УДК 517.5 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 4
MSC 41A15

ПРИБЛИЖЕНИЕ КРИВЫХ ЛОМАНЫМИ В L_p

А. А. Шабозова

Таджикский национальный университет,
Таджикистан, 734025, Душанбе, пр. Рудаки, 17

В статье найдено точное значение верхней грани отклонения в метрике L_p кривых Γ, заданных параметрическими уравнениями в m-мерном евклидовом пространстве от вписанных в них интерполяционных ломаных на классе $H^{\omega_1,\dots,\omega_m}$, заданном как произвольными, так и выпуклыми модулями непрерывности $\omega_i(t), i=\overline{1,m}$. Решена задача отыскания верхних граней отклонения параметрических заданных кривых $\Gamma, G \in H^{\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_m}$, координатные функции $\varphi_i(t)$ и $\psi_i(t)$ $(i=\overline{1,m})$ которых соответственно принадлежат классу $H^{\omega_i}[0,L]$ $(i=\overline{1,m})$ и пересекаются в N $(N \geq 2)$ точках разбиения отрезка $[0,L]$. Полученные результаты являются обобщением результата В. Ф. Сторчая о приближении непрерывных функций интерполяционными ломаными в метрике пространства $L_p[0,L]$ $(1 \leq p \leq \infty)$. Библиогр. 16 назв.

Ключевые слова: экстремальные задачи, теория приближения, параметрически заданные кривые, интерполяционные ломаные, модуль непрерывности, выпуклые модули непрерывности.

В работе [1] рассмотрен вопрос о точной верхней оценке погрешности приближения кривых Γ, заданных параметрическими уравнениями

$$x_i = \varphi_i(t), \quad i=\overline{1,m},\ 0 \leqslant t \leqslant L, \tag{1}$$

в m-мерном евклидовом пространстве R^m от вписанных в них интерполяционных ломаных на некоторых классах кривых, задаваемых модулями непрерывности в метрике пространства $C[0,L]$. В [2] найдены точные оценки погрешности приближения производных координатных функций кривых от их соответствующих производных интерполяционных ломаных в R^m для указанных классов функций. Полученные в [1] и [2] результаты являются своеобразным распространением хорошо известных результатов В. Н. Малоземова [3, 4] на случай приближения параметрически заданных кривых из R^m.

Здесь мы продолжим исследование в этом направлении и изучим аналогичную задачу в норме пространства $L_p[0,L], 1 \leqslant p \leqslant \infty$. Отметим, что вопрос аппроксимации кривых интерполяционными ломаными и сплайн-функциями ранее рассматривался, например, в работах [5–11], а также в монографиях [12, 13].

Приведем необходимые определения и обозначения.

Пусть $H^\omega[a,b]$ — класс функций $f \in C[a,b]$, для любых двух точек $t^{'}, t^{''} \in [a,b]$, удовлетворяющих условию

$$|f(t^{'}) - f(t^{''})| \leqslant \omega(|t^{'} - t^{''}|),$$

где $\omega(t)$ — заданный на отрезке $[0, b-a]$ модуль непрерывности, то есть непрерывная, неубывающая и полуаддитивная на $[0, b-a]$ функция, в нуле равная нулю. Если $\omega(t) = Kt^\alpha,\ 0 < \alpha \leqslant 1,\ K > 0$, класс $H^\omega[a,b]$ называют классом Липщица порядка α с константой K и пишут $H^\omega[a,b] = KH^\alpha[a,b]$.

Через $H^{\omega_1,\dots,\omega_m} := H^{\omega_1,\dots,\omega_m}[0,L]$ обозначим класс кривых Γ в R^m, заданных параметрическими уравнениями (1) и таких, у которых координатные функции

 https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.410

$\varphi_i(t) \in H^{\omega_i}[0,L]$ $(i=\overline{1,m})$. В случае, когда $\omega_i(t) \equiv \omega(t)$, $i=\overline{1,m}$, соответствующий класс функций обозначим $H^{m,\omega}$.

