенные ограничения.

В этой работе для исследования маятника рассмотрен «предельный» лагранжевый подход.

2. Маятник. Рассмотрим плоскую механическую систему (рис. 1): к точке $A(0, 0)$ шарнирно прикреплен стержень $l_1 = AB$ длины 2, а к точке $B(x_1, y_1)$ шарнирно прикреплен стержень $l_2 = BC$ длины 1. В дальнейшем будем называть ее *свободным маятником*. Обычные обобщенные координаты этой системы — это пара углов (φ, ψ) , которые отсчитывают отклонение стержней l_1 и l_2 от вертикали соответственно. Конфигурационное пространство — двумерный тор \mathbb{T}^2 в четырехмерном пространстве.

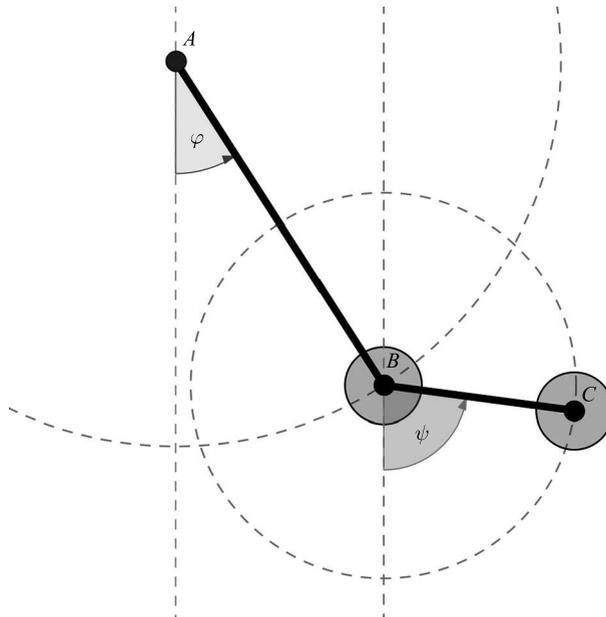


Рис. 1. Свободный двойной маятник.

Пусть точка $C(x_2, y_2)$ движется по линии, заданной уравнением $F(x, y) = 0$ (рис. 2). Будем называть эту систему *маятником со связью*. У такой системы остается одна степень свободы.

Зафиксируем значение $|AC| = d$ ($1 < d < 3$) и направление вектора AB . Рассмотрим $\triangle ABC$, длины всех сторон которого известны, следовательно он определяется с точностью до отражения относительно оси AC . Значит, есть два положения точки B , отвечающие ему: когда стержень l_2 находится правее стержня l_1 , и когда стержень l_2 находится левее l_1 .

Тогда и для каждого d ($1 < d < 3$) есть два различных описанных положения системы. Множеству положений маятника, при которых короткий стержень опережает длинный (или запаздывает), соответствует гладкая кривая в конфигурационном пространстве маятника. Эти две кривые будем также называть *ветвями*. Чтобы перейти

с одной ветви на другую, маятник должен пройти через положение, при котором его стержни лежат на одной прямой. Это возможно лишь при $|AC| = 1$ (сложенный маятник) или $|AC| = 3$ (раскрытый маятник). Далее мы будем рассматривать первый случай. Точку конфигурационного пространства, соответствующую положению маятника с $|AC| = 1$ естественно называть *точкой ветвления* — геометрически движение из нее возможно по двум различным кривым.

В общем случае ветви пересекаются под ненулевым углом. Рассмотрим окрестность точки ветвления.

Параметризация исходной системы через координаты двумерного тора не является удобной для вывода уравнений движения. Рассмотрим вместо нее полярную систему координат. Ее полюсом будет точка A , а полярной осью (AX) — вертикальная ось с положительным направлением по направлению действия силы тяжести. Ось AU направим ортогонально AX (рис. 2).

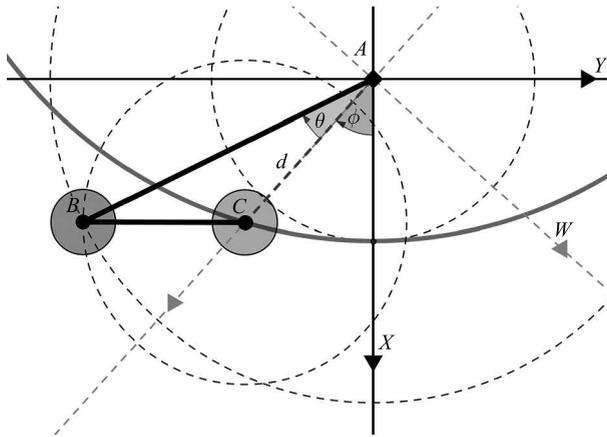


Рис. 2. Двойной маятник со связью.

