УДК 517.925, 517.923 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 4
MSC 34A40, 34C05

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ В ЯВНОМ ВИДЕ*

Ю. А. Ильин

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

В статье рассматривается задача отыскания явным образом всех решений нестрогого дифференциального неравенства первого порядка. При этом используется формула общего решения соответствующего дифференциального уравнения. С помощью аналога метода вариации произвольной постоянной или, другими словами, выпрямляющего диффеоморфизма исходное неравенство сводится к простейшему $\dot{x} \leqslant 0$ или $\dot{x} \geqslant 0$. Даже в том случае, когда уравнение рассматривается в области существования и единственности, возникают теоретические и практические проблемы. Эти проблемы связаны, во-первых, с продолжимостью (то есть промежутком определения) решений, а во-вторых, с тем, что общее решение уравнения может состоять из нескольких функций, заданных на разных промежутках из области определения уравнения. В результате рассматриваемое неравенство также может иметь решения, составленные из разных функций. Ситуация еще более усложняется, когда уравнение имеет точки ветвления. В этом случае метод теорем сравнения не применим. В статье показывается, каким образом можно решать дифференциальные неравенства, а значит, получать оценки на их решения и в этом случае. Результат, полученный в статье, позволяет единообразно подходить к многочисленным теоремам о дифференциальных неравенствах, имеющимся в литературе. Библиогр. 10 назв.

Ключевые слова: дифференциальное неравенство, теоремы сравнения, общее решение, метод вариации, продолжимость решений, точки ветвления.

1. Постановка задачи. Рассмотрим дифференциальное уравнение 1-го порядка $\dot{x} = f(t, x)$, для которого может быть записана формула общего решения (ниже мы напомним его определение). Заметим, что если f непрерывна и непрерывно дифференцируема по x, то это условие выполняется [1]. Заменим рассматриваемое уравнение на одно из неравенств

$$\dot{x} \leqslant f(t, x) \quad \text{или} \quad \dot{x} \geqslant f(t, x).$$

Поставим задачу: *решить полученное неравенство в явном виде*, то есть получить общую формулу, которая бы определяла все функции, удовлетворяющие данному неравенству.

Отметим, что такая постановка задачи в литературе не встречалась. Несмотря на то, что дифференциальные неравенства широко применяются в разных разделах математики, описываются в учебниках (например, [2, гл. 3]), монографиях [3, 4] и статьях [5–8], для их решения используются, как правило, так называемые теоремы сравнения или, иначе, метод Чаплыгина [9]. Суть этого метода заключается в том, что решения неравенства не ищутся явно, а лишь оцениваются с помощью решений *уравнений сравнения*. При этом обычно авторы интересуются только положительными функциями, удовлетворяющими неравенству. Это обстоятельство, конечно, продиктовано исходными прикладными задачами, в которых неравенство используется, но тем не менее, оно заметно упрощает исследование. Рассматриваемая же нами задача

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-01-00452).

о том, каким образом с помощью формулы решения уравнения получить все решения соответствующего неравенства, в общем случае не ставилась.

В статье мы изучаем нестрогое неравенство, так как оно сложнее и интереснее строгого. Это видно из разницы между строгой и нестрогой теоремами сравнения [2]. Для строгого неравенства наличие точек ветвления у соответствующего уравнения сравнения не имеет значения, а для нестрогого — это принципиально (см. пример 4 из п. 3 статьи).

Как правило, применяемые в приложениях неравенства получены из уравнений интегрируемых типов. Так, классическое неравенство Гронуолла—Беллмана сводится к линейному неравенству. Его различные обобщения имеются в [3]. В этой же монографии мы находим теоремы, касающиеся неравенств, получаемых из разных уравнений с разделяющимися переменными [3, гл. 2.12]. Все эти теоремы доказываются разными приемами. В [5, 6, 8] рассматриваются неравенства, получаемые из уравнений Бернулли, Риккати и Абеля. Для каждого из них предлагаются индивидуальные подходы. Справедливости ради отметим, что авторы не всегда прибегают к теоремам сравнения. Иногда оценка доказывается прямым интегрированием неравенства с помощью интегрирующего множителя. По сути, это очень близко к тому, что предлагается в настоящей статье, потому что таким путем неравенство также можно решить. Однако слабым местом такого приема, на наш взгляд, является то, что в общем случае интегрирующий множитель может оказаться «плохой» функцией, и при домножении неравенства на него, придется разбирать много разных случаев. Заметим, что в конкретных неравенствах из литературы условия, как правило, подбираются как раз таким образом, чтобы интегрирующий множитель был положителен, и указанные неприятности не возникали. Однако мы стремимся рассмотреть общий случай и предлагаем в статье метод интегрирования неравенств, основанный на формуле общего решения уравнения. Этот метод нам кажется более универсальным и простым в применении по сравнению с методом, при котором неравенство домножается на интегрирующий множитель. Он позволяет рассматривать различные неравенства единообразно и получать разные оценки по единому алгоритму. Данная работа содержит обобщение результатов статьи автора [10].