Обозначим через $L_p[0,L], 1 \leqslant p \leqslant \infty,$ — пространство суммируемых на $[0,L]$ в p-й $(1 \leqslant p < \infty)$ степени или измеримых существенно ограниченных $(p=\infty)$ на $[0,L]$ функций $f(t)$ с конечной нормой соответственно

$$\|f\|_p := \|f\|_{L_p[0,L]} = \left(\int\limits_0^L |f(t)|^p dt\right)^{1/p} < \infty \quad (1 \leqslant p < \infty),$$

$$\|f\|_\infty := \|f\|_{L_\infty[0,L]} = \underset{0\leqslant t\leqslant L}{\mathrm{vraisup}} |f(t)| \quad (p=\infty).$$

Пусть кривая Γ задана параметрическими уравнениями (1), а кривая G — параметрическими уравнениями $y_i = \psi_i(t)$, $i=\overline{1,m}$, $0 \leqslant t < L$, причем $\varphi_i, \psi_i \in L_p[0,L]$, $1 \leqslant p < \infty$. Определим расстояние между кривыми Γ и G одним из следующих равенств:

$$\rho_1(\Gamma,G)_p = \left\{\sum_{i=1}^m \int\limits_0^L |\varphi_i(t)-\psi_i(t)|^p dt\right\}^{1/p}, \quad 1 \leqslant p < \infty;$$

$$\rho_2(\Gamma,G)_p = \sum_{i=1}^m \left(\int\limits_0^L |\varphi_i(t)-\psi_i(t)|^p dt\right)^{1/p}, \quad 1 \leqslant p < \infty;$$

$$\rho_3(\Gamma,G)_p = \max_{1\leqslant i\leqslant m} \left(\int\limits_0^L |\varphi_i(t)-\psi_i(t)|^p dt\right)^{1/p}, \quad 1 \leqslant p < \infty.$$

Пусть $\Delta_N:\ 0 \leqslant t_1 < \ldots < t_N \leqslant L$ — произвольное разбиение отрезка $[0,L]$ и для координатных функций кривых Γ и G выполнены равенства

$$\varphi_i(t_k) = \psi_i(t_k), \quad i=\overline{1,m}, \quad k=\overline{1,N}. \tag{2}$$

Если $P(t) \equiv P(\varphi_1(t),\ldots,\varphi_m(t)) \in \Gamma$, $Q(t) \equiv Q(\psi_1(t),\ldots,\psi_m(t)) \in G$ — точки, определяемые одним и тем же значением параметра t, то точки $P(t_k) := P(\varphi_1(t_k),\ldots,\varphi_m(t_k)) \in \Gamma$ и $Q(t_k) := Q(\psi_1(t_k),\ldots,\psi_m(t_k)) \in G$, $k=\overline{1,N}$, при выполнении равенства (2) совпадают, и кривые Γ и G в точках разбиения $t_k, k=\overline{1,N}$, пересекаются. Равномерное разбиение отрезка $[0,L]$ обозначим через $\overline{\Delta}_N = \{\overline{t}_k : \overline{t}_k = kL/N\}_{k=0}^N$, а через Δ_N° обозначим разбиение отрезка $[0,L]$ точками $t_k^\circ = (2k-1)L/(2N), k=\overline{1,N}$.

Если $\rho(\Gamma,G;\Delta_N)$ — одно из расстояний $\rho_i(\Gamma,G;\Delta_N), i=\overline{1,3}$, между кривыми $\Gamma, G \in R^m$, для которых выполняются равенства (2), то требуется найти величину

$$\mathcal{E}_N(H^{\omega_1,\ldots,\omega_m};\rho)_p = \inf_{\Delta_N} \mathcal{E}(H^{\omega_1,\ldots,\omega_m},\Delta_N;\rho)_p, \tag{3}$$

