УДК 531.36 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 4
MSC 93C10

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ И ЕГО ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

А. Н. Квитко, О. С. Фирюлина, А. С. Еремин

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Предложен достаточно удобный для численной реализации алгоритм построения дифференцируемой управляющей функции, гарантирующей перевод широкого класса нелинейных стационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений из начального состояния в заданное конечное состояние фазового пространства с учетом ограничений на управление. Получено конструктивное достаточное условие, при котором указанный перевод возможен. Рассмотрена конкретная практическая задача и проведено ее численное моделирование. Библиогр. 16 назв. Ил. 1.

Ключевые слова: граничные условия, стабилизация, управление, нелинейная система.

1. Введение и постановка задачи. Одной из проблем математической теории управления являются вопросы, связанные с разработкой точных или приближенных методов построения управляющих функций и соответствующих им траекторий, соединяющих заданные точки в фазовом пространстве. Этим исследованиям посвящено большое количество публикаций. Некоторые из них приведены в [1–14]. В настоящее время проблема решения граничных задач достаточно подробно изучена для линейных и нелинейных управляемых систем специального вида. Однако теория решения граничных задач для нелинейных управляемых систем общего вида еще недостаточно разработана. Основные усилия авторов данной статьи направлены на разработку удобного для численной реализации и устойчивого к погрешностям вычислений алгоритма решения граничных задач для широкого класса нелинейных управляемых систем обыкновенных дифференциальных уравнений в классе синтезирующих управлений, а также на нахождение конструктивного достаточного условия, гарантирующего существование решения этих задач. Поставленная цель достигнута сведением решения исходной задачи к решению задачи стабилизации линейной нестационарной системы специального вида и решению задачи Коши для вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Простота реализации полученного метода обеспечивается тем, что наиболее трудоемкая его часть, связанная с построением вспомогательной системы и решением задачи стабилизации вспомогательной системы выполняется аналитическими методами и может быть реализована средствами компьютерной алгебры. Традиционные итеративные методы построения программных управлений [1] требуют большого количества вычислений и не обладают устойчивостью к погрешностям вычислений.

Эффективность полученного алгоритма иллюстрируется на численном моделировании конкретной практической задачи.

Объектом исследования является управляемая система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \tag{1}$$

 https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.409

где $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_r)^T$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^r$, $r \leqslant n$, время $t \in [0,1]$,

$$\mathbf{f} \in C^{4n}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r; \mathbb{R}^n), \quad \mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)^T, \tag{2}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}, \tag{3}$$

$$\mathbf{S} = (\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \ldots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}), \quad \mathrm{rank}\mathbf{S} = n, \quad \mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{0}, \mathbf{0}), \quad \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{0}, \mathbf{0}), \tag{4}$$

$$\|\mathbf{u}\| < N. \tag{5}$$

Задача. Найти пару функций $\mathbf{x}(t) \in C[0,1]$, $\mathbf{u}(t) \in C[0,1]$, удовлетворяющих системе (1) и условиям

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}(1) = \bar{\mathbf{x}}, \quad \bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)^T. \tag{6}$$

Указанную пару $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{u}(t)$ будем называть решением задачи (1), (6).

Теорема. *Пусть для правой части системы* (1) *выполнены условия* (2)–(4). *Тогда* $\exists \varepsilon > 0$ *такое, что* $\forall \bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$: $\|\bar{\mathbf{x}}\| < \varepsilon$ *существует решение задачи* (1), (6), *которое может быть получено после решения задачи стабилизации линейной нестационарной системы с экспоненциальными коэффициентами и последующим решением задачи Коши для вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.*

Главная идея доказательства теоремы состоит в том, что посредством преобразований зависимых и независимых переменных, решение исходной задачи сводится к решению задачи стабилизации нелинейной вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений специального вида при постоянно действующих возмущениях. Для ее решения находится синтезирующее управление, обеспечивающее экспоненциальное убывание фундаментальной матрицы линейной части вспомогательной системы. На заключительном этапе осуществляется переход к исходным переменным.

2. Построение вспомогательной системы. Функцию $\mathbf{x}(t)$, входящую в решение задачи (1), (6) ищем в виде

$$x_i(t) = a_i(t) + \bar{x}_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{7}$$

В новых переменных система (1) и граничные условия примут вид

$$\dot{\mathbf{a}} = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{a}, \mathbf{u}), \tag{8}$$

$$\mathbf{a}(0) = -\bar{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{a}(1) = \mathbf{0}. \tag{9}$$

Пару функций $\mathbf{a}(t)$, $\mathbf{u}(t)$, удовлетворяющих системе (8) и условиям (9), будем называть решением задачи (8), (9).

Задача. Найти пару функций $\mathbf{a}(t) \in C[0,1]$, $\mathbf{u}(t) \in C[0,1]$, удовлетворяющую системе (8) и условиям

$$\mathbf{a}(0) = -\bar{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{a}(t) \to \mathbf{0} \text{ при } t \to 1. \tag{10}$$

Замечание 1. Переходя к пределу в решении задачи (8), (10) при $t \to 1$ получим решение задачи (8), (9).

Сделаем в системе (8) преобразование независимой переменной t:

$$t = 1 - e^{-\alpha\tau}, \quad \tau \in [0, +\infty), \tag{11}$$

где $\alpha > 0$ — некоторое фиксированное число, подлежащее определению. Тогда в новой независимой переменной τ система (8) и условия (10) примут вид

$$\frac{d\mathbf{c}}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau}\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{c}, \mathbf{d}), \tag{12}$$

$$\mathbf{c}(0) = -\bar{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{c}(\tau) \to \mathbf{0} \text{ при } t \to \infty, \tag{13}$$

$$\mathbf{c}(\tau) = \mathbf{a}(t(\tau)), \quad \mathbf{d}(\tau) = \mathbf{u}(t(\tau)), \quad \tau \in [0, +\infty), \tag{14}$$

где $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)^T$, $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_r)^T$. Пару функций $\mathbf{c}(\tau)$, $\mathbf{d}(\tau)$, удовлетворяющую системе (12) и условиям (13), будем называть решением задачи (12), (13). Имея решение задачи (12), (13), с помощью формул (11), (14) можно получить решение задачи (8), (10).

Введем обозначения:

$$\tilde{\mathbf{c}} = \bar{\mathbf{x}} + \theta_i\mathbf{c}, \quad \tilde{\mathbf{d}} = \theta_i\mathbf{d}, \quad \theta_i \in [0, 1], \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$|k| = \sum_{i=1}^{n} k_i, \quad |m| = \sum_{i=1}^{r} m_i, \quad k! = k_1! \cdot \ldots \cdot k_n!, \quad m! = m_1! \cdot \ldots \cdot m_r!\,.$$

Используя свойство (2) и разложение правой части системы (1) в ряд Тейлора в окрестности точки $(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{0})$, систему (12) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
\frac{dc_i}{d\tau} &= \alpha e^{-\alpha\tau} f_i(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{0}) + \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{0}) c_j + \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f_i}{\partial u_j}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{0}) d_j + \\
&+ \frac{1}{2}\alpha e^{-\alpha\tau} \left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{0}) c_j c_k + 2\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial u_k}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{0}) c_j d_k + \right. \\
&\left. + \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r} \frac{\partial^2 f_i}{\partial u_j \partial u_k}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{0}) d_j d_k \right) + \cdots + \\
&+ \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{\substack{|k|+|m|= \\ =4n-2}} \frac{1}{k!m!} \frac{\partial^{|k|+|m|} f_i}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n} \partial u_1^{m_1} \ldots \partial u_r^{m_r}}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{0}) c_1^{k_1} \ldots c_n^{k_n} d_1^{m_1} \ldots d_r^{m_r} + \\
&+ \alpha e^{-\alpha\tau} \sum_{\substack{|k|+|m|= \\ =4n-1}} \frac{1}{k!m!} \frac{\partial^{|k|+|m|} f_i}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n} \partial u_1^{m_1} \ldots \partial u_r^{m_r}}(\tilde{\mathbf{c}}, \tilde{\mathbf{d}}) c_1^{k_1} \ldots c_n^{k_n} d_1^{m_1} \ldots d_r^{m_r}
\end{aligned} \tag{15}$$

для всех $i = 1, \ldots, n$.