Обозначим угол между осью AX и прямой AC через ϕ . Введение этого угла, отличного от угла φ , позволит выписать явную зависимость координат и скоростей точек B и C при заданной линии связи. Пусть связь $F(x, y) = 0$ такова, что прямая $y = \operatorname{tg} \phi x$ пересекает ее в одной точке (точке C). Это позволит также параметризовать кривую углом ϕ : уравнением связи является $d = d(\phi)$.

Имеет смысл рассматривать $d(\phi)$ как некоторую гладкую функцию на интервале $[\phi_1, \phi_2]$. Например, пусть связь реализована в виде эллипса с фокусами F_1 и F_2 на оси AX (выше точки A), точка $(a, 0)$ — центр эллипса, r_1 и r_2 — большие полуоси. Уравнение описанного эллипса примет вид

$$\frac{(x_2 - a)^2}{r_1^2} + \frac{y_2^2}{r_2^2} = 1. \quad (1)$$

Тогда при $\phi \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ прямая $y = \operatorname{tg} \phi x$ пересекает эллипс в точке $C = (x, x \operatorname{tg} \phi)$, где

$$x = x(\phi) = \frac{\frac{a}{r_1^2} - \sqrt{\frac{1}{r_1^2} + \frac{\operatorname{tg}^2 \phi}{r_2^2} \left(1 - \frac{a^2}{r_1^2}\right)}}{\frac{1}{r_1^2} + \frac{\operatorname{tg}^2 \phi}{r_2^2}}. \quad (2)$$

Выражение под корнем в (2) всегда положительно, т.к. $|a| < r_1$. Остальные функции в (2) гладкие, поэтому и $d(\phi) = \sqrt{x(\phi)^2 + y(\phi)^2} = x(\phi)\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \phi}$ — гладкая функция. Явное выражение для функции $d(\phi)$ не столь короткое.

Рассмотрим зависимость координат точек B и C от пары (d, ϕ) — полярных координат. Координаты точки C записываются просто:

$$(x_2, y_2) = (d \cos \phi, d \sin \phi).$$

Обозначим теперь $\theta = \angle CAB$. Тогда можем записать $\angle(XAB) = \phi + \theta$ и, значит, $B = (2 \cos(\phi + \theta), 2 \sin(\phi + \theta))$. Из $\triangle ABC$ по теореме косинусов имеем $\cos \theta = (d^2 + 3)/4d$. Тогда $\sin \theta = \pm \sqrt{10d^2 - d^4 - 9}/(4d)$, где знак « \pm » отвечает за выбор ветви маятника. По формулам суммы косинусов и синусов получаем

$$(x_1^\pm, y_1^\pm) = \left(\frac{3 + d^2}{2d} \cos \phi \mp \frac{\sqrt{10d^2 - d^4 - 9}}{2d} \sin \phi, \frac{3 + d^2}{2d} \sin \phi \pm \frac{\sqrt{10d^2 - d^4 - 9}}{2d} \cos \phi \right). \quad (3)$$

Рассмотрим движение при заданной параметризации $d = d(\phi)$. Каждая ветвь движения параметризуется углом ϕ . Скорости точек в этой параметризации имеют вид

$$(V_{Cx}, V_{Cy}) = (\dot{x}_2, \dot{y}_2) = (d' \cos \phi - d \sin \phi, d' \sin \phi + d \cos \phi) \dot{\phi}, \quad (4)$$

$$V_{Bx}^\pm = \dot{x}_1^\pm = \left(-\sin \phi \frac{3 + d^2}{2d} + \cos \phi \frac{d^2 - 3}{2d^2} d' \mp \cos \phi \frac{\sqrt{10d^2 - d^4 - 9}}{2d} \mp \sin \phi \frac{9 - d^4}{2d^2 \sqrt{10d^2 - d^4 - 9}} d' \right) \dot{\phi}, \quad (5)$$

$$V_{By}^\pm = \dot{y}_1^\pm = \left(\cos \phi \frac{3 + d^2}{2d} + \sin \phi \frac{d^2 - 3}{2d^2} d' \mp \sin \phi \frac{\sqrt{10d^2 - d^4 - 9}}{2d} \pm \cos \phi \frac{9 - d^4}{2d^2 \sqrt{10d^2 - d^4 - 9}} d' \right) \dot{\phi}. \quad (6)$$