2. Основной результат. Рассмотрим дифференциальное неравенство

$$\dot{x} \leqslant f(t, x), \tag{1}$$

где $f, f'_x \in C(G)$ в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^2$. Заметим, что неравенство $\dot{x} \geqslant f(t,x)$ заменой $t = -\tau$ переводится в $\dot{x} \leqslant -f(-\tau, x)$, то есть сводится к рассматриваемому случаю.

Определение 1. Функцию $x(t)$, определенную на промежутке $\langle a, b\rangle$, будем называть *решением неравенства* (1), если выполнены следующие условия: 1) $x(t) \in C^1(\langle a, b\rangle)$; 2) график $x(t)$ лежит в G при $t \in \langle a, b\rangle$; 3) выполняется $\dot{x}(t) \leqslant f(t, x(t))$ $\forall t \in \langle a, b\rangle$.

Замечание. Данное определение запрещает производной функции принимать бесконечные (несобственные) значения. Но можно допустить решения, определенные на $[a, b]$ и имеющие в точках a и b односторонние производные, равные $-\infty$. Это повлияет только на некоторые формулировки в п. 4, касающиеся максимально продолженного решения. Так, для решения $x = \arccos t$ из примера 1 п. 3 мы считаем, согласно определению 1, что его максимальный промежуток существования есть

$(-1, 1)$. Но это решение можно рассматривать и на отрезке $[-1, 1]$, разрешив, чтобы $\dot{x}(-1+0) = \dot{x}(1-0) = -\infty$.

При сделанных предположениях, согласно теореме Пикара [1, 2], для дифференциального уравнения

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{2}$$

область G будет областью существования и единственности. Напомним определение общего решения дифференциального уравнения.

Определение 2. Функция

$$x = F(t, C) \tag{3}$$

называется *общим решением уравнения* (2) *в области* $A \subseteq G$, если выполнены следующие условия:

1) F определена в области $B \subset \mathbb{R}^2$, причем отображение $(t, F(t, C)) : B \mapsto A$ является биекцией;

2) $F \in C^1(B)$, причем $F'_C \neq 0$;

3) при каждом C из области определения функции F формула (3) задает одно решение уравнения (2), определенное на некотором интервале (a_c, b_c);

4) для любого решения $x(t)$ уравнения (2), график которого лежит в A, существует такое C, что $x(t) \equiv F(t, C)$.

Хорошо известно [1], что при сделанных относительно f предположениях общее решение будет локально существовать в окрестности любой точки из G (но не обязано существовать во всей области G).

Вернемся к дифференциальному неравенству (1). Предположим, что в области A определено общее решение $x = F(t, C)$. Сделаем в неравенстве замену переменных $(t, x) \mapsto (t, C)$ по формуле $x = F(t, C)$ (которую можно рассматривать как обобщение *метода вариации произвольной постоянной*). Из пункта 2 определения 2 следует, что эта замена является диффеоморфизмом, отображающим A на B. Имеем

$$F'_t(t, C) + F'_C(t, C)\dot{C} \leqslant f(t, F(t, C)) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow f(t, F(t, C)) + F'_C(t, C)\dot{C} \leqslant f(t, F(t, C) \Longleftrightarrow F'_C(t, C)\dot{C} \leqslant 0.$$

Согласно пункту 2 определения 2 в области B выполняется либо $F'_C > 0$, либо $F'_C < 0$. Учитывая это, получим либо $\dot{C} \leqslant 0$, либо $\dot{C} \geqslant 0$. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Все решения неравенства (1), располагающиеся в области A, могут быть получены по формуле*

$$x = F(t, C(t)), \tag{4}$$

где $C(t)$ — произвольная гладкая невозрастающая (для случая $F'_C > 0$) или неубывающая (для случая $F'_C < 0$) функция, график которой целиком лежит в области B.

Замечание. Если функция f не является гладкой, но, допустим, удовлетворяет условию Липшица, то хотя единственность решений по-прежнему имеет место, но теорема о дифференцируемости по начальным данным уже не применима. Функция F не будет гладкой и указанную выше замену делать нельзя. Однако для конкретных уравнений, интегрируемых в квадратурах, гладкость обычно нарушается не глобально, а лишь в отдельных точках или вдоль конечного числа кривых, и на дополнении к ним указанный метод применять все-таки можно. Затем можно попытаться изучить поведение решений при подходе к точкам, где гладкость нарушается.