Ограничим область изменения $\mathbf{c}(\tau)$ неравенством

$$\|\mathbf{c}(\tau)\| < C_1, \quad \tau \in [0, \infty). \tag{16}$$

Сделаем множество преобразований сдвигов функций $c_i(\tau)$, $i = 1, \ldots, n$. Главная их цель состоит в том, чтобы в правой части системы, полученной в результате этих преобразований, все слагаемые, не содержащие в явном виде степеней компонент $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$, в области (5), (16) удовлетворяли оценке $O(e^{-4n\alpha\tau}\|\bar{\mathbf{x}}\|)$ при $\tau\to\infty$ и $\|\bar{\mathbf{x}}\|\to 0$.

На первом этапе выполним замену $c_i(\tau)$ на $c_i^{(1)}(\tau)$ по формуле

$$c_i(\tau)=c_i^{(1)}(\tau)-e^{-\alpha\tau}f_i(\bar{\mathbf{x}},\mathbf{0}),\quad i=1,\dots,n. \tag{17}$$

Пусть

$$D^{|k|+|m|}f_i\equiv\frac{\partial^{|k|+|m|}f_i}{\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_n^{k_n}\partial u_1^{m_1}\dots\partial u_r^{m_r}},\quad i=1,\dots,n.$$

После подстановки (17) в левую и правую части системы (15) с учетом введенного обозначения получим систему

$$\begin{aligned}
\frac{dc_i^{(1)}}{d\tau}&=-\alpha e^{-2\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{\mathbf{x}},\mathbf{0})f_j(\bar{\mathbf{x}},\mathbf{0})+\\
&\qquad+\frac{1}{2}\alpha e^{-3\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j\partial x_k}(\bar{\mathbf{x}},\mathbf{0})f_j(\bar{\mathbf{x}},\mathbf{0})f_k(\bar{\mathbf{x}},\mathbf{0})+\\
&+\alpha e^{-\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{\mathbf{x}},\mathbf{0})c_j^{(1)}-\alpha e^{-2\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j\partial x_k}(\bar{\mathbf{x}},\mathbf{0})f_j(\bar{\mathbf{x}},\mathbf{0})c_k^{(1)}+\\
&+\alpha e^{-\alpha\tau}\sum_{j=1}^{r}\frac{\partial f_i}{\partial u_j}(\bar{\mathbf{x}},\mathbf{0})d_j-\alpha e^{-2\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j\partial u_k}(\bar{\mathbf{x}},\mathbf{0})f_j(\bar{\mathbf{x}},\mathbf{0})d_k+\\
&+\frac{1}{2}\alpha e^{-\alpha\tau}\Bigg(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j\partial x_k}(\bar{\mathbf{x}},\mathbf{0})c_j^{(1)}c_k^{(1)}+2\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j\partial u_k}(\bar{\mathbf{x}},\mathbf{0})c_j^{(1)}d_k+\\
&\qquad+\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial^2 f_i}{\partial u_j\partial u_k}(\bar{\mathbf{x}},\mathbf{0})d_jd_k\Bigg)+\dots+\\
&+\alpha e^{-\alpha\tau}\sum_{|k|+|m|=4n-2}\frac{1}{k!m!}D^{|k|+|m|}f_i(\bar{\mathbf{x}},\mathbf{0})(c_1^{(1)}-e^{-\alpha\tau}f_i(\bar{\mathbf{x}},\mathbf{0}))^{k_1}\dots\times\\
&\qquad\times(c_n^{(1)}-e^{-\alpha\tau}f_i(\bar{\mathbf{x}},\mathbf{0}))^{k_n}d_1^{m_1}\dots d_r^{m_r}+\\
&+\alpha e^{-\alpha\tau}\sum_{|k|+|m|=4n-1}\frac{1}{k!m!}D^{|k|+|m|}f_i(\tilde{\mathbf{c}},\tilde{\mathbf{d}})(c_1^{(1)}-e^{-\alpha\tau}f_i(\bar{\mathbf{x}},\mathbf{0}))^{k_1}\dots\times\\
&\qquad\times(c_n^{(1)}-e^{-\alpha\tau}f_i(\bar{\mathbf{x}},\mathbf{0}))^{k_n}d_1^{m_1}\dots d_r^{m_r},\quad i=1,\dots,n.
\end{aligned}\tag{18}$$

Из (13), (17) следует

$$c_i^{(1)}(0)=-\bar{x}_i+f_i(\bar{\mathbf{x}},\mathbf{0}),\quad i=1,\dots,n. \tag{19}$$

Используя (19) и индуктивный переход на k-м шаге получим искомое преобразование вида

$$c_i^{(k-1)}(\tau)=c_i^{(k)}(\tau)+e^{-k\alpha\tau}\phi_i^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}),\quad \phi_i^{(k)}(\mathbf{0})=0,\quad i=1,\dots,n. \tag{20}$$

Если преобразования (20) применить $(4n-1)$ раз, объединить в полученной системе слагаемые, линейные по компонентам вектора $\mathbf{c}^{(4n-1)}$ и содержащие коэффициенты $e^{-i\alpha\tau}$, $i=1,\ldots,n$, а также слагаемые, линейные по компонентам вектора $\mathbf{d}$ и содержащие коэффициенты $e^{-i\alpha\tau}$, $i=1,\ldots,2n$, то согласно (18)–(20) будем иметь систему и начальные данные, которые в векторной форме можно записать следующим образом:

$$\frac{d\mathbf{c}^{(4n-1)}}{d\tau} = \mathbf{P}\mathbf{c}^{(4n-1)} + \mathbf{Q}\mathbf{d} + \mathbf{R}_1\big(\mathbf{c}^{(4n-1)},\mathbf{d},\bar{\mathbf{x}},\tau\big) + \mathbf{R}_2\big(\mathbf{c}^{(4n-1)},\mathbf{d},\bar{\mathbf{x}},\tau\big) + \\ + \mathbf{R}_3\big(\mathbf{c}^{(4n-1)},\mathbf{d},\tau\big) + \mathbf{R}_4\big(\mathbf{c}^{(4n-1)},\mathbf{d},\bar{\mathbf{x}},\tau\big), \quad (21)$$

$$\mathbf{R}_1 = (R_1^1,\ldots,R_1^n)^T,\ \ \mathbf{R}_2 = (R_2^1,\ldots,R_2^n)^T,\ \ \mathbf{R}_3 = (R_3^1,\ldots,R_3^n)^T,\ \ \mathbf{R}_4 = (R_4^1,\ldots,R_4^n)^T.$$

Функции R_1^i содержат все слагаемые, которые линейно зависят от компонент вектора $\mathbf{c}^{(4n-1)}$ с коэффициентами $e^{-i\alpha\tau}$, $i \geqslant n+1$, а также слагаемые, входящие в последнюю сумму правой части полученной системы, которые не содержат степеней компонент вектора $\mathbf{d}$ и имеют сумму степеней компонент вектора $\mathbf{c}^{(4n-1)}$, равную единице.

Функции R_2^i содержат все слагаемые, которые линейно зависят от компонент вектора $\mathbf{d}$ с множителями $e^{-i\alpha\tau}$, $i \geqslant 2n+1$, а также слагаемые, входящие в последнюю сумму правой части полученной системы, которые не содержат степеней компонент вектора $\mathbf{c}^{(4n-1)}$ и имеют сумму степеней компонент вектора $\mathbf{d}$, равную единице.

Функции в R_3^i содержат все слагаемые, нелинейные по компонентам векторов $\mathbf{c}^{(4n-1)}$ и $\mathbf{d}$.

Функции R_4^i состоят из суммы слагаемых, не содержащих степеней компонент векторов $\mathbf{c}^{(4n-1)}$ и $\mathbf{d}$.