3. Связь скоростей и кривизны линии связи. Из формулы (3) следует, что при $d \neq 1$ в окрестности положения равновесия координаты точек B и C являются гладкими функциями угла ϕ . Рассмотрим положение равновесия. Пусть в окрестности U_0 точки $\phi = 0$ функция $d(\phi)$ является гладкой, $d(0) = 1$ и $d(\phi) = d(-\phi)$. Тогда $d'(0) = 0$. Предположим, что $d''(0) > 0$. По лемме Адамара получаем

$$d(\phi) = 1 + \phi^2 g(\phi), \quad g(\phi) \in C^\infty(U_0).$$

Тогда справедливо неравенство $2g(0) = d''(0) > 0$. По непрерывности, при малых $\phi > 0$ определена функция $u := \sqrt{d-1} = \phi \sqrt{g}$, и она является гладкой. Следовательно, можем записать $\sqrt{10d^2 - d^4 - 9} = \sqrt{d-1} \sqrt{(d+1)(9-d^2)} = u(\phi)A(\phi)$, где $u, A \in C^\infty(U_0)$.

Вычислим формулу кривизны со знаком k_{or} кривой $d = d(\phi)$, заданной в полярных координатах (d, ϕ) :

$$k_{or} = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} = \frac{d^2 + 2d'^2 - dd''}{(d^2 + d'^2)^{3/2}}.$$

В нашем случае $d(0) = 1$, $d'(0) = 0$, поэтому $k_{or}(0) = 1 - d''(0)$. Если кривизна линии $d = d(\phi)$ в нуле отлична от 1, то $d''(0) \neq 0$, и ветви различаются направлением скоростей (5), (6).

Рассмотрим случай $k_{or}(0) = 1$. Положим $d = 1 + \phi^n g_n(\phi)$, $g_n(0) \neq 0$, $n > 2$ (где n — первая такая степень в разложении d в ряде Адамара). В этом случае имеем

$$\frac{d'}{\sqrt{d-1}} = \frac{\phi^{n-1}C(\phi)}{\phi^{n/2}g} \rightarrow 0, \quad \phi \rightarrow 0,$$

где $C(\phi)$ — некоторая гладкая функция. Следовательно, скорости по двум ветвям (5), (6) в положении равновесия совпадают. Таким образом, условие равенства скоростей описаны в геометрических терминах: достаточно выполнения $d'(0) = 0$, $k_{or}(0) = 1$.

Для эллипса (1) условие на единичную кривизну можно получить из стандартной параметризации $x_2 = a + r_1 \cos \Theta$, $y_2 = r_2 \sin \Theta$:

$$k_{or}(\Theta) = \frac{r_1 r_2}{(r_1^2 \sin^2 \Theta + r_2^2 \cos^2 \Theta)^{3/2}}, \quad k_{or}(0) = \frac{r_1}{r_2} = 1 \iff r_1 = r_2^2. \quad (7)$$

Значит, эллипс должен быть «вытянут» по оси AX .

4. Движение свободного маятника вблизи точки ветвления. Рассмотрим свободный двойной маятник со стандартными обобщенными координатами (φ, ψ) и изучим его поведение в окрестности точки $(0, \pi)$. Массу в точке B обозначим через m_1 , в точке C — через m_2 .

Координаты точек $B(x_1, y_1)$ и $C(x_2, y_2)$ задаются равенствами

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \cos \varphi, & y_1 &= 2 \sin \varphi, \\ x_2 &= 2 \cos \varphi + \cos \psi, & y_2 &= 2 \sin \varphi + \sin \psi. \end{aligned}$$

В положении равновесия $\varphi = 0, \psi = \pi$ имеем

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{2}\dot{y}_1, \quad \dot{\psi} = \dot{y}_1 - \dot{y}_2. \quad (8)$$

Уравнения Лагранжа второго рода в криволинейных координатах (φ, ψ) (величина $n = m_1/(m_1 + m_2)$) запишем в виде

$$l_1 \ddot{\varphi} + n l_2 [\cos(\varphi - \psi) \ddot{\psi} + \sin(\varphi - \psi) \dot{\psi}^2] + g \sin \varphi = 0, \quad (9)$$

$$l_2 \ddot{\psi} + l_1 [\cos(\varphi - \psi) \ddot{\varphi} + \sin(\varphi - \psi) \dot{\varphi}^2] + g \sin \psi = 0. \quad (10)$$

Это система линейных уравнений относительно обобщенных ускорений $\ddot{\psi}$ и $\ddot{\varphi}$, и ее определитель Δ всегда положителен: $\Delta = l_1 l_2 - n l_1 l_2 \cos(\varphi - \psi) > 0$. Уравнения движения разрешимы относительно старшей производной.