Если функция f только непрерывна, то нарушается не только гладкость, но и единственность решений. Здесь все будет зависеть от конкретного уравнения. Как поступать в этом случае, мы покажем в примере 4 в следующем пункте.

Как и в теории дифференциальных уравнений, нас будут интересовать максимально продолженные решения (1), определенные на максимальном промежутке существования. Отметим, что этому вопросу в существующей литературе практически не уделяется никакого внимания. Пока по этому поводу мы сказали в теореме 1 лишь то, что график $C(t)$ должен целиком лежать в области B. Задача построения максимально продолженного решения неравенства имеет некоторые отличия от аналогичной задачи для уравнения, но перед ее анализом рассмотрим несколько примеров.

3. Примеры. Рассмотрим несколько примеров применения теоремы 1, иллюстрирующих ее отличие от теорем сравнения. Начнем с предельно простого неравенства, в котором эти отличия четко выражены. В этом примере мы также обсудим проблемы продолжимости решений.

Пример 1. Решить неравенство $\dot{x}(t) \leqslant 1$.

А) *Метод сравнения.* Для решения с начальным условием $x(t_0) = x_0$ теорема сравнения дает оценку $x(t) \leqslant t + x_0 - t_0$, $t \geqslant t_0$, которая, собственно, и является ответом. Грубость этой оценки очевидна.

Б) *Решение.* Чтобы «решить» неравенство, воспользуемся формулой $x = t + C$ общего решения соответствующего уравнения $\dot{x} = 1$ и методом вариации. В соответствии с пунктом 2 сделаем в дифференциальном неравенстве замену $(t, x) \mapsto (t, C)$ по формуле $x = t + C(t)$, где $C(t)$ — новая неизвестная функция. Получим $\dot{C}(t) \leqslant 0$. Решением этого неравенства являются все гладкие невозрастающие функции и только они. В связи с этим все решения исходного неравенства описываются формулой

$$x = t + C(t),$$

где $C(t)$ есть произвольная гладкая невозрастающая функция (не обязательно определенная на всем пространстве $\mathbb{R}$).

Обратим особое внимание на область определения $C(t)$. В отличие от решений линейного дифференциального уравнения решения линейного дифференциального неравенства вовсе не обязаны быть определенными на том же интервале, что и коэффициенты правой части. Например, убывающая функция $x = \operatorname{ctg} t$, взятая на интервале $(0, \pi)$, удовлетворяет неравенству $\dot{x} \leqslant 1$, но она неограничена и за пределы $(0, \pi)$ не может быть продолжена. Другой пример — $x = \arccos t$ на $(-\pi/2, \pi/2)$. Это решение ограничено, но за точки $\pm\pi/2$ не продолжается из-за потери в них гладкости. Заметим, что для решений дифференциальных уравнений подобная ситуация невозможна.

Еще более поучительный пример дает нам функция $x(t) = 1/4 \operatorname{arctg}(t^2) \sin(1/t)$, где $t \in (0, +\infty)$. Нетрудно проверить справедливость оценки

$$|\dot{x}(t)| = \frac{1}{4}\left(\frac{2t}{1+t^4}\sin\frac{1}{t} - \frac{\operatorname{arctg} t^2}{t^2}\cos\frac{1}{t}\right) \leqslant \frac{1}{4}(2+1) = \frac{3}{4},$$

поэтому $\dot{x}(t) \leqslant 1$. Это решение интересно тем, что хотя $x(t) \to 0$ при $t \to +0$, но оно не может быть гладко продолжено за 0, так как в 0 не совпадают верхнее и нижнее правые числа Дини [4]: $D^+x(0) = 1/4, \quad D_+x(0) = -1/4$. Снова обратим внимание на то, что для решений дифференциальных уравнений такое поведение невозможно. Это означает, что теория *продолжимости* решений дифференциальных уравнений не переносится автоматически на решения дифференциальных неравенств.

Пример 2. Решить линейное неравенство $\dot{x} \leqslant p(t)x + q(t)$, $p, q \in C(a, b)$.

Это неравенство наиболее часто встречается в литературе [4, пример 9.1]. В частности, к нему сводятся многочисленные интегральные неравенства типа Гронуолла—Беллмана [3].