Кроме того, можем записать

$$\begin{gathered} \mathbf{P}(\bar{\mathbf{x}}) = \alpha e^{-\alpha\tau}\left(\mathbf{P}_1(\bar{\mathbf{x}}) + e^{-\alpha\tau}\mathbf{P}_2(\bar{\mathbf{x}}) + \cdots + e^{-(n-1)\alpha\tau}\mathbf{P}_{n-1}(\bar{\mathbf{x}})\right), \\ \mathbf{Q}(\bar{\mathbf{x}}) = \alpha e^{-\alpha\tau}\left(\mathbf{Q}_1(\bar{\mathbf{x}}) + e^{-\alpha\tau}\mathbf{Q}_2(\bar{\mathbf{x}}) + \cdots + e^{-(2n-1)\alpha\tau}\mathbf{Q}_{2n-1}(\bar{\mathbf{x}})\right), \\ \mathbf{P}_1(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\bar{\mathbf{x}},\mathbf{0}), \quad \mathbf{P}_1(\mathbf{0}) = \mathbf{A}, \quad \mathbf{Q}_1(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}(\bar{\mathbf{x}},\mathbf{0}), \quad \mathbf{Q}_1(\mathbf{0}) = \mathbf{B}, \end{gathered} \quad (22)$$

$$\begin{gathered} \mathbf{c}^{(4n-1)}(0) = -\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}},\mathbf{0}) - \phi^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}) - \phi^{(3)}(\bar{\mathbf{x}}) - \cdots - \phi^{(4n-1)}(\bar{\mathbf{x}}), \\ \phi^{(i)} = (\phi_1^{(i)},\ldots,\phi_n^{(i)})^T, \quad \phi^{(i)}(\mathbf{0}) = 0, \quad i = 1,...,4n-1. \end{gathered} \quad (23)$$

3. Оценка слагаемых правой части вспомогательной системы. Из построения системы (21) следует, что в области (5), (16) имеют место оценки

$$\|\mathbf{P}_i(\bar{\mathbf{x}})\| \to 0, \quad \|\mathbf{Q}_j(\bar{\mathbf{x}})\| \to 0 \text{ при } i = 2,\ldots,n-1, \quad j = 2,\ldots,2n-1; \quad (24)$$

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{R}_1\big(\mathbf{c}^{(4n-1)},\mathbf{d},\bar{\mathbf{x}},\tau\big)\| \leqslant e^{-(n+1)\alpha\tau}L_1\|\mathbf{c}^{(4n-1)}\|, \quad L_1>0, \\ &\|\mathbf{R}_2\big(\mathbf{c}^{(4n-1)},\mathbf{d},\bar{\mathbf{x}},\tau\big)\| \leqslant e^{-(2n+1)\alpha\tau}L_2\|\mathbf{d}\|, \qquad L_2>0, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\|\mathbf{R}_3\big(\mathbf{c}^{(4n-1)},\mathbf{d},\tau\big)\| \leqslant e^{-\alpha\tau}L_3\left(\|\mathbf{c}^{(4n-1)}\|^2 + \|\mathbf{d}\|^2\right), \quad L_3>0. \quad (26)$$

Кроме того, из условий (2), (3) и построения $\mathbf{R}_4$ следует

$$\|\mathbf{R}_4\big(\mathbf{c}^{(4n-1)},\mathbf{d},\bar{\mathbf{x}},\tau\big)\| \leqslant L_4\|\bar{\mathbf{x}}\|e^{-4n\alpha\tau}, \quad L_4>0. \quad (27)$$

Оценка (27) вытекает из представления

$$\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{0}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\theta, \mathbf{0})\bar{\mathbf{x}}, \quad \theta = (\theta_1 x_1, \ldots, \theta_n x_n)^T, \quad \theta_i \in [0, 1], \quad i = 1, \ldots, n.$$

Замечание 2. Обозначим через $\mathbf{q}_1^i$ i-й столбец матрицы $\mathbf{Q}_1$. Построим матрицу

$$\mathbf{S}_1 = \{\mathbf{q}_1^1, \mathbf{P}_1\mathbf{q}_1^1, \ldots, \mathbf{P}_1^{k_1-1}\mathbf{q}_1^1, \mathbf{q}_1^2, \mathbf{P}_1\mathbf{q}_1^2, \ldots, \mathbf{P}_1^{k_2-1}\mathbf{q}_1^2, \ldots, \mathbf{q}_1^r, \ldots, \mathbf{P}_1^{k_r-1}\mathbf{q}_1^r\}.$$

Здесь k_j, $j = 1, \ldots, r,$ — максимальное количество столбцов вида $\mathbf{q}_1^j$, $\mathbf{P}_1\mathbf{q}_1^j$, $\ldots$, $\mathbf{P}_1^{k_j-1}\mathbf{q}_1^j$ таких, что все столбцы матрицы $\mathbf{S}_1$ линейно независимы. Из условий (4) и (22) следует, что существует такое $\varepsilon_1 > 0$, что $\forall \bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ таких, что $\|\bar{\mathbf{x}}\| < \varepsilon_1$, выполняется $\mathrm{rank}\mathbf{S}_1 = n$.

Рассмотрим систему

$$\frac{d\mathbf{c}^{(4n-1)}}{d\tau} = \mathbf{P}\mathbf{c}^{(4n-1)} + \mathbf{Q}\mathbf{d}. \tag{28}$$

4. Вспомогательная лемма.

Лемма. *Пусть для системы* (1) *выполнены условия* (2), (4). *Тогда* $\exists \bar{\varepsilon} > 0$: $\bar{\varepsilon} < \varepsilon_1$ *такое, что* $\forall \bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$, $\|\bar{\mathbf{x}}\| < \bar{\varepsilon}$, *существует управление* $\mathbf{d}(\tau)$ *вида*

$$\mathbf{d}(\tau) = \mathbf{M}(\tau)\mathbf{c}^{(4n-1)}, \tag{29}$$

при котором фундаментальная матрица системы (28) *экспоненциально убывает.*

Доказательство. При доказательстве используем метод Н. Н. Красовского стабилизации линейных нестационарных систем. Пусть $\mathbf{L}_1^j$, $j = 1, \ldots, r,$ — j-й столбец матрицы $\mathbf{Q}$. Построим матрицу

$$\mathbf{S}_2 = \{\mathbf{L}_1^1, \mathbf{L}_2^1, \ldots, \mathbf{L}_{k_1}^1, \mathbf{L}_1^2, \mathbf{L}_2^2, \ldots, \mathbf{L}_{k_2}^2, \ldots, \mathbf{L}_1^r, \ldots, \mathbf{L}_{k_r}^r\}, \tag{30}$$

$$\mathbf{L}_i^j = \mathbf{P}\mathbf{L}_{i-1}^j - \frac{d\mathbf{L}_{i-1}^j}{d\tau}, \quad j = 1, \ldots, r, \quad i = 2, \ldots, k_j.$$

Здесь k_j, $j = 1, \ldots, r,$ — максимальное количество столбцов вида $\mathbf{L}_j^1, \mathbf{L}_j^1, \ldots, \mathbf{L}_{k_j}^1$ таких, что столбцы $\mathbf{S}_2$ линейно независимы. Покажем, что выполняется

$$\mathrm{rank}\mathbf{S}_2 = n. \tag{31}$$

Пусть $\bar{\mathbf{L}}_1^j$, $j = 1, \ldots, r,$ — j-й столбец матрицы $\alpha e^{-\alpha\tau}\mathbf{Q}_1$. Введем в рассмотрение матрицу

$$\mathbf{S}_3 = \{\bar{\mathbf{L}}_1^1, \bar{\mathbf{L}}_2^1, \ldots, \bar{\mathbf{L}}_{k_1}^1, \bar{\mathbf{L}}_1^2, \bar{\mathbf{L}}_2^2, \ldots, \bar{\mathbf{L}}_{k_2}^2, \ldots, \bar{\mathbf{L}}_1^r, \ldots, \bar{\mathbf{L}}_{k_r}^r\}, \tag{32}$$

$$\bar{\mathbf{L}}_i^j = \alpha e^{-\alpha\tau}\mathbf{P}_1\bar{\mathbf{L}}_{i-1}^j - \frac{d\bar{\mathbf{L}}_{i-1}^j}{d\tau}, \quad j = 1, \ldots, r, \quad i = 2, \ldots, k_j,$$