Итак, зная начальные данные $\varphi_* = 0, \psi_* = \pi, \dot{\varphi}_*, \dot{\psi}_*$, решим задачу Коши. Пусть $\varphi(t), \psi(t)$ — ее решение. Определим, будет ли короткий стержень опережать длинный или наоборот. Для этого перейдем в более удобную, подвижную систему отсчета, связанную со звеном AB : одну ось направим по этому звену, а другую, AW , ортогонально ей. В этой системе координат точка B неподвижна, а точка C движется по окружности. Ось AB разбивает систему координат на две части — правую и левую, которые соответствуют случаям, когда короткий стержень опережает длинный и наоборот. Переход происходит, когда маятник проходит через AB .

Новые координаты выражаются через старые как поворот на угол φ :

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \cos \varphi \\ 2 \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_2 \\ \tilde{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \cos \varphi + \cos \psi \\ 2 \sin \varphi + \sin \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\psi - \varphi) \\ \sin(\psi - \varphi) \end{pmatrix}.$$

Значит, за переход отвечает знак $\sin(\psi - \varphi)$: если он меняет знак, то происходит переход с одной ветви движения на другую.

Рассмотрим случай, когда в положении равновесия свободный маятник имеет те же скорости, что и маятник со связью, который пришел в особую точку по эллипсу с $k_{or}(0) \neq 1$. Слагаемые с особенностями в (5), (6) не равны нулю, и поэтому из (8) имеем $\dot{\psi} - \dot{\varphi} \neq 0$. Более того, знак последнего выражения зависит от выбора ветвей. Разложим синус разности углов ψ и φ в ряд:

$$\sin(\psi(t) - \varphi(t)) = 0 + (\dot{\psi} - \dot{\varphi})t + o(t).$$

При достаточно малых $t > 0$ знак последнего выражения определяется знаком $\dot{\psi} - \dot{\varphi}$, поэтому при $t > 0$ и $t < 0$ синус разности углов ψ и φ меняет знак — происходит смена ветвей.

5. Обобщенные реакции. Изучим вопросы применимости уравнений Лагранжа первого рода к движению двойного маятника по эллипсу (когда конфигурационное пространство имеет особенности). Будем рассматривать случай, когда $m_1 = m_2 = m$, т. е. массы грузов одинаковы.

Выпишем уравнения голономных связей в пространстве свободной системы $\mathbb{R}^4 = (z) = (x_1, y_1, x_2, y_2)$:

$$f^1 = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 - 4) = 0;$$

$$f^2 = \frac{1}{2}((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - 1) = 0;$$

$$f^3 = \frac{1}{2} \left(\frac{(x_2 - a)^2}{r_1^2} + \frac{y_2^2}{r_2^2} - 1 \right) = 0.$$

Первое уравнение соответствует фиксации длины стержня AB , второе — фиксации длины стержня BC . Третье уравнение — условие, что точка C движется по эллипсу (1). Градиенты связей определяются формулой

$$\begin{pmatrix} \nabla f^1 \\ \nabla f^2 \\ \nabla f^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 0 & 0 \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ 0 & 0 & x_2 - a/r_1^2 & y_2/r_2^2 \end{pmatrix}.$$

В положении равновесия $(2, 0, 1, 0)$ ранг матрицы связей равен 2. В окрестности этой точки он равен 3, так как есть невырожденная подматрица 3×3 .

Уравнения Лагранжа первого рода для голономных связей [2, с. 26–27] (Z — вектор действующих сил) записываются в виде

$$m\ddot{z}_\mu = Z_\mu + \sum \Lambda_{\varkappa} \nabla f^{\varkappa}, \quad \mu = 1..4, \varkappa = 1, 2, 3; \quad (11)$$

$$\sum \sum \frac{\partial f^{\varkappa}}{\partial z_\mu \partial z_{\mu^*}} \dot{z}_\mu \dot{z}_{\mu^*} + m^{-1} \sum \frac{\partial f^{\varkappa}}{\partial z_\mu} \left(Z_\mu + \Lambda_{\varkappa^*} \frac{\partial f^{\varkappa^*}}{\partial z_\mu} \right) = 0. \quad (12)$$