А) *Метод сравнения.* При применении теорем сравнения утверждается, что если функция $x(t)$, удовлетворяющая неравенству, определена на промежутке $[t_0, T\rangle \subset (a, b)$, то на этом промежутке выполняется оценка

$$x(t) \leqslant e^{\int_{t_0}^t p(s)\,ds} \left(x(t_0) + \int_{t_0}^t q(u) e^{\int_{t_0}^u p(s)\,ds} du \right).$$

Б) *Решение.* Общее решения соответствующего линейного уравнения на всей области его определения $G = (a, b) \times \mathbb{R}$ задается формулой

$$x = F(t, C) = e^{\int_{t_0}^t p(s)\,ds} \left(C + \int_{t_0}^t q(u) e^{\int_{t_0}^u p(s)\,ds} du \right).$$

При этом $F'_C = e^{\int_{t_0}^t p(s)\,ds} > 0$. Согласно теореме 1 все решения исходного неравенства будут задаваться формулой

$$x = e^{\int_{t_0}^t p(s)\,ds} \left(C(t) + \int_{t_0}^t q(u) e^{\int_{t_0}^u p(s)\,ds} du \right).$$

где $C(t)$ есть произвольная невозрастающая функция (с областью определения $\langle a_1, b_1 \rangle \subseteq (a, b)$). Таким образом, снова решения неравенства не обязаны быть определенными на всем (a, b). Так, для случая $(a, b) = \mathbb{R}$ мы можем взять $C(t) = -\operatorname{tg} t$ или $C(t) = \arccos t$, и в результате получим решения, определенные только на $(-\pi/2, \pi/2)$ или $(-1, 1)$.

Пример 3. Решить неравенство $\dot{x} \leqslant x^2$.

Данное неравенство можно рассматривать как полученное из уравнения с разделяющимися переменными или из уравнения Бернулли (на выбор). Такие неравенства изучались в [5–8], где оценивались только их положительные решения. Разумеется, из полученных нами формул выводятся те оценки, которые приведены в упомянутых работах.

Все решения уравнения $\dot{x} = x^2$ в силу единственности задаются объединением формул $x = 1/(C - t)$ и $x = 0$. Сделаем замену $(t, x) \mapsto (t, C)$, где $x = 1/(C(t) - t)$ или $C(t) = t + 1/x$. Однако теперь наша замена определена не на всем пространстве $\mathbb{R}^2$, а лишь при условии $x \neq 0$. Поэтому рассмотрим отдельно два случая.

Случай 1. Пусть решение неравенства $x(t) \neq 0$ на (a, b). Тогда, делая замену переменной, имеем

$$-\frac{\dot{C}(t) - 1}{(C(t) - t)^2} \leqslant \frac{1}{(C(t) - t)^2} \Longleftrightarrow \frac{-\dot{C}(t)}{(C(t) - t)^2} \leqslant 0 \Longleftrightarrow \dot{C}(t) \geqslant 0.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае решения представляются в виде

$$x = \frac{1}{C(t) - t},$$

где $C(t)$ — произвольная неубывающая функция на $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$.

Случай 2. Пусть $x(t)$ обращается в 0. Прежде всего заметим, что такое возможно. Например, $x \equiv 0$ удовлетворяет нашему неравенству. Более того, так как правая часть неравенства неотрицательна, то ему удовлетворяет любая невозрастающая функция, например $x = -t$ или $x = -t^3$. Эти примеры показывают, что решения нашего неравенства могут совпадать, пересекать и пересекать с касанием ось Ot. Можно даже брать составные решения, например, такое:

$$x = \begin{cases} -(t - a_1)^3 & \text{при } t < a_1, \\ 0 & \text{при } t \in [a_1, b_1], \\ -(t - b_1)^3 & \text{при } t > b_1. \end{cases}$$

Заметим однако, что во всех этих примерах функция $x(t)$ пересекает ось Ot сверху вниз с ростом t. Покажем, что пересечение всегда будет только таким.

Пусть $x(t_1) = 0$ и $x(t_2) > 0$ в некоторой точке $t_2 > t_1$. Будем считать, что t_1 есть ближайшая к t_2 точка слева, где $x(t) = 0$. Тогда $x(t) > 0$ на (t_1, t_2). Согласно случаю 1 имеем $x(t) = 1/(C(t) - t)$, где $C(t)$ — некоторая неубывающая на (t_1, t_2) функция. При этом будем иметь

$$\lim_{t \to t_1 + 0} C(t) = \lim_{t \to t_1 + 0} \left(t + \frac{1}{x(t)} \right) = t_1 + \frac{1}{+0} = +\infty,$$

что противоречит неубыванию $C(t)$ на (t_1, t_2). Из этого следует, что во всех точках $t > t_1$ должно выполняться $x(t) \leqslant 0$. Аналогично доказывается, что при $t < t_1$ должно выполняться $x(t) \geqslant 0$.

Заметим, наконец, что если решение $x(t)$ пересекает ось Ot, то оно не может задаваться с помощью одной непрерывной функции $C(t)$: для верхней и нижней полуплоскостей надо брать разные функции $C(t)$.