где

$$\mathcal{E}(H^{\omega_1,\ldots,\omega_m},\Delta_N;\rho)_p = \sup\{\rho(\Gamma,G;\Delta_N)_p : \Gamma, G \in H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}\}. \tag{4}$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Каковы бы ни были модули непрерывности* $\omega_i(t)$ $(i=\overline{1,m},\ 0\leqslant t\leqslant L)$, *при всех* $1\leqslant p<\infty$ *имеют место равенства*

$$\mathcal{E}_N(H^{\omega_1,\ldots,\omega_m};\rho_1)_p=\mathcal{E}_N(H^{\omega_1,\ldots,\omega_m};\Delta_N^\circ;\rho_1)_p=2(2N)^{1/p}\left\{\sum_{i=1}^m\int\limits_0^{L/(2N)}\omega_i^p(t)dt\right\}^{1/p},\quad(5)$$

$$\mathcal{E}_N(H^{\omega_1,\ldots,\omega_m};\rho_2)_p=\mathcal{E}_N(H^{\omega_1,\ldots,\omega_m};\Delta_N^\circ;\rho_2)_p=2(2N)^{1/p}\sum_{i=1}^m\left\{\int\limits_0^{L/(2N)}\omega_i^p(t)dt\right\}^{1/p},\quad(6)$$

$$\mathcal{E}_N(H^{\omega_1,\ldots,\omega_m};\rho_3)_p=\mathcal{E}_N(H^{\omega_1,\ldots,\omega_m};\Delta_N^\circ;\rho_3)_p=2(2N)^{1/p}\max_{1\leqslant i\leqslant m}\left\{\int\limits_0^{L/(2N)}\omega_i^p(t)dt\right\}^{1/p}.\quad(7)$$

Доказательство. Не умаляя общности, приводим доказательство равенства (6), поскольку доказательства (5) и (7) проводятся по аналогичной схеме. Пользуясь условиями (2) и неравенством Минковского для интегралов (см., например, [14, с. 394])

$$\left\{\int\limits_0^L|f(t)+g(t)|^pdt\right\}^{1/p}\leqslant\left\{\int\limits_0^L|f(t)|^pdt\right\}^{1/p}+\left\{\int\limits_0^L|g(t)|^pdt\right\}^{1/p},\ p\geqslant 1,$$

для произвольных кривых $\Gamma, G\in H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$ получаем

$$\begin{aligned}\rho_2(\Gamma,G;\Delta_N)&=\sum_{i=1}^m\left\{\int\limits_0^L|\varphi_i(t)-\psi_i(t)|^pdt\right\}^{1/p}=\\&=\sum_{i=1}^m\left\{\int\limits_0^L|[\varphi_i(t)-\varphi_i(t_k)]+[\psi_i(t_k)-\psi_i(t)]|^p\,dt\right\}^{1/p}\leqslant\\&\leqslant\sum_{i=1}^m\left\{\int\limits_0^L|\varphi_i(t)-\varphi_i(t_k)|^pdt\right\}^{1/p}+\sum_{i=1}^m\left\{\int\limits_0^L|\psi_i(t)-\psi_i(t_k)|^pdt\right\}^{1/p}\leqslant\\&\leqslant 2\sum_{i=1}^m\left\{\int\limits_0^L\omega_i^p(|t-t_k|)dt\right\}^{1/p}.\end{aligned}\quad(8)$$

Так как неравенство (8) верно для любого $t_k\in\Delta_N$, то в силу того, что модули непрерывности $\omega_i(\tau)$ являются непрерывными и неубывающими на отрезке $[0,L]$ функциями, запишем

$$\min_k\omega_i^p(|t-t_k|\,)=\omega_i^p(\min_k|t-t_k|\,),\quad p\geqslant 1,$$

а потому имеем

$$\rho_2(\Gamma, G;\Delta_N)_p \leqslant 2\sum_{i=1}^{m}\left\{\int\limits_0^L \omega_i^p(\min_k |t-t_k|\,)dt\right\}^{1/p}.$$

Последняя оценка точна на классе кривых $H^{\omega_1,\dots,\omega_m}$, в чем легко убедиться, если рассмотреть кривые Γ_0 и G_0 из этого класса с координатами соответственно

$$\varphi_{i0}(t) = -\psi_{i0}(t) = \omega_i(\min_k |t-t_k|), \quad 0 \leqslant t \leqslant L, \quad i = \overline{1,m}.$$

Таким образом, получаем

$$\mathcal{E}(H^{\omega_1,\dots,\omega_m};\Delta_N,\rho_2)_p = \rho_2(\Gamma_0, G_0;\Delta_N)_p =$$

$$= 2\sum_{i=1}^{m}\left\{\int\limits_0^L \omega_i^p(\min_k |t-t_k|)dt\right\}^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty. \quad (9)$$

Далее нам понадобится следующая лемма.