Вектор сил \vec{Z} имеет координаты $(m\mathbf{g}, 0, m\mathbf{g}, 0)$, т. к. сила тяжести действует вдоль оси Ax . Из последних уравнений получаем линейную систему относительно множителей Лагранжа с матрицей $G_{\mathcal{X}\mathcal{X}^*} = \nabla f^{\mathcal{X}} \cdot \nabla f^{\mathcal{X}^*}$ — матрицей скалярных произведений градиентов. Вектор правых частей U при этом составлен из выражений

$$-\sum \sum \frac{\partial f^{\mathcal{X}}}{\partial z_{\mu} \partial z_{\mu^*}} \dot{z}_{\mu} \dot{z}_{\mu^*} - \sum \frac{\partial f^{\mathcal{X}}}{\partial z_{\mu}} Z_{\mu}.$$

Явное вычисление показывает, что справедливо выражение

$$U = \sum \sum \frac{\partial f^{\mathcal{X}}}{\partial z_{\mu} \partial z_{\mu^*}} \dot{z}_{\mu} \dot{z}_{\mu^*} + m^{-1} \sum \frac{\partial f^{\mathcal{X}}}{\partial z_{\mu}} Z_{\mu} = \begin{pmatrix} (x_1)^2 + (y_1)^2 + x_1 \mathbf{g} \\ (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \\ \frac{(x_2)^2}{r_1^2} + \frac{(y_2)^2}{r_2^2} + \frac{x_2 - a}{r_1^2} \mathbf{g} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Вне особой точки матрица $g_{\mathcal{X}\mathcal{X}^*}$ невырожденная, так как связи независимы. В особой точке имеем $\nabla f^1 = (2, 0, 0, 0)$, $\nabla f^2 = (1, 0, -1, 0)$, $\nabla f^3 = (0, 0, c, 0)$, где $c = (1 - a)/r_1^2$. Заметим также, что $1 - a = r_1$, если эллипс (1) при $\phi = 0$ проходит через точку $(1, 0)$. В данном пункте рассматривается только этот случай.

Матрица скалярных произведений градиентов в особой точке имеет вид

$$G_{\mathcal{X}\mathcal{X}^*}|_{z=(2.0.1.0)} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -c \\ 0 & -c & c^2 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Ранг этой матрицы равен двум, поэтому не для всех векторов правых частей есть решение. Если правая часть есть $U = (u_1, u_2, u_3)$, то для существования решения необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{u_3}{c} + u_2 - \frac{u_1}{2} = 0. \quad (15)$$

Заметим, что при $k_{or}(0) = 1$ вектор скорости изображающей точки $z = (x_1, y_1, x_2, y_2)$ в положении равновесия $w = (2, 0, 1, 0)$ будет распределен так: $\dot{z} = (0, 2v, 0, v)$ (см. (5), (6)), где $v = \dot{\phi}$. Подставив эти значения в формулу (13), получим вектор $U_0 = (4v^2 + 2\mathbf{g}, v^2, v^2/r_2^2 + c\mathbf{g})$. Проверим условие (15): $u_3/c + u_2 - u_1/2 = v^2(1/cr_2^2 - 1)$. Получаем значение выражения $cr_2^2 = r_2^2(1 - a)/r_1^2 = r_2^2/r_1 = 1$ для эллипса с $k_{or}(0) = 1$ (см. (7)). Значит, система $G_{\mathcal{X}\mathcal{X}^*}|_{z=(2.0.1.0)}(\Lambda) = U_0$ имеет решение. Обобщенные реакции связей в этом случае определены неоднозначно.

Рассмотрим теперь движение по эллипсу с $k_{or}(0) \neq 1$. В этом случае скорости точки B при движении (в \mathbb{R}^4) по разным ветвям при подходе к положению равновесия $(2, 0, 1, 0)$ (или, равносильно, $\phi = 0$) различны. Согласно (6) получаем $\dot{y}_2 = 2\dot{\phi} + C$, где $C = 2u'(0)$, $u = \sqrt{d - 1}$. Скорости остальных координат в положении равновесия не изменятся ($\dot{d}(0) = 0$). Скорость изображающей точки в положении равновесия теперь есть $\dot{z} = (0, 2v + C, 0, v)$. Мы уже знаем, что при $C = 0$ матрица (14) имеет решение для правой части (13). Матрица (14) зависит только от $c = 1/r_1$. Если поменять r_2 , то матрица не изменится, но мы получим уже трансверсальное пересечение ветвей движения маятника. Добавка C в скорость изображающей точки добавляет к правой части (13) вектор $U_1 = (2vC + C^2, 2vC + C^2 - 2vC, 0)$. Для вектора U_1 условие (15) выполняется только при $C = 0$, т. е. когда $r_1 = r_2^2$, т. е. в случае касания ветвей движения, который сейчас не выполнен. Тогда, если бы система $G_{\mathcal{X}\mathcal{X}^*}|_{z=(2.0.1.0)}(\Lambda) = U_0 + U_1$ имела решение, то имела бы решение и $G_{\mathcal{X}\mathcal{X}^*}|_{z=(2.0.1.0)}(\Lambda) = U_1$, что не выполнено.