Подводя итог, заключаем, что в рассматриваемом случае решения неравенства описываются формулой

$$x = \begin{cases} 1/(C_1(t) - t) & \text{при } t \in (a, a_1), \\ 0 & \text{при } t \in [a_1, b_1], \\ 1/(C_2(t) - t) & \text{при } t \in (b_1, b), \end{cases} \tag{5}$$

где $\lim\limits_{t \to a_1 - 0} C_1(t) = +\infty$, $\lim\limits_{t \to b_1 + 0} C_2(t) = -\infty$. При этом надо разрешить случаи $a = -\infty$, $a_1 = +\infty$, $a_1 = b_1$, $b_1 = -\infty$, $b = +\infty$. Кроме того, функции $C_1(t)$ и $C_2(t)$ надо выбирать так, чтобы в случае $a_1 = b_1$ выполнялось

$$\lim_{t \to a_1 - 0} \dot{x}(t) = \lim_{t \to a_1 + 0} \dot{x}(t),$$

а в случае $a_1 < b_1$ выполнялось

$$\lim_{t \to a_1 - 0} \dot{x}(t) = \lim_{t \to a_1 + 0} \dot{x}(t) = 0.$$

И последнее замечание. Может показаться, что наша замена имеет еще одну «особенность», а именно: когда $C(t) = t$, то x не определено. Но в действительности это не приводит к потере решений. Из равенства $C(t_1) = t_1$ следует, что $x(t)$ в этой точке имеет вертикальную асимптоту, и поэтому этот факт влияет лишь на область определения $x(t)$. Таким образом, если неубывающая функция $C(t)$ такова, что $C(t) = t$ в последовательности точек $\{t_1, t_2, \dots\}$, то формула $x = 1/(C(t) - t)$ просто определяет не одно, а много разных решений на интервалах $(a, t_1), (t_1, t_2)$ и т. д. Например, если $C(t) = t + \sin t$, то имеем $x(t) = 1/\sin t$. Это будет бесконечный набор решений исходного дифференциального неравенства, определенных на интервалах $(\pi k, \pi + \pi k)$.

Пример 4. Решить неравенство $\dot{x} \leqslant 3x^{2/3}$.

Это неравенство получено из известного уравнения Пеано, которое знаменито тем, что на решении $x = 0$ нарушается свойство единственности [1]. Для этого нестрогого неравенства теоремы сравнения не применимы [2]. Его решения можно лишь локально оценивать с помощью специальных верхнего и нижнего решений некоторой задачи Коши [7]. Хотя теорема 1 формально тоже не применима к этому неравенству, однако метод вариации применить можно.

Решения уравнения $\dot{x} = 3x^{2/3}$ задаются формулами $x = (t + C)^3$ или $x = 0$ (на самом деле, это не совсем так: решение $x = 0$ состоит из точек ветвления, в которых интегральные кривые можно склеивать друг с другом и получать новые интегральные кривые, не содержащиеся в этих формулах). Особенностью является то, что, в отличие от примера 3, в первой из приведенных выше формул x может обращаться в 0. В соответствии с методом вариации сделаем замену $(t, x) \mapsto (t, C)$:

$$x = (t + C)^3 \quad \text{или} \quad C = \sqrt[3]{x} - t. \tag{6}$$

Эта замена хоть и определена на всей плоскости, но не является взаимно-гладкой, так как в данном примере не справедлива теорема о дифференцируемости по начальным данным. Если $x(t) \neq 0$, то $C(t) \in C^1$. Если же $x(t_1) = 0$, то функция $C(t)$ может оказаться как дифференцируемой, так и не дифференцируемой в точке t_1. Сделаем замену (6), считая, что функция $C(t)$ дифференцируема всюду. При этом, конечно, какие-то решения теряются, но этот вопрос будет рассмотрен отдельно. Заменяя x согласно (6), получим

$$3(t + C(t))^2\,(1 + \dot{C}(t)) \leqslant 3(t + C(t))^2 \;\Leftrightarrow\; (t + C(t))^2\,\dot{C}(t) \leqslant 0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} \dot{C}(t) \leqslant 0, \\ C(t) = -t. \end{array}\right.$$

Поскольку $C(t) = -t$ также удовлетворяет неравенству $\dot{C}(t) \leqslant 0$, то нет необходимости этот случай выделять отдельно. Таким образом, функции, задаваемые формулой

$$x = (t + C(t))^3, \tag{7}$$

где $C(t)$ — произвольная гладкая невозрастающая функция на $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$, являются решениями исходного неравенства.

Важно отметить, что в примере 4 (и это есть следствие того, что вдоль решения $x = 0$ нарушается единственность) решения неравенства могут пересекать ось Ot как сверху вниз, так и снизу вверх. Примером служит решение $x = \sin^3 t$, получаемое при $C(t) = \sin t - t$. Но если пересечение происходит снизу вверх, то обязательно с касанием. В самом деле, если t_1 есть точка такого пересечения, то должны выполняться $x(t_1) = 0$ и $\dot{x}(t_1) \geqslant 0$. Но из неравенства следует, что $\dot{x}(t_1) \leqslant 3x^{2/3}(t_1) = 0$, откуда получаем $\dot{x}(t_1) = 0$.