Лемма. *Пусть $\varphi_i(t)$ $(i=\overline{1,m})$ — неубывающие и неотрицательные на отрезке $[0, b-a]$ функции. При фиксированном $N \in \mathbb{N}$ разбиению*

$$\delta_N := \{\tau_k : \ a \leqslant \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_N \leqslant b\}$$

сопоставим функции

$$\mu_i(\delta_N, t) = \varphi_i(\min_k |t-\tau_k|), \quad i=\overline{1,m}, \quad a \leqslant t \leqslant b.$$

Тогда при любом $1 \leqslant p < \infty$ справедливы неравенства

$$\int\limits_a^b \mu_i^p(\delta_N, t)dt \geqslant \int\limits_a^b \mu_i^p(\bar\delta_N, t)dt, \quad i=\overline{1,m}, \quad (10)$$

где

$$\bar\delta_N := \left\{\tau_k^\circ : \tau_k^\circ = a + (2k-1)(b-a)/(2N), \ k=\overline{1,N}\right\}.$$

Доказательство. Отметим, что сформулированная лемма является несложной модификацией леммы 8.2.9 из [14, с. 369], но мы, ради полноты, приведем ее доказательство. Если полагать $z_0 = a, z_k = (\tau_k^\circ + \tau_{k+1}^\circ)/2, k = \overline{1, N-1}, z_N = b$, то в силу монотонности функции μ_i^p имеем

$$\mu_i^p(\bar\delta_N, t) = \varphi_i^p(|t-\tau_k^\circ|), \quad z_{k-1} \leqslant t \leqslant z_k, \quad k=\overline{1,N}.$$

Простые вычисления приводят к соотношению

$$\int\limits_a^b \mu_i^p(\bar\delta_N, t)dt = \sum_{k=1}^{N}\int\limits_{z_{k-1}}^{z_k} \varphi_i^p(|t-\tau_k^\circ|)dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{N}\left(\int\limits_{z_{k-1}}^{\tau_k^\circ} \varphi_i^p(\tau_k^\circ - t)dt + \int\limits_{\tau_k^\circ}^{z_k} \varphi_i^p(t-\tau_k^\circ)dt\right) = 2N\int\limits_0^{(b-a)/(2N)} \varphi_i^p(t)dt. \quad (11)$$

С другой стороны, из определения функций $\mu_i^p(\delta_N, t)$ следует, что произвольному разбиению δ_N можно сопоставить наборы чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2N}$ такие, что $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{2N} = b - a$ и

$$\int\limits_a^b \mu_i^p(\delta_N, t)dt = \sum_{\nu=1}^{2N} \Phi_i(\alpha_\nu), \quad i = \overline{1, m}, \tag{12}$$

где $\Phi_i(t) = \int\limits_0^t \varphi_i^p(u)du,\ i = \overline{1, m},\ 0 \leqslant t \leqslant b - a,\ 1 \leqslant p < \infty.$

Покажем, что $\Phi_i(t)$ $(i = \overline{1, m})$ являются выпуклыми вниз на отрезке $[0, b - a]$ функциями. В самом деле, для любых двух точек $t^{'}, t^{''} \in [0, b - a]$ таких, что $t^{'} < t^{''}$, имеем

$$\Phi_i(t^{'}) + \Phi_i(t^{''}) - 2\Phi_i\left(\frac{t^{'} + t^{''}}{2}\right) = \int\limits_{(t^{'}+t^{''})/2}^{t^{''}} \varphi_i^p(u)du - \int\limits_{t^{'}}^{(t^{'}+t^{''})/2} \varphi_i^p(u)du \geqslant$$

$$\geqslant \varphi_i^p\left(\frac{t^{'} + t^{''}}{2}\right) \cdot \frac{t^{''} - t^{'}}{2} - \varphi_i^p\left(\frac{t^{'} + t^{''}}{2}\right) \cdot \frac{t^{''} - t^{'}}{2} = 0.$$