В трансверсальном случае множители Лагранжа как решение системы (12) при $\phi \rightarrow 0$ по абсолютной величине стремятся к бесконечности. Действительно, решая систему (12) по правилу Крамера, замечаем, что в знаменателе будет стоять определитель системы матрицы (14), которая не вырождена в окрестности особой точки и ее ранг падает на 1 в точке ветвления, а числитель при $\phi \rightarrow 0$ имеет конечный ненулевой предел, поскольку каждые два столбца матрицы G_{xx^*} линейно независимы, а вектор $U_0 + U_1$ не лежит в линейной оболочке столбцов G_{xx^*} . Поскольку числитель имеет ненулевой предел, то множители Лагранжа $|\Lambda_x| \rightarrow \infty, \phi \rightarrow 0$.

Поэтому и с точки зрения предельного перехода при движении системы в трансверсальном случае к точке ветвления возникает вопрос, связанный с реализацией связи как силы реакции.

Для особого эллипса решение системы существует. В точке $(2, 0, 1, 0)$ у множителей Лагранжа есть неопределенность вида $0/0$ — числитель тоже обращается в 0.

6. Уравнение движения на линии связи. Рассмотрим уравнения Лагранжа второго рода и уравнения Гамильтона, которые можно написать только вне особой точки. Изучим, что происходит при смене ветвей в точке ветвления. Угол $\theta := \widehat{BAC}$ отсчитывается против часовой стрелки, как и угол ϕ . По теореме косинусов получаем

$$\theta^\pm = \theta^\pm(d) = \pm \arccos \frac{3 + d^2}{4d}.$$

Выбор знака означает выбор ветви, когда длинный стержень опережает короткий или наоборот. Имеем

$$(x_1^\pm, y_1^\pm) = (l_1 \cos(\phi + \theta^\pm(d)), l_1 \sin(\phi + \theta^\pm(d))).$$

Выпишем скорости точек, взяв за параметр движения угол ϕ :

$$(\dot{x}_1^\pm, \dot{y}_1^\pm) = l_1 \dot{\phi} (1 \pm \theta'_a d'_\phi) (-\sin(\phi \pm \theta), \cos(\phi \pm \theta));$$

$$V_B^2 = (\dot{x}_1^\pm)^2 + (\dot{y}_1^\pm)^2 = l_1^2 \dot{\phi}^2 (1 \pm \theta'_a d'_\phi)^2;$$

$$V_C^2 = (\dot{x}_2)^2 + (\dot{y}_2)^2 = (d^2 + (d'_\phi)^2) \dot{\phi}^2.$$

Кинетическая и потенциальная энергии запишутся в виде

$$T^\pm(\phi, \dot{\phi}) = \left(\frac{m}{2} (1 \pm \theta'_a d'_\phi)^2 + \frac{m}{2} (d^2 + (d'_\phi)^2) \right) \dot{\phi}^2 := F^\pm(\phi) (\dot{\phi})^2; \quad (16)$$

$$V^\pm(\phi) = -mgl_1 \cos(\phi \pm \theta(d)) - mgd \cos \phi. \quad (17)$$

Далее будем писать просто $F(\phi)$ и $V(\phi)$, подразумевая движение по одной из ветвей. Запишем оператор Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial T}{\partial \phi} = 2F(\phi) \ddot{\phi} + F'_\phi(\phi) (\dot{\phi})^2.$$

Обобщенная сила Q_ϕ равна $-V'_\phi$. Уравнение движения примет вид

$$\ddot{\phi} = \frac{-V'_\phi - F'_\phi(\phi) (\dot{\phi})^2}{2F(\phi)}.$$

Вторую производную всегда можно выделить, поскольку $F > 0$ за счет слагаемого $\frac{m}{2}(d^2 + (d'_\phi)^2)\dot{\phi}^2$ в (16). Все участвующие в уравнении функции зависят лишь от координаты на линии связи.