где величины k_j, $j = 1, \ldots, r$, определяются так же, как при построении матрицы $\mathbf{S}_2$. Условия (2), (22), (24) гарантируют $\mathbf{S}_2 \to \mathbf{S}_3$ при $\|\bar{\mathbf{x}}\| \to 0$. Отсюда следует существование $\varepsilon_2 > 0$: $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ такого, что $\forall \bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$: $\|\bar{\mathbf{x}}\| < \varepsilon_2$ выполняется

$$\mathrm{rank}\mathbf{S}_2 = \mathrm{rank}\mathbf{S}_3. \tag{33}$$

Рассуждая методом от противного с учетом замечания 2 и равенства (33), убеждаемся, что $\forall \bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$: $\|\bar{\mathbf{x}}\| < \varepsilon_2$ справедливо равенство

$$\mathrm{rank}\mathbf{S}_3 = n. \tag{34}$$

Из равенств (33), (34) следует справедливость условия (31) в области $\|\bar{\mathbf{x}}\| < \varepsilon_2$. Кроме того, из структуры матрицы $\mathbf{S}_3$ следует, что в указанной области имеет место оценка

$$\|\mathbf{S}_2^{-1}\| = O(e^{n\alpha\tau}), \quad \tau \to \infty. \tag{35}$$

Используя (34), выполним замену переменной $\mathbf{c}^{(4n-1)}$ по формуле

$$\mathbf{c}^{(4n-1)} = \mathbf{S}_2(\tau)\mathbf{y}. \tag{36}$$

В результате получим систему

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\tau} = \mathbf{S}_2^{-1}\left(\mathbf{P}\mathbf{S}_2 - \frac{d\mathbf{S}_2}{d\tau}\right)\mathbf{y} + \mathbf{S}_2^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{d}. \tag{37}$$

Согласно [15] матрицы в правой части системы (37) имеют вид

$$\mathbf{S}_2^{-1}\left(\mathbf{P}\mathbf{S}_2 - \frac{d\mathbf{S}_2}{d\tau}\right) = \{\bar{\mathbf{e}}_2, \ldots, \bar{\mathbf{e}}_{k_1}, \bar{\varphi}_{k_1}(\tau), \ldots, \bar{\mathbf{e}}_{k_1+\cdots+k_{r-1}+2}, \ldots, \bar{\mathbf{e}}_n, \bar{\varphi}_{k_r}(\tau)\},$$

$$\mathbf{S}_2^{-1}\mathbf{Q} = \{\bar{\mathbf{e}}_1, \ldots, \bar{\mathbf{e}}_{k_i+1}, \ldots, \bar{\mathbf{e}}_{\gamma+1}\}, \quad \gamma = \textstyle\sum_{i=1}^{r-1} k_i, \quad n = \sum_{i=1}^{r} k_i.$$

Здесь $\bar{\varphi}_{k_j} = (-\varphi_{k_1}^1, \ldots, -\varphi_{k_1}^{k_1}, \ldots, -\varphi_{k_j}^1, \ldots, -\varphi_{k_j}^{k_j}, 0, \ldots, 0)_{n\times 1}^T$; $\bar{\mathbf{e}}_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)_{n\times 1}^T$, где единица стоит на i-м месте; $\varphi_{k_j}^i$ являются коэффициентами разложения вектора $\mathbf{L}_{k_j+1}^j$ по векторам $\mathbf{L}_1^1, \ldots, \mathbf{L}_{k_1}^1, \ldots, \mathbf{L}_1^j, \ldots, \mathbf{L}_{k_j}^j$, $j = 1, \ldots, r$, т. е.

$$\mathbf{L}_{k_j+1}^j = -\sum_{i=1}^{k_1} \varphi_{k_1}^i(\tau)\mathbf{L}_i^1 - \cdots - \sum_{i=1}^{k_j} \varphi_{k_j}^i(\tau)\mathbf{L}_i^j. \tag{38}$$

Рассмотрим задачу стабилизации системы

$$\frac{d\mathbf{y}_{k_i}}{d\tau} = \{\bar{\mathbf{e}}_2^{k_i}, \ldots, \bar{\mathbf{e}}_{k_i}^{k_i}, \bar{\bar{\varphi}}_{k_i}\}\mathbf{y}_{k_i} + \bar{\mathbf{e}}_1^{k_i} d_i, \quad i = 1, \ldots, r, \tag{39}$$

$\mathbf{y}_{k_i} = (y_{k_i}^1, \ldots, y_{k_i}^{k_i})_{k_i\times 1}^T$, $\bar{\mathbf{e}}_i^{k_i} = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)_{k_i\times 1}^T$, где единица стоит на i-м месте, $\bar{\bar{\varphi}}_{k_i} = (-\varphi_{k_i}^1, \ldots, -\varphi_{k_i}^{k_i})_{k_i\times 1}^T$.

Пусть $y_{k_i}^{k_i} = \psi$. Фазовые переменные системы (39) связаны с функцией $\psi(\tau)$ и ее производными равенствами

$$\begin{gathered} y_{k_i}^{k_i} = \psi, \quad y_{k_i}^{k_i-1} = \psi^{(1)} + \varphi_{k_i}^{k_i}\psi, \quad y_{k_i}^{k_i-2} = \psi^{(2)} + \varphi_{k_i}^{k_i}\psi^{(1)} + \left(\frac{d\varphi_{k_i}^{k_i}}{d\tau} + \varphi_{k_i}^{k_i-1}\right)\psi, \\ \ldots, \quad y_{k_i}^1 = \psi^{(k_i-1)} + r_{k_i-2}(\tau)\psi^{(k_i-2)} + \cdots + r_1(\tau)\psi^{(1)} + r_0(\tau)\psi. \end{gathered} \tag{40}$$

Если продифференцировать последнее равенство из (40), то из первого уравнения системы (39) получим

$$\psi^{(k_i)} + \varepsilon_{k_i-1}(\tau)\psi^{(k_i-1)} + \cdots + \varepsilon_0(\tau)\psi = d_i, \quad i = 1, \ldots, r. \tag{41}$$

В (40), (41) функции $r_{k_i-2}(\tau)$, $\ldots$, $r_0(\tau)$, $\varepsilon_{k_i-1}(\tau)$, $\ldots$, $\varepsilon_0(\tau)$ являются линейными комбинациями функций $\varphi^i_{k_j}(\tau)$, $i = 1, \ldots, k_j$, $j = 1, \ldots, r$, и их производных.

Замечание 3. Из структуры матриц $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ (см. (22) и представление (38)) следует, что функции $\varphi^{k_i}_{k_i}(\tau)$, $\ldots$, $\varphi^{k_i}_1(\tau)$, их производные, а также функции $r_{k_i-2}(\tau)$, $\ldots$, $r_0(\tau)$, $\varepsilon_{k_i-1}(\tau)$, $\ldots$, $\varepsilon_0(\tau)$ ограничены. Остальные элементы столбцов $\bar{\varphi}_{k_j}$, $j = 1, \ldots, r$, удовлетворяют оценке $O(e^{(n-1)\alpha\tau})$, $\tau \to \infty$. Пусть

$$d_i = \sum_{j=1}^{k_i} (\varepsilon_{k_i-j}(\tau) - \gamma_{k_i-j})\psi^{(k_i-j)}, \quad i = 1, \ldots, r, \tag{42}$$

где γ_{k_i-j}, $j = 1, \ldots, k_i$, выбраны так, чтобы корни $\lambda^1_{k_i}$, $\ldots$, $\lambda^{k_i}_{k_i}$ уравнений

$$\lambda^{k_i} + \gamma_{k_i-1}\lambda^{k_i-1} + \cdots + \gamma_0 = 0, \quad i = 1, \ldots, r,$$

удовлетворяли условиям

$$\lambda^i_{k_i} \neq \lambda^j_{k_i}, \text{ если } i \neq j, \quad \lambda^j_{k_i} < -(2n+1)\alpha - 1, \quad j = 1, \ldots, k_i, \quad i = 1, \ldots, r. \tag{43}$$