Легко понять, что формула (7) не дает всех решений, так как мы не имеем права требовать, чтобы функция $C(t)$ всегда была гладкой. Например, убывающая функция $x = -t$ заведомо удовлетворяет нашему дифференциальному неравенству, но для нее получаем $C(t) = -\sqrt[3]{t} - t \notin C^1$.

Как было сказано, гладкость может нарушаться лишь в точках, где $x(t_1) = 0$ или $C(t_1) = -t_1$. Дифференцируя (6) при $x(t) \neq 0$, находим

$$\dot{C}(t) = \frac{\dot{x}(t) - 3x^{2/3}(t)}{3x^{2/3}(t)}.$$

Числитель этой дроби всегда меньше или равен 0, а знаменатель больше или равен 0. Из этого следует, что правые верхнее $D^+C(t_1)$ и нижнее $D_+C(t_1)$ числа Дини неположительны (или равны $-\infty$). Поэтому, функция $C(t)$ должна быть невозрастающей на всей области определения.

Какие функции $C(t)$ можно брать? Функция $C(t)$ должна быть непрерывной, невозрастающей и непрерывно дифференцируемой во всех точках, за исключением быть может тех, в которых выполняется равенство

$$C(t) + t = 0. \tag{8}$$

Но при этом функция $(t+C(t))^3$ должна быть дифференцируемой и в точках, являющихся корнями уравнения (8). Из сказанного выше и формулы $\dot{x}(t) = 3(t+C(t))^2\,(1+\dot{C}(t))$ следует, что если $C(t)$ имеет в корнях уравнения (8) конечные правые и левые верхнее и нижнее числа Дини, то она подходит. В этих точках $\dot{x} = 0$.

Таким образом, в качестве $C(t)$ можно брать, например, такие непрерывные, кусочно-гладкие, невозрастающие функции (со стыковочными точками на прямой $C = -t$), как

$$C(t) = \begin{cases} -t & \text{при } t \leqslant 0, \\ -2t & \text{при } t > 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; x = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leqslant 0, \\ -t^3 & \text{при } t > 0 \end{cases}$$

или

$$C(t) = \begin{cases} -t & \text{при } t \leqslant -1, \\ t^2 & \text{при } t \in (-1, 0], \\ -2t^2 & \text{при } t \in (0, 1/2], \\ -t & \text{при } t \in (1/2, 1], \\ -1 & \text{при } t > -1 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; x = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leqslant -1, \\ (t+t^2)^3 & \text{при } t \in (-1, 0], \\ (t-2t^2)^3 & \text{при } t \in (0, 1/2], \\ 0 & \text{при } t \in (1/2, 1], \\ (t-1)^3 & \text{при } t > 1. \end{cases}$$

Однако функция $C(t)$ может иметь и бесконечные числа Дини, например, для $C(t) = -\sqrt[3]{t} - t$. Видимо, в этом случае не остается ничего другого, как требовать дифференцируемости $(t + C(t))^3$ в корнях уравнения (8). Впрочем, последнее будет выполняться, если в каждом корне t_1 уравнения (8) функция $C(t)$ будет иметь асимптотику $C(t) = -t_1 + (t - t_1)^\alpha + o((t - t_1)^\alpha)$, где $\alpha > 1/3$.

4. О продолжимости решений. Примеры из предыдущего пункта 3 показывают, что задача отыскания *максимально продолженных* решений дифференциальных неравенств имеет некоторые отличия от случая дифференциальных уравнений. Поэтому изучим этот вопрос отдельно.

Определим естественным образом, по аналогии с дифференциальными уравнениями [1, 2], понятия *сужения*, *продолжения* и *максимально продолженного* решения для дифференциальных неравенств. Напомним, что для решения дифференциального уравнения, определенного на (a, b), непродолжимость за a или b означает выход на границу области G определения дифференциального уравнения. Если существует $\lim_{t\to b-0}(t, x(t)) = (b, x^*) \in G$, то решение имеет левостороннюю производную в b и гладко продолжается вправо за b. Для случая $t \to a+0$ утверждение формулируется симметричным образом. Если график решения целиком принадлежит некоторому компакту $K \subset G$, то указанные выше пределы существуют, и решение продолжается вправо и влево за b и a.

Однако для решений дифференциальных неравенств, как показывают примеры 1–4, это утверждение неверно. Решение может оставаться в некотором компакте, но быть непродолжаемым из-за потери гладкости на концах интервала существования.

Пусть решение $x(t)$ дифференциального неравенства (1) определено на (a, b). Непродолжимость за b возможна лишь по одной из трех причин.