Уравнения движения можно записать в форме Гамильтона: обобщенный импульс $p = \partial L / \partial \dot{\phi}$, тогда $H = p\dot{\phi} - L = T + V$. Энергия системы имеет вид $H = \frac{p^2}{4F(\phi)} + V(\phi)$. Уравнения движения запишутся следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{p} = \frac{F'(\phi)}{4F^2(\phi)} p^2 - V_\phi(\phi); \\ \dot{\phi} = \frac{p}{2F(\phi)}. \end{cases} \quad (18)$$

Вне окрестности сингулярной точки на каждой взятой ветке правые части уравнений есть гладкие функции, поэтому при движении до положения $\phi = 0$ координаты изменяются гладко.

В случае $k_{or}(0) = 1$ имеем значение $F^\pm(0) = \frac{mc}{2} + 2m_B$. Можно также проверить, что $F'(0)^\pm = \pm c$, где c — ненулевая константа. Так как $V'(0)^\pm = 0$, то в случае перехода с одной ветви движения на другую у системы происходил бы разрыв вдоль оси p : при этом вектор поля сохранял длину, но менял бы направление на симметричное. На оси импульсов при $\phi = 0$ вектор скорости $(c_1 p^2, c_2 p)$ переходил бы в вектор $(-c_1 p^2, c_2 p)$ для постоянных $c_{1,2}$, т. е. вектор в фазовом пространстве должен был «вращаться».

7. Эксперимент. Было сделано несколько экспериментальных моделей двойного маятника, свободный конец которого движется по эллипсу. Связь реализовывалась в виде нити, которая крепилась в точках F_1 и F_2 — фокусах эллипса (они выбирались на оси Ax выше точки A); нить проходила через кольцо, закрепленное в точке C (рис. 3). Связь была неударяющая. Зафиксировав угол φ , точку C можно перевести с одной ветви движения на другую, меняя только угол ψ . Данная система зависела еще от одного параметра — длины нити l . Если $l = l_0 = 1 - a$ (см. (1)), то маятник может (геометрически) пройти положение, соответствующее $\phi = 0$ только в «сложенном» виде. Если же длина нити $l > l_0$, то маятник не может, оставаясь на связи, перейти с одной ветви движения на другую, так как на связи нет «сложенного» положения. Но в этом случае вблизи $\phi = 0$ маятник может перейти с одной ветви (по связи) на другую, покинув связь.

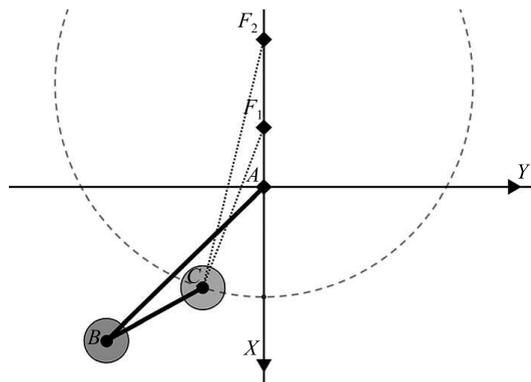


Рис. 3. Модель двойного маятника со связью.

В ходе экспериментов фокусы эллипса не менялись, но менялась длина нити. При $l = l_0 + \varepsilon$ (ε достаточно мало) наблюдалось следующее движение: при начальных отклонениях системы $|\phi| < \pi/2$ (точка C была на эллипсе) маятник вначале двигался по одной линии связи, вблизи точки $(\varphi, \psi) = (0, \pi)$ он сходил со связи; как свободный маятник он производил удар о связь (при этом меняя ветвь движения, т.е. точка C проходила через ось стержня AB), а затем двигался по другой линии связи. При $\varepsilon \rightarrow 0$ точки схода со связи и удара стремились к точке $(0, \pi)$. При $\varepsilon = 0$ (т.е. когда конфигурационное пространство маятника стало пространством с особенностью) движение маятника выглядело симметрично: точка C всегда оставалась на эллипсе, и маятник при проходе особой точки всегда переходил с одной ветви на другую.