В силу (40), (43) и замечания 3 закон управления $d_i = \delta_{k_i}\mathbf{T}^{-1}_{k_i}\mathbf{y}_{k_i}$, $i = 1, \ldots, r$, обеспечивает экспоненциальное убывание решений системы (37). Возвращаясь в (42) к исходным переменным с учетом (36), получим

$$d_i = \delta_{k_i}\mathbf{T}^{-1}_{k_i}\mathbf{S}^{-1}_{2k_i}\mathbf{c}^{(4n-1)}, \quad i = 1, \ldots, r, \tag{44}$$

$\delta_{k_i} = (\varepsilon_{k_i-1}(\tau) - \gamma_{k_i-1}, \ldots, \varepsilon_0(\tau) - \gamma_0)$, $\mathbf{T}_{k_i}$ — матрица равенства (40), т. е. $\mathbf{y}_{k_i} = \mathbf{T}_{k_i}\bar{\psi}$, $\bar{\psi} = (\psi^{(k_i-1)}, \ldots, \psi)^T$, $\mathbf{S}^{-1}_{2k_i}$ — матрица, состоящая из соответствующих строк матрицы $\mathbf{S}^{-1}_2$. Найденное управление можно записать в виде (29), где $\mathbf{M}(\tau) = \delta_k\mathbf{T}^{-1}_k\mathbf{S}^{-1}_{2k} = (\delta_{k_1}\mathbf{T}^{-1}_{k_1}\mathbf{S}^{-1}_{2k_1}, \ldots, \delta_{k_r}\mathbf{T}^{-1}_{k_r}\mathbf{S}^{-1}_{2k_r})^T$.

Обозначим через $\Psi(\tau)$, $\Psi(0) = \mathbf{E}$ ($\mathbf{E}$ — единичная матрица) фундаментальную матрицу системы (41), замкнутую управлением (44). Очевидно, что элементами матрицы $\Psi(\tau)$ являются экспоненты с отрицательными показателями и их производные.

Рассмотрим систему (28), замкнутую управлением (44):

$$\frac{d\mathbf{c}^{(4n-1)}}{d\tau} = \mathbf{D}(\tau)\mathbf{c}^{(4n-1)}, \quad \mathbf{D}(\tau) = \mathbf{P}(\tau) + \mathbf{Q}(\tau)\mathbf{M}(\tau). \tag{45}$$

Введем в рассмотрение блочно-диагональную матрицу $\mathbf{T}(\tau)$, на диагонали которой стоят матрицы $\mathbf{T}_{k_i}$, $i = 1, \ldots, r$. Тогда на основании (36), (40) фундаментальная матрица $\Phi(\tau)$, $\Phi(\tau)^{-1} = \mathbf{E}$ системы (45) имеет вид

$$\Phi(\tau) = \mathbf{S}_2(\tau)\mathbf{T}(\tau)\Psi(\tau)\mathbf{T}^{-1}(0)\mathbf{S}^{-1}(0). \tag{46}$$

Из (46), структуры матриц $\mathbf{S}_2(\tau)$, $\Psi(\tau)$ и замечания 3 следует оценка

$$\|\Phi(\tau)\| \leqslant Ke^{-\alpha\tau}e^{-\lambda\tau}, \quad \lambda > 0, \quad K > 0. \tag{47}$$

Положим $\bar{\varepsilon} = \varepsilon_2$. Тогда из (47) следует справедливость утверждения леммы. □

Кроме того, на основании (35), (44), (46) и замечания 3 имеем

$$\begin{aligned} &\|\Phi(\tau)\Phi^{-1}(t)\| \leqslant K_1e^{-\lambda(\tau-t)}e^{(n-1)\alpha t}, \quad t \leqslant \tau, \quad \tau \in [0, \infty), \quad K_1 > 0, \\ &\|\mathbf{M}(\tau)\| = O(e^{n\alpha\tau}), \quad \tau \to \infty. \end{aligned} \tag{48}$$

5. Доказательство теоремы. Система (21), замкнутая управлением (44), имеет вид

$$\frac{d\mathbf{c}^{(4n-1)}}{d\tau} = \mathbf{R}_1\big(\mathbf{c}^{(4n-1)}, \mathbf{M}(\tau)\mathbf{c}^{(4n-1)}, \bar{\mathbf{x}}, \tau\big) + \mathbf{R}_2\big(\mathbf{c}^{(4n-1)}, \mathbf{M}(\tau)\mathbf{c}^{(4n-1)}, \bar{\mathbf{x}}, \tau\big) + \\ + \mathbf{D}(\tau)\mathbf{c}^{(4n-1)} + \mathbf{R}_3\big(\mathbf{c}^{(4n-1)}, \mathbf{M}(\tau)\mathbf{c}^{(4n-1)}, \tau\big) + \mathbf{R}_4\big(\mathbf{c}^{(4n-1)}, \mathbf{M}(\tau)\mathbf{c}^{(4n-1)}, \bar{\mathbf{x}}, \tau\big), \quad (49)$$

Выполним в системе (49) замену переменной

$$\mathbf{c}^{(4n-1)} = \mathbf{z}e^{-3n\alpha\tau}, \quad \mathbf{c}^{(4n-1)}(0) = \mathbf{z}(0). \quad (50)$$

В результате получим систему

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\tau} = \mathbf{C}(\tau)\mathbf{z} + e^{3n\alpha\tau}\mathbf{R}_1\big(e^{-3n\alpha\tau}\mathbf{z}, \mathbf{M}(\tau)e^{-3n\alpha\tau}\mathbf{z}, \bar{\mathbf{x}}, \tau\big) + \\ + e^{3n\alpha\tau}\mathbf{R}_2\big(e^{-3n\alpha\tau}\mathbf{z}, \mathbf{M}(\tau)e^{-3n\alpha\tau}\mathbf{z}, \bar{\mathbf{x}}, \tau\big) + e^{3n\alpha\tau}\mathbf{R}_3\big(e^{-3n\alpha\tau}\mathbf{z}, \mathbf{M}(\tau)e^{-3n\alpha\tau}\mathbf{z}, \tau\big) + \\ + e^{3n\alpha\tau}\mathbf{R}_4\big(e^{-3n\alpha\tau}\mathbf{z}, \mathbf{M}(\tau)e^{-3n\alpha\tau}\mathbf{z}, \bar{\mathbf{x}}, \tau\big), \quad \mathbf{C}(\tau) = \mathbf{D}(\tau) + 3n\alpha\mathbf{E}. \quad (51)$$

Покажем, что все решения системы (51) с начальными данными (50), начинающиеся в достаточно малой окрестности нуля, экспоненциально убывают.

Пусть $\Phi_1(\tau)$, $\Phi_1(0) = \mathbf{E}$ — фундаментальная матрица системы. Тогда на основании (47), (48), (50) получим

$$\|\Phi_1(\tau)\| \leqslant Ke^{-\beta\tau}, \quad \|\Phi_1(\tau)\Phi_1^{-1}(t)\| \leqslant K_1 e^{-\beta(\tau-t)}e^{(n-1)\alpha t}, \quad \beta = \lambda - 3n\alpha. \quad (52)$$

Выберем α так, чтобы было выполнено

$$\beta > 0. \quad (53)$$

Решение системы (51) с начальными данными (23) при $\tau \in [\tau_1, \infty)$ принимает вид

$$\mathbf{z}(\tau) = \Phi_1(\tau)\Phi_1^{-1}(\tau_1)\mathbf{z}(\tau_1) + \int_{\tau_1}^{\tau} \Phi_1(\tau)\Phi_1^{-1}(t)e^{3n\alpha t} \times \\ \times \Big[\mathbf{R}_1\big(e^{-3n\alpha t}\mathbf{z}, \mathbf{M}(t)e^{-3n\alpha t}\mathbf{z}, \bar{\mathbf{x}}, t\big) + \mathbf{R}_2\big(e^{-3n\alpha t}\mathbf{z}, \mathbf{M}(t)e^{-3n\alpha t}\mathbf{z}, \bar{\mathbf{x}}, t\big) + \\ + \mathbf{R}_3\big(e^{-3n\alpha t}\mathbf{z}, \mathbf{M}(t)e^{-3n\alpha t}\mathbf{z}, t\big) + \mathbf{R}_4\big(e^{-3n\alpha t}\mathbf{z}, \mathbf{M}(t)e^{-3n\alpha t}\mathbf{z}, \bar{\mathbf{x}}, t\big)\Big]dt, \quad (54)$$