1. Решение вышло на границу области G (если G неограничена или $\partial G = \emptyset$, то это означает, что либо $b = \infty$, либо $\lim_{t\to b-0}|x(t)| = \infty$).

2. Решение остается в G, существует $\lim_{t\to b-0}(t, x(t)) = (b, x^*) \in G$, но в точке b не существует левосторонняя производная. Последнее означает, что либо $D^- x(b) \neq D_- x(b)$, либо $D^- x(b) = D_- x(b) = -\infty$. Заметим, что так как $D_-^- x(b) \leqslant f(b, x(b))$, то случай $D^- x(b) = D_- x(b) = +\infty$ невозможен.

3. Решение остается в G, но предел $\lim_{t\to b-0} x(t)$ не существует.

Утверждения для непродолжимости влево за a формулируются симметричным образом. Случаи 1 и 2 действительно могут иметь место, как видно из примеров 1–4. Покажем, что случай 3 невозможен.

Теорема 2. *Пусть график решения $x(t)$ дифференциального неравенства (1) лежит в некотором компакте $K \subset G$ при $t \in (a, b)$. Тогда существуют пределы $\lim\limits_{t\to b-0} x(t)$ и $\lim\limits_{t\to a+0} x(t)$.*

Доказательство. Докажем существование только первого предела. Воспользуемся определением предела по Гейне и покажем, что существует такое x^*, что для любой последовательности $t_k \uparrow b$ выполняется $x(t_k) \to x^*$. Допустим противное. Так как в условиях теоремы 2 из любой последовательности $x(t_k)$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, то это будет означать, что найдутся две последовательности t_k^1 и t_k^2, такие, что $x(t_k^{1,2}) \to x_{1,2}^*$, причем $x_1^* \neq x_2^*$. Не нарушая общности, считаем, что $x_1^* < x_2^*$. Также мы можем считать, выкидывая, если надо, неподходящие члены, что выполняется $t_1^1 < t_1^2 < t_2^1 < t_2^2 < \cdots < t_k^1 < t_k^2 < t_{k+1}^1 < \cdots$. Заметим, что так как $b < +\infty$, то $t_k^1 - t_k^2 \to 0$. Поскольку $f(t, x)$ непрерывная функция, то на компакте K она ограничена: $f(t, x) \leqslant L$. Тогда для любого решения дифференциального неравенства (1), лежащего в K, имеем $\dot{x}(t) \leqslant L$. Из сказанного и классической формулы Лагранжа теперь легко выводится неравенство $0 < x(t_k^2) - x(t_k^1) \leqslant L(t_k^2 - t_k^1)$. Переходя к пределу, получаем противоречие $0 < x_2^* - x_1^* \leqslant 0$. ■

Из теоремы 2 следует, что решение неравенства $x(t)$, определенное на (a, b), будет максимально продолженным в том и только в том случае, если в точках a и b оно выходит на границу G или теряет гладкость.

Возвращаясь к формуле $x = F(t, C(t))$ из теоремы 1, заключаем, что $x(t)$ будет максимально продолженным решением в области A тогда и только тогда, когда $C(t)$

будет максимально продолженным решением неравенства $\dot{C}(t) \leqslant 0$ (или $\dot{C}(t) \geqslant 0$) в области B. Последнее имеет место тогда и только тогда, когда график $C(t)$ выходит на границу области B или функция $C(t)$ перестает быть гладкой на концах интервала определения. Если для формулировки условия выхода на границу B воспользоваться тем же геометрическим языком, что принят в теории дифференциальных уравнений, то, учитывая, что $C(t)$ монотонная функция, приходим к следующей теореме.

Теорема 3. *Пусть $x(t) = F(t, C(t))$, определенное на (a, b), есть максимально продолженное решение неравенства (1) в области A. Тогда: 1) либо график функции $C(t)$ не располагается целиком ни в каком компакте из B; 2) либо $D^-C(b) \neq D_-C(b)$ (соответственно, $D^+C(a) \neq D_+C(a)$); 3) либо $D^-C(b) = D_-C(b) = \infty$ (соответственно, $D^+C(a) = D_+C(a) = \infty$).*

Заключение. В настоящей статье мы только обосновали в общем виде алгоритм, позволяющий единообразно работать с различными дифференциальными неравенствами. В планируемом продолжении исследования с его помощью будут детально разобраны неравенства, получаемые из уравнений Бернулли, Риккати, уравнений с разделяющимися переменными и однородных уравнений. Будет дано сравнение с уже имеющимися в литературе результатами для этих неравенств.