Литература

1. *Закалюкин И. В.* Особенности вырождения неголономных связей и управляемость // Труды МАИ (электр. журнал). 2010. Выпуск № 39.
2. *Зегжда С. А., Солтаханов Ш. Х., Юшков М. П.* Уравнения движения неголономных систем и вариационные принципы механики. Новый класс задач управления. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 272 с.
3. *Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П.* Теоретическая механика. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985. 536 с.; М.: Высшая школа, 2000. 592 с.
4. *Журавлев В. Ф.* Понятие связи в аналитической механике // Нелинейная динам. 2012. Т. 8, № 4. С. 853–860.
5. *Sniatycki J.* Orbit of families of vector field on subcartensian space. arXiv:math/0211212 [math.DG].
6. *Batubenge T. A., Sasin W.* An approach to hamiltonian mechanics on glued symplectic pseudomanifolds // Demonstratio mathematica. 2008. Vol. 41, N 4. P. 941–960. <https://doi.org/10.1515/dema-2013-0122>
7. *Watts J.* Diffeologies, Differential Spaces, and Symplectic Geometry. Ph.D thesis. Department of Mathematics University of Toronto. 2012.
8. *Виноградов А. М., Кальницкий В. С.* Принцип наблюдаемости в примерах и задачах. СПб.: Изд. дом СПбГУ, 2012.
9. *Кальницкий В. С.* Симметрии плоской алгебры косимволов дифференциальных операторов // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2016. Т. 443. С. 95–105.
10. *Кальницкий В. С.* Алгебра обобщенных полей Якоби // Зап. научн. сем. ПОМИ. 1995. Т. 231. С. 222–224.
11. *Кальницкий В. С.* Алгебры Якоби плоских многообразий // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2003. Т. 299. С. 152–161.

Статья поступила в редакцию 25 апреля 2017 г.; рекомендована в печать 22 июня 2017 г.

Сведения об авторе

Бурьян Сергей Николаевич — аспирант; burianserg@yandex.ru

BEHAVIOUR OF THE PENDULUM WITH A SINGULAR CONFIGURATION SPACE

Sergey N. Burian

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; burianserg@yandex.ru

The flat double mathematical pendulum is considered, the loose end of which moves along an ellipse. In the general case, the configuration space of this pendulum is two disjoint curves. It is possible to choose parameters so that these curves intersect transversally. The observed trajectory of motion in this case forms an angle. Moreover, there are special parameters in which the curves have a first-order tangency. In this case, there is a geometric uncertainty — how the pendulum have to move after passing a singular point.

It is shown that for the transversal case the inverse dynamic problem is not solvable, and the Lagrange multipliers tend to infinity as they move to a singular point in the configuration space. The observed motion is dynamically determined. The pendulum always moves from one branch of movement to another during the passage of a singular point. A qualitative explanation of this effect is proposed. Refs 11. Figs 3.

Keywords: configuration spaces with singularities, Lagrange multipliers, double pendulum.

References

1. Zakalyukin I. V., “Singularities of degeneration of non-holonomic constraints and controllability”, *Trudy MAI (electronic journal)*, issue 39 (2010) [in Russian].
2. Zergda S. A., Soltakhanov Sh. Kh., Yushkov M. P., *Equations of motion of nonholonomic systems and variational principles of mechanics. A new class of control problems* (FIZMATLIT Publ., Moscow, 2005) [in Russian].
3. Polyakhov N. N., Zegzhda S. A., Yushkov M. P., *Theoretical mechanics* (Leningr. Univ. Press, Leningrad, 1985; Vysshaya Shkola Publ., Moscow, 2000) [in Russian].
4. Zhuravlev V. F., “The notion of connection in analytic mechanics”, *Nonlinear dynamics*, **8**(4), 853–860 (2012) [in Russian].
5. Sniatycki J., “Orbit of families of vector field on subcartensian space”, arXiv:math/0211212 [math.DG].
6. Batubenge T. A., Sasin W., “An approach to hamiltonian mechanics on glued symplectic pseudomanifolds” *Demonstratio mathematica* **41**(4), 941–960 (2008).
<https://doi.org/10.1515/dema-2013-0122>
7. Watts J., *Diffeologies, Differential Spaces, and Symplectic Geometry* (Ph.D thesis, Department of Mathematics University of Toronto, 2012).
8. Vinogradov A. M., Kalnitsky V. S., *The principle of observability in examples and problems* (Ed. House of St. Petersburg State University, St. Petersburg, 2012) [in Russian].
9. Kalnitsky V. S., “Symmetries of a flat cosymbol algebra of differential operators”, *Zap. Nauchn. Sem. POMI* **443**, 95–105 (2016) [in Russian].
10. Kalnitsky V. S., “The algebra of generalized Jacobi fields”, *J. Math. Sci.* **91**, issue 6, 3476–3491 (1998). <https://doi.org/10.1007/BF02434926>
11. Kalnitsky V. S., “Jacobi Algebras of flat manifolds”, *J. Math. Sci.* **131**, issue 1, 5345–5350 (2005).
<https://doi.org/10.1007/s10958-005-0406-6>

Для цитирования: Бурьян С. Н. Особенности движения маятника с сингулярным конфигурационным пространством // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 4. С. 541–551. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.402>

For citation: Burian S. N. Behaviour of the pendulum with a singular configuration space. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2017, vol. 4 (62), issue 4, pp. 541–551. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.402>