а при $\tau \in [0, \tau_1]$ —

$$\mathbf{z}(\tau) = \Phi_1(\tau)\mathbf{c}^{(4n-1)}(0) + \int_{0}^{\tau_1} \Phi_1(\tau)\Phi_1^{-1}(t)e^{3n\alpha t} \times \\ \times \Big[\mathbf{R}_1\big(e^{-3n\alpha t}\mathbf{z}, \mathbf{M}(t)e^{-3n\alpha t}\mathbf{z}, \bar{\mathbf{x}}, t\big) + \mathbf{R}_2\big(e^{-3n\alpha t}\mathbf{z}, \mathbf{M}(t)e^{-3n\alpha t}\mathbf{z}, \bar{\mathbf{x}}, t\big) + \\ + \mathbf{R}_3\big(e^{-3n\alpha t}\mathbf{z}, \mathbf{M}(t)e^{-3n\alpha t}\mathbf{z}, t\big) + \mathbf{R}_4\big(e^{-3n\alpha t}\mathbf{z}, \mathbf{M}(t)e^{-3n\alpha t}\mathbf{z}, \bar{\mathbf{x}}, t\big)\Big]dt. \quad (55)$$

В свою очередь из (54), (55) с учетом (25)–(27), (29), (50) и (52) в области (5) (при замене $\mathbf{c}$ на $\mathbf{z}$), (16) имеем оценки:

$$\|\mathbf{z}(\tau)\| \leqslant Ke^{-\beta\tau}\|\Phi_1^{-1}(\tau_1)\|\|\mathbf{z}(\tau_1)\| + \int_{\tau_1}^{\tau} K_1 e^{-\beta(\tau-t)}\big(\bar{L}e^{-\alpha\sigma}\|\mathbf{z}(t)\| + L_4 e^{-\alpha t}\|\bar{\mathbf{x}}\|\big)dt \quad (56)$$

при $\tau \in [\tau_1, \infty)$ и

$$\|\mathbf{z}(\tau)\| \leqslant K e^{-\beta\tau} \|\mathbf{c}^{(4n-1)}(0)\| + \int_0^{\tau_1} K_1 e^{-\beta(\tau - t)} \big(\bar{L} e^{-\alpha t} \|\mathbf{z}(t)\| + L_4 e^{-\alpha t} \|\bar{\mathbf{x}}\|\big) dt \tag{57}$$

при $\tau \in [0, \tau_1]$. Константа $\bar{L}$ зависит от области (5), (16).

Применяя к неравенствам (56), (57) известный результат [16], получим

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{z}(\tau)\| \leqslant K e^{-\mu\tau} \|\Phi_1^{-1}(\tau_1)\| \|\mathbf{z}(\tau_1)\| + \int_{\tau_1}^{\tau} K_1 e^{-\mu(\tau - t)} L_4 e^{-\alpha t} \|\bar{\mathbf{x}}\| dt, \quad \tau \in [\tau_1, \infty), \\ &\|\mathbf{z}(\tau)\| \leqslant K e^{-\mu_1\tau} \|\mathbf{c}^{(4n-1)}(0)\| + \int_0^{\tau_1} K_1 e^{-\mu_1(\tau - t)} L_4 e^{-\alpha t} \|\bar{\mathbf{x}}\| dt, \qquad \tau \in [0, \tau_1], \end{aligned} \tag{58}$$

где $\mu = \beta - K_1 \bar{L} e^{-\alpha\tau_1}$, $\mu_1 = \beta - K_1 \bar{L}$.

Используя условие (53), зафиксируем $\tau_1 > 0$ так, чтобы было выполнено неравенство $\mu > 0$. Далее, ограничим выбор $\alpha > 0$ условием $\alpha < \mu$. Тогда после интегрирования вторых слагаемых правых частей оценок (58) имеем неравенства

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{z}(\tau)\| \leqslant K e^{-\mu\tau} \|\Phi_1^{-1}(\tau_1)\| \|\mathbf{z}(\tau_1)\| + K_2 e^{-\alpha\tau} L_4 \|\bar{\mathbf{x}}\|, \quad \tau \in [\tau_1, \infty), \quad K_2 > 0, \\ &\|\mathbf{z}(\tau)\| \leqslant K_3 \|\mathbf{c}^{(4n-1)}(0)\| + K_4 L_4 \|\bar{\mathbf{x}}\|, \qquad \tau \in [0, \tau_1], \quad K_3, K_4 > 0. \end{aligned}$$

На основании (23), (27) в области $\|\bar{\mathbf{x}}\| < \bar{\varepsilon}$ последние две оценки можно записать в виде одного неравенства

$$\|\mathbf{z}(\tau)\| \leqslant K_5 e^{-\alpha\tau} \|\bar{\mathbf{x}}\|, \quad \tau \in [0, \infty), \quad K_5 > 0. \tag{59}$$

В (59) константа K_5 зависит от области (5), (16) и константы τ_1. Воспользовавшись (29), (48), (50), (59), получим оценку $\|\mathbf{d}(\tau)\|$:

$$\|\mathbf{d}(\tau)\| \leqslant \|\mathbf{M}(\tau)\| e^{-3n\alpha\tau} K_5 e^{-\alpha\tau} \|\bar{\mathbf{x}}\| \leqslant K_6 e^{-(2n-1)\alpha\tau} \|\bar{\mathbf{x}}\|, \quad \tau \in [0, \infty), \quad K_6 > 0. \tag{60}$$

Положим величину $\varepsilon > 0$ в условии теоремы равной $\varepsilon = \min\{\bar{\varepsilon}, C_1/K_5, N/K_6\}$. В результате показано, что решение системы (51) с начальными данными (50), (23) при $\|\bar{\mathbf{x}}\| < \varepsilon$ не покинет область $\|\mathbf{z}\| < C_1$, экспоненциально убывает и при этом согласно (60) соответствующая функция $\mathbf{d}(\tau)$ удовлетворяет ограничению (5). Кроме того, если это решение подставить в формулы (50), (29) и вернуться к переменным $\mathbf{c}(\tau)$ по формулам (20), (17), то будем иметь решение задачи (12), (13). Далее, возвращаясь к исходным зависимым и независимым переменным по формулам (14), (11), (7) и переходя к пределу при $t \to 1$ согласно замечанию 1, получим решение исходной задачи (1), (6). Теорема доказана. $\square$

Алгоритм решения поставленной задачи состоит из следующих этапов.

1. Построение вспомогательной системы (21). Выполняется аналитическими методами.
2. Решение задачи стабилизации системы (28) аналитическими методами. В результате находится управление вида (29).
3. Решение задачи Коши для вспомогательной системы (21), замкнутой обратной связью (29). Выполняется численными методами.
4. Возврат к исходным зависимым и независимым переменным. Выполняется аналитическими методами.

6. Пример. Решение задачи перевода материальной точки в центральном поле тяготения. В качестве иллюстрации эффективности предложенного метода рассмотрим задачу перевода материальной точки, движущейся по круговой орбите с постоянной скоростью в центральном поле тяготения с помощью реактивной силы. Согласно [12] система уравнений в отклонениях относительно указанного движения по круговой орбите и условия (6) имеют вид

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\frac{\nu}{(r_0 + x_1)^2} + \frac{(\chi_0 + x_3)^2}{(r_0 + x_1)^3} + a_r u, \quad \dot{x}_3 = (r_0 + x_1) a_\psi u, \tag{61}$$

$$x_i(0) = 0, \quad x_i(1) = \bar{x}_i, \quad i = 1, 2, 3. \tag{62}$$

где $x_1 = r - r_0$, $x_2 = \dot{r}$, $x_3 = \chi - \chi_0$, $\chi_0 = (\nu r_0)^{1/2}$, $u = \dot{m}/m$, r_0 — радиус круговой орбиты, $\dot{r}$ — радиальная скорость; χ — обобщенный импульс, a_r, a_ψ — проекции вектора относительной скорости отделяющейся частицы на направление радиуса и поперечное направление соответственно (постоянные величины), m и $\dot{m}$ — соответственно масса и скорость изменения массы, $\nu = \nu_0 M$, ν_0 — постоянная всемирного тяготения; M — масса Земли, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$, $u \in \mathbb{R}^1$. Система (12) и условия (13) примут вид

$$\frac{dc_1}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau} c_2, \quad \frac{dc_2}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau}\big(g(c_1, c_3) + a_r d\big), \quad \frac{dc_3}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau}(c_1 + \bar{x}_1 + r_0) a_\psi d, \tag{63}$$

$$g(c_1, c_3) = -\frac{\nu}{(r_0 + c_1 + \bar{x}_1)^2} + \frac{(\chi_0 + c_3 + \bar{x}_3)^2}{(r_0 + c_1 + \bar{x}_1)^3},$$

$$c_i(0) = -\bar{x}_i, \quad c_i(\tau) \to 0 \text{ при } \tau \to \infty, \quad i = 1, 2, 3. \tag{64}$$