В силу неравенства Иенсена для выпуклых вниз функций (см., напр., [15, с. 92]) имеем

$$\sum_{\nu=1}^{2N} \Phi_i(\alpha_\nu) \geqslant 2N\Phi_i\left(\frac{1}{2N}\sum_{\nu=1}^{2N} \alpha_\nu\right) = 2N\Phi_i\left(\frac{b - a}{2N}\right) = 2N \int\limits_0^{(b-a)/(2N)} \varphi_i^p(u)du. \tag{13}$$

Из равенства (12) в силу неравенства (13) получаем

$$\int\limits_a^b \mu_i^p(\delta_N, t)dt \geqslant 2N \int\limits_0^{(b-a)/(2N)} \varphi_i^p(u)du,$$

а последнее соотношение в связи с (11) эквивалентно требуемому неравенству (10), откуда и вытекает утверждение леммы.

Применяя доказанную лемму к правой части (9), сразу получаем

$$\mathcal{E}_N(H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}; \rho_2)_p = \mathcal{E}(H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}; \bar{\Delta}_N, \rho_2)_p =$$
$$= 2\sum_{i=1}^m \left\{2N \int\limits_0^{L/(2N)} \omega_i^p(t)dt\right\}^{1/p} = 2(2N)^{1/p} \sum_{i=1}^m \left\{\int\limits_0^{L/(2N)} \omega_i^p(t)dt\right\}^{1/p},\ 1 \leq p < \infty,$$

откуда и следует требуемое равенство (6), чем и завершаем доказательство теоремы 1.

Следствие 1. *В условиях теоремы 1 справедливы равенства*

$$\mathcal{E}_N(H^{m,\omega}; \rho_1)_p = 2\left(2Nm \int\limits_0^{L/(2N)} \omega^p(t)dt\right)^{1/p},$$

$$\mathcal{E}_N(H^{m,\omega};\rho_2)_p = 2m\left(2N\int\limits_0^{L/(2N)}\omega^p(t)dt\right)^{1/p},$$

$$\mathcal{E}_N(H^{m,\omega};\rho_3)_p = 2\left(2N\int\limits_0^{L/(2N)}\omega^p(t)dt\right)^{1/p}.$$

Следующая теорема в определенном смысле является обобщением и распространением известного результата В. Ф. Сторчая [16] об отклонении ломаных в метрике $L_p[0,1], 1 \leqslant p < \infty$, на случай отклонения пространственных кривых от вписанных в них интерполяционных ломаных в метрике $L_p[0,L],\ 1 \leqslant p < \infty$.

Теорема 2. *Пусть* Γ_N *— вписанная в кривой* $\Gamma \subset H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$ *ломаная с вершинами в точках* $P_k := P(\varphi_1(kh),\ldots,\varphi_m(kh)), k = \overline{0,N}, h = L/N$, *соответствующих разбиению* $\bar{\Delta}_N = \{\bar{t}_k : \bar{t}_k = kL/N\}_{k=0}^N$ *отрезка* $[0,L]$. *В предположении, что* $\omega_i(t)$ $(i = \overline{1,m},\ 0 \leqslant t \leqslant L)$ *— выпуклые модули непрерывности, справедливы равенства*

$$\mathcal{E}(H^{\omega_1,\ldots,\omega_m},\bar{\Delta}_N;\rho_1)_p = \left(2N\sum_{i=1}^m\int\limits_0^{L/(2N)}\omega_i^p(t)dt\right)^{1/p}, \tag{14}$$

$$\mathcal{E}(H^{\omega_1,\ldots,\omega_m},\bar{\Delta}_N;\rho_2)_p = \sum_{i=1}^m\left(2N\int\limits_0^{L/(2N)}\omega_i^p(t)dt\right)^{1/p}, \tag{15}$$

$$\mathcal{E}(H^{\omega_1,\ldots,\omega_m},\bar{\Delta}_N;\rho_3)_p = \max_{1\leqslant i\leqslant m}\left(2N\int\limits_0^{L/(2N)}\omega_i^p(t)dt\right)^{1/p}. \tag{16}$$

Доказательство. Как и при доказательстве предыдущей теоремы, не ограничивая общности, приводим доказательство только соотношения (14). Очевидно, параметрическое уравнение звена ломаной Γ_N, соединяющей точки P_k и P_{k+1}, имеет вид

$$l(\varphi_i;t) = \varphi_i(\bar{t}_k) + (t-\bar{t}_k)h^{-1}[\varphi_i(\bar{t}_{k+1}) - \varphi_i(\bar{t}_k)],\quad i = \overline{1,m}, \tag{17}$$