Литература

1. *Бибиков Ю. Н.* Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2005.
2. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
3. *Pachpatte B. G.* Inequalities for Differential and Integral Equations. In Ser. Mathematics in Science and Engineering. Vol. 197. Academic Press, 2007.
4. *Szarski J.* Differential Inequalities. Warszawa: PWN, 1967.
5. *Hoang N. S., Ramn A. G.* Nonlinear Differential Inequality // Math. Inequal. Appl. 2011. Vol. 14, N 4. P. 967–976. https://doi.org/10.7153/mia-14-82
6. *Popa D., Lungu N.* On some Differential Inequalities // Proc. of Int. Conference on Nonlinear Operators, Differential Equations and Applications, September 2001, Cluj-Napoca, Romania. 2002. Vol. 3. P. 323–326.
7. *Pouso R. L.* Greatest solutions and differential inequalities: a journey in two directions. arXiv:1304.3576vl [math.CA].
8. *Ramm A. G.* Dynamical systems method for solving operator equations. Amsterdam: Elsevier, 2007.
9. *Васильева А. Б., Нефедов Н. Н.* Теоремы сравнения. Метод дифференциальных неравенств Чаплыгина. Учебное пособие. МГУ, 2007.
10. *Ильин Ю. А.* Об интегрировании дифференциальных неравенств в явном виде // Дифференциальные уравнения и процессы управления (электронный журнал). 2015. № 1. URL: http://www.math.spbu.ru/diffjournal/pdf/iljinya.pdf (дата обращения: 05.07.2017).

Статья поступила в редакцию 19 мая 2017 г.; рекомендована в печать 22 июня 2017 г.

Сведения об авторе

Ильин Юрий Анатольевич — кандидат физико-математических наук, доцент; iljin_y_a@mail.ru

GENERAL PROBLEMS OF INTEGRATION OF DIFFERENTIAL INEQUALITIES IN EXPLICIT FORM

Yuriy A. Iljin

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; iljin_y_a@mail.ru

This article examines the problem of finding in explicit form all solutions of the first-order nonstrict differential inequality. We use the formula of the general solution of the corresponding differential equation. Using the analogue of the method of arbitrary constant variation or, in other words, the straightening diffeomorphism, we reduce initial inequality to the simplest form $\dot{x} \leqslant 0$ or $\dot{x} \geqslant 0$. Even in case when the equation is considered in a region of existence and uniqueness, we encounter several theoretical and practical problems. Firstly, there is the problem with the extension of solutions. Secondly, the general solution may consist of several functions that are set on different intervals of the region of definition of the equation, therefore the resulting inequality may have the solution, composed of different functions. In this case there are problems of the connection of solutions. The situation becomes more complicated when the equation has points of nonuniqueness. For such inequalities the method of comparison theorems is not applicable. We show how to solve such inequality and obtain some estimates on its solutions for this case. The result obtained in the article, provides unified approach to many theorems about differential inequalities existing in literature. Refs 10.

Keywords: differential inequality, comparison theorems, general solution, method of variations, extension of solution, nonuniqueness points.

References

1. Bibikov Yu. N., *General course of ordinary differential equations* (St. Petersburg Univ. Press, 2005) [in Russian].

2. Hartman P., *Ordinary Differential Equations.* In Ser. *Classics in Applied Mathematics* **38** (SIAM, 2002).

3. Pachpatte B. G., *Inequalities for Differential and Integral Equations.* In Ser. *Mathematics in Science and Engineering* **197** (Academic Press, 2007).

4. Szarski J., *Differential Inequalities* (PWN, Warszawa, 1967).

5. Hoang N. S., Ramn A. G., "Nonlinear Differential Inequality", *Math. Inequal. Appl.* **14**(4), 967–976 (2011). https://doi.org/10.7153/mia-14-82

6. Popa D., Lungu N. "On some Differential Inequalities", *Proc. of Int. Conference on Nonlinear Operators, Differential Equations and Applications, September 2001, Cluj-Napoca, Romania* **3**, 323–326 (2002).

7. Pouso R. L. "Greatest solutions and differential inequalities: a journey in two directions", arXiv:1304.3576vl [math.CA].

8. Ramm A. G., *Dynamical systems method for solving operator equations* (Amsterdam, Elsevier, 2007).

9. Vasilyeva A. B., Nefedov N. N., *Comparison theorems. The method of differential inequalities of Chaplygin* (Moscow Univ. Press, 2007) [in Russian].

10. Iljin Yu. A. "On the intercalating of differential inequalities in the explicit form", *Differential equations and control processes* (1) (2015) [in Russian]. Available at: http://www.math.spbu.ru/diffjournal /pdf/iljinya.pdf (accessed July 5, 2017).

Для цитирования: *Ильин Ю. А.* Общие вопросы интегрирования дифференциальных неравенств в явном виде // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 4. С. 597–607. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.408

For citation: Iljin Yu. A. General problems of integration of differential inequalities in explicit form. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2017, vol. 4 (62), issue 4, pp. 597–607. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.408