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, 0, 0)^T$. Для решения задачи (63), (64) необходимо выполнить семь преобразований типа (20):

$$c_2 = z_2 - e^{-\alpha\tau} g(\bar{x}_1), \quad c_1 = z_1 + \frac{1}{2} e^{-2\alpha\tau} g(\bar{x}_1), \quad z_2 = w_2 - \frac{1}{6} e^{-3\alpha\tau} \frac{\partial g}{\partial c_1}(\bar{x}_1) g(\bar{x}_1),$$

$$z_1 = w_1 + \frac{1}{24} e^{-4\alpha\tau} \frac{\partial g}{\partial c_1}(\bar{x}_1) g(\bar{x}_1), \quad w_2 = \upsilon_2 - e^{-5\alpha\tau} \bar{g},$$

$$w_1 = \upsilon_1 + e^{-6\alpha\tau} \bar{\bar{g}}, \qquad \upsilon_2 = u_2 - e^{-7\alpha\tau} \bar{\bar{\bar{g}}},$$

$$\bar{g} = \frac{1}{120}\left(\frac{\partial g}{\partial c_1}(\bar{x}_1)\right)^2 g(\bar{x}_1) - \frac{1}{40} \frac{\partial^2 g}{\partial c_1^2}(\bar{x}_1) g^2(\bar{x}_1),$$

$$\bar{\bar{g}} = \frac{1}{720}\left(\frac{\partial g}{\partial c_1}(\bar{x}_1)\right)^2 g(\bar{x}_1) + \frac{1}{240} \frac{\partial^2 g}{\partial c_1^2}(\bar{x}_1) g^2(\bar{x}_1),$$

$$\bar{\bar{\bar{g}}} = \frac{1}{7}\left(\frac{1}{720}\left(\frac{\partial g}{\partial c_1}(\bar{x}_1)\right)^3 g(\bar{x}_1) + \frac{1}{48} \frac{\partial^3 g}{\partial c_1^3}(\bar{x}_1) g^3(\bar{x}_1) + \frac{1}{40} \frac{\partial g}{\partial c_1}(\bar{x}_1) \frac{\partial^2 g}{\partial c_1^2}(\bar{x}_1) g^2(\bar{x}_1)\right). \tag{65}$$

Положим $a_r = 1$. Матрицы $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ и система, которая является аналогом системы (28), примут вид

$$\frac{d\bar{\mathbf{c}}}{d\tau} = \mathbf{P}\bar{\mathbf{c}} + \mathbf{Q}\mathbf{d}, \quad \bar{\mathbf{c}} = (\upsilon_1, u_2, c_3)^T, \tag{66}$$

$$\mathbf{P} = \alpha e^{-\alpha\tau} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha e^{-\alpha\tau} \\ \alpha e^{-\alpha\tau} b + \frac{\alpha}{2} e^{-3\alpha\tau} a_\psi) \end{bmatrix},$$

где $a_{21} = \frac{\partial g}{\partial c_1}(\bar{x}_1)$, $a_{23} = \frac{\partial g}{\partial c_3}(\bar{x}_1)$, $b = (r_0 + \bar{x}_1) a_\psi$.

Для решения задачи стабилизации системы (66) строим матрицу $\mathbf{S}=\{\mathbf{L}_1,\mathbf{L}_2,\mathbf{L}_3\}$, где $\mathbf{L}_1=\mathbf{Q}$, $\mathbf{L}_i=\mathbf{P}\mathbf{L}_{i-1}-\frac{d}{d\tau}\mathbf{L}_{i-1}$, $i=2,3$.

После преобразования $\bar{\mathbf{c}}=\mathbf{S}\mathbf{y}$, $\mathbf{y}=(y_1,y_2,y_3)^T$ получим систему

$$\frac{dy_1}{d\tau}=\varphi_1(\tau)y_3+d,\quad \frac{dy_2}{d\tau}=y_1+\varphi_2(\tau)y_3,\quad \frac{dy_3}{d\tau}=y_2+\varphi_3(\tau)y_3. \tag{67}$$

Замена $y_3=\psi(\tau)$ приводит систему (67) к линейному уравнению третьего порядка

$$\psi^{(3)}(\tau)-\varphi_3(\tau)\psi^{(2)}(\tau)-\left(2\frac{d\varphi_3}{d\tau}+\varphi_2(\tau)\right)\psi^{(1)}(\tau)-\left(\frac{d^2\varphi_3}{d\tau^2}+\frac{d\varphi_3}{d\tau}+\varphi_1(\tau)\right)\psi(\tau)=d. \tag{68}$$

Переменные y_1, y_2, y_3 связаны с переменными $\psi^{(2)}$, $\psi^{(1)}$, ψ равенством

$$\mathbf{y}=\mathbf{T}\Psi,\quad \mathbf{T}=\begin{bmatrix}1 & -\varphi_3 & -\left(\frac{d\varphi_3}{d\tau}+\varphi_3(\tau)\right)\\ 0 & 1 & -\varphi_3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad \Psi=(\psi^{(2)},\psi^{(1)},\psi)^T.$$

Пусть $d=-\big(6+\varphi_3\big)\psi^{(2)}-\left(11+2\frac{d\varphi_3}{d\tau}+\varphi_2\right)\psi^{(1)}-\left(6+\frac{d^2\varphi_3}{d\tau^2}+\frac{d\varphi_3}{d\tau}+\varphi_1\right)\psi$. После подстановки $d(\tau)$ в (68) получим уравнение, корни характеристического уравнения которого суть -1, -2, -3. Возвращаясь к исходным переменным, имеем

$$d=\Gamma(\tau)\mathbf{T}^{-1}(\tau)\mathbf{S}^{-1}(\tau)\bar{\mathbf{c}},\quad \Gamma=-\left(6+\varphi_3,11+2\frac{d\varphi_3}{d\tau}+\varphi_2,6+\frac{d^2\varphi_3}{d\tau^2}+\frac{d\varphi_3}{d\tau}+\varphi_1\right). \tag{69}$$

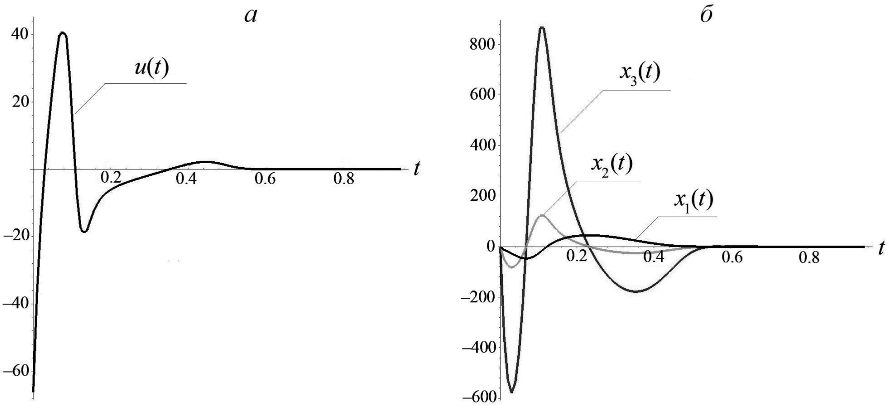
Очевидно, управление (69) обеспечивает экспоненциальное убывание решений системы (66). На заключительном этапе решаем задачу Коши для системы, полученной из системы (63) после замены фазовых координат по формулам (65) и замкнутой управлением (69) в новых переменных, и осуществляем переход к исходным переменным. При этом начальные данные для задачи Коши имеют вид

$$v_1(0)=-\bar{x}_1-\frac{g(\bar{x}_1)}{2}-\frac{1}{24}\frac{\partial g}{\partial c_1}(\bar{x}_1)g(\bar{x}_1)-\bar{\bar{g}},$$
$$u_2(0)=g(\bar{x}_1)+\frac{1}{6}\frac{\partial g}{\partial c_1}(\bar{x}_1)g(\bar{x}_1)+\bar{g}+\bar{\bar{\bar{g}}},\quad c_3(0)=0.$$