где $\bar{t}_k \leqslant t \leqslant \bar{t}_{k+1}$. Используя представление (17), для $t \in [\bar{t}_k,\bar{t}_{k+1}]$ запишем

$$\varphi_i(t) - l(\varphi_i;t) = (\bar{t}_{k+1}-t)h^{-1}[\varphi_i(t) - \varphi_i(\bar{t}_k)] + (t-\bar{t}_k)h^{-1}[\varphi_i(t) - \varphi_i(\bar{t}_{k+1})]. \tag{18}$$

В [16] доказано, что при любом $t \in [\bar{t}_k,\bar{t}_{k+1}]$ имеет место неравенство

$$\int\limits_{\bar{t}_k}^{\bar{t}_{k+1}}|\varphi_i(t) - l(\varphi_i;t)|^p dt \leqslant 2\int\limits_0^{L/(2N)}\omega_i^p(t)dt,\quad 1 \leqslant p \leqslant \infty. \tag{19}$$

Пользуясь неравенством (19), получаем

$$\rho_1(\Gamma, \Gamma_N; \bar{\Delta}_N)_p = \left\{ \sum_{i=1}^m \int_0^L |\varphi_i(t) - l(\varphi_i; t)|^p dt \right\}^{1/p} =$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k^\circ}^{t_{k+1}^\circ} |\varphi_i(t) - l(\varphi_i; t)|^p dt \right\}^{1/p} \leqslant \left\{ 2N \sum_{i=1}^m \int_0^{L/(2N)} \omega_i^p(t) dt \right\}^{1/p}. \quad (20)$$

Докажем, что существует кривая $\Gamma \subset H^{\omega_1, \dots, \omega_m}$, для которой неравенство (20) обращается в равенство. Пусть Γ^* — кривая, координатные функции которой определены на отрезке $[0, L]$ равенствами

$$\varphi_i^*(t) = \begin{cases} \omega_i(t - \bar{t}_k), & \bar{t}_k \leqslant t \leqslant \bar{t}_k + L/(2N), \\ \omega_i(\bar{t}_{k+1} - t), & \bar{t}_k + L/(2N) \leqslant t \leqslant \bar{t}_{k+1}, \ k = \overline{0, N-1}, \ i = \overline{1, m}, \end{cases}$$

где $\omega_i(t)$ — выпуклые вверх модули непрерывности на отрезке $[0, L]$. Очевидно, что кривая $\Gamma^* \in H^{\omega_1, \dots, \omega_m}$. Поскольку $\varphi_i^*(\bar{t}_k) = 0$, $k = \overline{0, N-1}$, $i = \overline{1, m}$, то $l(\varphi_i^*, \bar{t}_k) = 0$, $k = \overline{0, N-1}$, $i = \overline{1, m}$, а потому имеем

$$\rho_1(\Gamma^*, \Gamma_N^*; \bar{\Delta}_N)_p = \left\{ \sum_{i=1}^m \int_0^L |\varphi_i^*(t) - l(\varphi_i^*, \bar{t}_k)|^p dt \right\}^{1/p} = \left\{ \sum_{i=1}^m \int_0^L |\varphi_i^*(t)|^p dt \right\}^{1/p} =$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\bar{t}_k}^{\bar{t}_{k+1}} |\varphi_i^*(t)|^p dt \right\}^{1/p} = \left\{ 2N \sum_{i=1}^m \int_0^{L/(2N)} \omega_i^p(t) dt \right\}^{1/p}, \ 1 \leqslant p \leqslant \infty,$$

откуда и следует равенство (14), чем и завершаем доказательство теоремы 2.