В процессе численного моделирования интегрировалась вспомогательная система, полученная из системы (63), (69) после замены фазовых координат по формулам (65) с начальными данными $v_1(0)$, $u_2(0)$, $c_3(0)$ при $\bar{x}_1=10$ м, $r_0=7\cdot10^6$ м, $\alpha=0{,}1$, $a_\psi=0{,}1$ на промежутке $[0;12{,}5]$. Далее был выполнен переход от вспомогательных переменных к исходным. На рисунке представлены графики управляющей функции $u(t)$ и соответствующих ей функций изменения фазовых координат $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ в исходной независимой переменной t.

На основании результатов численного моделирования можно сделать следующие выводы.

1. Наибольшие энергетические затраты для управляющего воздействия приходятся на начальный период перевода и напрямую зависят от значения конечного состояния $\bar{x}_1$.



Управляющая функция (*а*); функции изменения фазовых координат (*б*).

2. Максимальное отклонение конечного состояния по координате, допустимое для реализации алгоритма, при заданном времени перехода составляет 100 м.
3. Численное моделирование рассмотренного примера легко реализуется на персональной ЭВМ средних возможностей.

Литература

1. *Зубов В. И.* Лекции по теории управления. 2-е изд. М.: Лань, 2009.

2. *Комаров В. А.* Синтез ограниченных управлений для линейных неавтономных систем // АиТ. 1984. № 10. С. 44–50.

3. *Крищенко А. П.* Исследование управляемости и множеств достижимости нелинейных систем управления // АиТ. 1984. № 6. С. 30–36.

4. *Aeyels D.* Controllability for polynomial systems // Lect. Notes Contr. and Inf. Sci. 1984. Vol. 63. P. 542–545.

5. *Qin H.* On the controllability of nonlinear control system // Comput. & Maths. with Appls. 1985. Vol. 10, N 6. P. 441–451.

6. *Пантелеев В. П.* Об управляемости нестационарных линейных систем // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 4. С. 623–628.

7. *Коробов В. И.* Почти полная управляемость линейных стационарных систем // Укр. мат. журн. 1986. Т. 38, № 2. С. 163–169.

8. *Айсагалиев С. А.* К теории управляемости линейных систем // АиТ. 1991. № 2. С. 35–41.

9. *Бердышев Ю. И.* О построении области достижимости в одной нелинейной задаче // Изв. РАН. Теория и системы упр. 2006. № 4. С. 22–26.

10. *Квитко А. Н.* Об одном методе решения граничной задачи для нелинейной нестационарной управляемой системы с учетом результатов измерений // АиТ. 2012. № 12. С. 89–110.

11. *Kvitko A. N., Taran T. S., Firyulina O. S.* Control problem with incomplete information // Proc. IEEE Int. Conf. “Stability and Control Processes” in Memory of V. I. Zubov (SCP). Saint-Petersburg. 2015. P. 106–109.

12. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.

13. *Кабанов С. А.* Оптимизация динамики систем с коррекцией параметров структуры управления // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2014. Т. 1(59), вып. 2. С. 254–260.

14. *He W., Ge S. S.* Vibration control of a flexible beam with output constraint // IEEE T. Ind. Electron. 2015. Vol. 62, N 8. P. 5023–5030.

15. *Смирнов Е. Я.* Стабилизация программных движений. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1997.

16. *Барбашин Е. А.* Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967.

Статья поступила в редакцию 6 апреля 2017 г.; рекомендована в печать 22 июня 2017 г.

Сведения об авторах

Квитко Александр Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор; a.kvitko@spbu.ru
Фирюлина Оксана Сергеевна — кандидат физико-математических наук; o.firulina@spbu.ru
Еремин Алексей Сергеевич — кандидат физико-математических наук, доцент; a.eremin@spbu.ru

AN ALGORITHM OF SOLUTION OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A NONLINEAR STATIONARY CONTROL SYSTEM IT MODELLING

Alexander N. Kvitko, Oksana S. Firyulina, Alexey S. Eremin

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation;
a.kvitko@spbu.ru, o.firulina@spbu.ru, a.eremin@spbu.ru

An algorithm for a control function construction is proposed. It is applicable for a wide class of stationary nonlinear systems of ordinary differential equations. The control transfers system to a given final state and obeys certain restrictions. The algorithm is easy to implement numerically. A sufficient condition of the desired transfer function existance is constructed. A certain practical problem is considered and simulated numerically with the presented method. Refs 16. Fig. 1.

Keywords: boundary condition, stabilization, control, nonlinear system.

References

1. Zubov V. I., *Lectures on control theory* (2th ed., Lan' Publ., Moscow, 2009) [in Russian].

2. Komarov V. A., “Design of constrained control signals for nonlinear non-autonomous systems”, *Automat. Rem. Contr.* **45**(10), 1280–1286 (1984).

3. Krishchenko A. P., “Controllability and attainability sets of nonlinear control systems”, *Automat. Rem. Contr.* **45**(6), 707–713 (1984).

4. Aeyels D., “Controllability for polynomial systems”, *Lect. Notes Contr. and Inf. Sci.* **63**, 542–545 (1984).

5. Qin H., “On the controllability of nonlinear control system”, *Comput. & Maths. with Appls.* **10**(6), 441–451 (1985).

6. Panteleev V. P., “Controllability of time-dependent linear systems”, *Diff. Equat.* **21**(4), 623–628 (1985) [in Russian].

7. Korobov V. I., “Almost full controllability of linear stationary systems”, *Ukranian Math. J.* **38**(2), 163–169 (1986) [in Russian].

8. Aisagaliev S. A., “On the theory of the controllability of linear systems”, *Automat. Rem. Contr.* **52**(2/1), 163–171 (1991).

9. Berdyshev Yu. I., “On the construction of the reachability domain in one nonlinear problem”, *J. Comput. Sys. Sci. Int.* **45**(4), 526–531 (2006).

10. Kvitko A. N., “On one method of solving a boundary problem for a nonlinear nonstationary controllable system taking measurement results into account”, *Automat. Rem. Contr.* **73**(12), 2021–2037 (2012).

11. Kvitko A. N., Taran T. S., Firyulina O. S., “Control problem with incomplete information”, *Proc. IEEE Int. Conf. “Stability and Control Processes” in Memory of V. I. Zubov (SCP), Saint-Petersburg*, 106–109 (2015).

12. Krasovsky N. N., *Theory of motion control* (Nauka Publ., Moscow, 1968) [in Russian].

13. Kabanov S. A. “Dynamic system optimization using correction of control structure parameters,” *Vestnik SPbSU. Series 1*, **1(59)**, issue 2, 254–260 (2014) [in Russian].

14. He W., Ge S. S. “Vibration control of a flexible beam with output constraint”, *IEEE T. Ind. Electron.* **62**(8), 5023–5030 (2015).

15. Smirnov E. Ya., *Stabilization of programmed motion* (CRC Press, 2000).

16. Barbashin E. A., *Introduction to the theory of stability* (Wolters-Noordhoff, 1970).

Для цитирования: *Квитко А. Н., Фирюлина О. С., Еремин А. С.* Алгоритм решения краевой задачи для нелинейной управляемой системы и его численное моделирование // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 4. С. 608–621.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.409

For citation: Kvitko A. N., Firyulina O. S., Eremin A. S. An algorithm of solution of a boundary value problem for a nonlinear stationary control system it modelling. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2017, vol. 4 (62), issue 4, pp. 608–621.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.409