Из доказанной теоремы 2 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2. *В условиях теоремы 2 имеют место равенства*

$$\mathcal{E}_N(H^{m,\omega}; \rho_1)_p = \left\{ 2mN \int_0^{L/(2N)} \omega^p(t) dt \right\}^{1/p},$$

$$\mathcal{E}_N(H^{m,\omega}; \rho_2)_p = m \left\{ 2N \int_0^{L/(2N)} \omega^p(t) dt \right\}^{1/p},$$

$$\mathcal{E}_N(H^{m,\omega}; \rho_3)_p = \left\{ 2N \int_0^{L/(2N)} \omega^p(t) dt \right\}^{1/p}.$$

В частности, если $\omega(t) = Kt^\alpha$, $0 < \alpha \leqslant 1$, $K > 0$, то при всех $1 \leqslant p < \infty$ имеют место равенства

$$\mathcal{E}_N(KH^{m,\alpha}; \rho_1)_p = \frac{K(mL)^{1/p}}{\sqrt[p]{\alpha p + 1}} \left(\frac{L}{2N} \right)^\alpha,$$

$$\mathcal{E}_N(KH^{m,\alpha};\rho_2)_p = \frac{mK(L)^{1/p}}{\sqrt[p]{\alpha p+1}}\left(\frac{L}{2N}\right)^{\alpha},$$

$$\mathcal{E}_N(KH^{m,\alpha};\rho_3)_p = \frac{K(L)^{1/p}}{\sqrt[p]{\alpha p+1}}\left(\frac{L}{2N}\right)^{\alpha}.$$

Автор благодарит рецензента за ценные замечания.

Литература

1. *Шабозов М. Ш., Шабозова А. А.* Приближение кривых ломаными // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2013. Вып. 2. С. 68–76.

2. *Шабозова А. А.* К полигональной интерполяции кривых в пространстве $\mathbb{R}^m$ // Известия ТулГУ. 2015. № 4. С. 107–112.

3. *Малоземов В. Н.* Об отклонении ломаных // Вестн. Ленингр. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 1966. Вып. 2. С. 150–153.

4. *Малоземов В. Н.* К полигональной интерполяции // Матем. заметки. 1967. Т. 1, № 5. С. 537–540.

5. *Мартынюк В. Т.* О приближении ломаными кривых, заданных параметрическими уравнениями // Укр. мат. журнал. 1976. Т. 28, № 1. С. 87–92.

6. *Мартынюк В. Т.* Некоторые вопросы приближения линий и поверхностей. В кн.: Теория приближения функций. М.: Наука, 1987. С. 282–287.

7. *Назаренко Н. А.* О приближении плоских кривых параметрическими эрмитовыми сплайнами // Геометрическая теория функций и топология. Киев: ИМ АН УССР. 1981. С. 55–62.

8. *Вакарчук С. Б.* О приближении кривых, заданных в параметрическим виде, при помощи сплайн-кривых // Укр. мат. журнал. 1983. Т. 35, № 3. С. 352–355.

9. *Вакарчук С. Б.* Точные константы приближения плоских кривых полиномиальными кривыми и ломаными // Изв. вузов. Матем. 1988. № 2. С. 14–19.

10. *Корнейчук Н. П.* Об оптимальном кодировании вектор-функций // Укр. мат. журнал. 1988. Т. 40, № 6. С. 737–743.

11. *Корнейчук Н. П.* Приближение и оптимальное кодирование гладких плоских кривых // Укр. мат. журнал. 1989. Т. 41, № 4. С. 492–499.

12. *Сендов Б.* Хаусдорфовые приближения. София: Изд-во Болгарской АН, 1979. 372 с.

13. *Завъялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.

14. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. М.: Наука, 1987. 424 с.

15. *Харди Г., Литтльвуд Дж., Полиа Г.* Неравенства. М.: Изд-во иностр. литературы, 1948. 456 с.

16. *Сторчай В. Ф.* Об отклонении ломаных в метрике L_p // Матем. заметки. 1969. Т. 5, № 1. С. 21–25.

Статья поступила в редакцию 7 апреля 2017 г.; рекомендована в печать 22 июня 2017 г.

Сведения об авторе

Шабозова Адолат Азамовна — adolat@mail.ru

APPROXIMATION OF CURVES BY BROKEN LINES IN L_p

Adolat A. Shabozova

Tajik National University, pr. Rudaki, Dushanbe, 17, Tajikistan; adolat@mail.ru

In this paper was found the exact values of upper bounds deviation in $L_p[0, L]$ $(1 \leqslant p < \infty)$ metrics of curve Γ, defined by parametric equations in n-dimensional space of inscribed in its at the points $t_k = kL/N, k = \overline{0, N}$ a broken line on the $H^{\omega_1,\cdots,\omega_m}$ class given both as an arbitrary or convex modulus of continuity $\omega_i(t)$, $i = \overline{1, m}$. The problem of finding the upper bounds of deviation of parametric given curves $\Gamma, G \in H^{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_m}$ coordinate functions $\varphi_i(t)$ and $\psi_i(t)$ $(i = \overline{1, m})$ of which respectively belong to the class $H^{\omega_i}[0, L]$ $(i = \overline{1, m})$ intersect in N $(N \geq 2)$ points of the partition to the segment $[0, L]$.

The obtained results are generalizations of the result of V. F. Storchai on the approximation of continuous functions by interpolation polygonal lines in the metric of the space $L_p[0, L]$ $(1 \le p \le \infty)$. Refs 16.

Keywords: extreme problems, approximation theory, parametrically defined curves, interpolation polygonal lines, modulus of continuity, convex moduli of continuity.

References

1. Shabozov M. Sh., Shabozova A. A., "Approximation of curves by broken lines", *Vestnik St. Petersburg University. Ser. 1*, issue 2, 68–76 (2013) [in Russian].

2. Shabozova A. A., "About the polygonal interpolation of curves in $\mathbb{R}^m$ space", *Collection of scientific papers, Proceedings of the TSU* (4), 107–112 (2015) [in Russian].

3. Malozemov V. N., "On the deviation of broken lines", *Vestnik Leningrad. Univ. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, issue 2, 150–153 (1966) [in Russian].

4. Malozemov V. N., "Polygonal interpolation", *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR* **1**(5), 355–357 (1967). https://doi.org/10.1007/BF01094071

5. Martynyuk V. T., "Approximation by polygonal lines of curves given by parametric equations in the Hausdorff metric", *Ukr. Math. J.* **28**(1), 68–72 (1976). https://doi.org/10.1007/BF01559232

6. Martynyuk V. T., *Some questions of approaching lines and surfaces.* In: *Theory of approximation of functions* (Nauka Publ., Moscow, 1987, 282–287) [in Russian].

7. Nazarenko N. A., *On the approximation of plane curves by parametric Hermitian splines.* In: *Geometric theory of functions and topology* (Institute of Mathematics of the Ukrainian SSR, Kiev, 1981, 55–62) [in Russian].

8. Vakarchuk S. B., "Approximation by spline-curves of curves given in parametric form", *Ukr. Math. J.* **35**(3), 303–306 (1983). https://doi.org/10.1007/BF01092180

9. Vakarchuk S. B., "The exact constants of the approximation of plane curves by polynomial curves and broken lines", *Soviet Math. (Iz. VUZ)* **32**(2), 19–26 (1988).

10. Korneichuk N. P., "On optimal coding of vector functions", *Ukr. Math. J.* **40**(6), 621–627 (1988). https://doi.org/10.1007/BF01057180

11. Korneichuk N. P., "Approximation and optimal coding of smooth plane curves", *Ukr. Math. J.* **41**(4), 492–499 (1989) [in Russian].

12. Sendov B., *Hausdorff approximations* (Publishing House of the Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, 1979, 372 p.) [in Russian].

13. Zavyalov Yu. S., Kvasov B. I., Miroshnichenko V. L., *Methods of spline functions* (Nauka Publ., Moscow, 1980, 352 p.) [in Russian].

14. Korneichuk N. P., *Exact constant in theory approximations* (Nauka Publ., Moscow, 1987, 424 p.) [in Russian].

15. Hardy G. G., Littlewood J. E., Polya G., *Inequality* (Cambridge University Press, 1948, 456 p.).

16. Storchay V. F., "On the deviation of polygonal lines in the L_p metric", *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR* **5**(1), 21–25 (1969). https://doi.org/10.1007/BF01098710

Для цитирования: *Шабозова А. А.* Приближение кривых ломаными в L_p // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 4. С. 622–630.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.410

For citation: Shabozova A. A. Approximation of curves by broken lines in L_p. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2017, vol. 4 (62), issue 4, pp. 622–630.
https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.410