2017 ВЕСТНИК САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА Т. 4 (62). Вып. 4
МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. АСТРОНОМИЯ

МЕХАНИКА

УДК 517.925.51:517.93:531.36
MSC 93C10, 34H15

СТАБИЛИЗАЦИЯ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА В УСЛОВИЯХ УБЫВАЮЩЕЙ ДИССИПАЦИИ*

А. Ю. Александров, А. А. Тихонов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

В статье рассматривается задача трехосной стабилизации углового положения тела. Ставится вопрос о возможности реализации такой системы управления, в которой диссипативный момент стремится к нулю с течением времени, а в качестве управляющего остается лишь восстанавливающий момент. Рассматриваемый в работе случай исчезающего демпфирования известен как наиболее сложный в проблеме анализа устойчивости механических систем с нестационарным параметром при векторе диссипативных сил. Доказана лемма об оценке снизу нормы восстанавливающего момента в окрестности стабилизируемого движения твердого тела, а также две теоремы об асимптотической устойчивости стабилизируемого движения тела. Показано, что найденные в теоремах достаточные условия асимптотической устойчивости близки к необходимым. Приведены результаты численного моделирования, иллюстрирующие выводы, полученные в работе. Библиогр. 23 назв. Ил. 2.

Ключевые слова: трехосная стабилизация, вращательное движение, диссипация, эволюция, асимптотическая устойчивость.

1. Введение. В задачах управления вращательным движением тела относительно его центра масс восстанавливающие моменты, как правило, являются основой механизма функционирования системы управления. Однако стабилизация углового положения тела невозможна без демпфирующих моментов, обеспечивающих погашение собственных колебаний тела в окрестности устойчивого положения равновесия. В связи с этим, как отмечается в [1], выбор способа создания демпфирующего момента и разработка конкретного механизма демпфирования является одной из основных задач, которые необходимо решить при практической реализации систем ориентации тела. Кроме того, в связи с ограниченностью ресурсов реактивных систем управления, возникает закономерный вопрос о возможности реализации таких систем управления, в которых диссипативный момент стремится к нулю с течением времени.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 16-01-00587-а, № 16-08-00997-а, № 17-01-00672-а).

Более общая постановка проблемы предполагает, что имеется механическая система с асимптотически устойчивым положением равновесия, причем диссипативные силы, присутствующие в системе, эволюционируют с течением времени, что выражается в появлении при векторе этих сил скалярного множителя $h(t)$, заданного при всех $t \geqslant 0$. Ставится вопрос о сохранении асимптотической устойчивости положения равновесия, несмотря на эволюцию диссипативных сил.

Проблема анализа устойчивости механических систем с нестационарным параметром при векторе диссипативных сил рассматривалась во многих работах (см., например, [2–8] и цитируемую там литературу). В [5] отмечалось, что случай исчезающего демпфирования, соответствующий $h(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, является наиболее сложным, а известные для него результаты получены, в основном, для механических систем с одной степенью свободы.

Ряд условий асимптотической устойчивости положения равновесия механических систем произвольной размерности, находящихся под действием потенциальных, гироскопических и исчезающих со временем диссипативных сил, установлен в работах [9–11]. В [11] также решена задача об одноосной стабилизации твердого тела при вышеуказанных условиях.

Данная работа продолжает исследования, начатые в [9–11], и посвящена решению не рассматривавшейся ранее задачи трехосной стабилизации твердого тела в условиях исчезающего со временем диссипативного момента.

2. Постановка задачи. Рассмотрим твердое тело, вращающееся вокруг центра масс — точки O — с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Будем считать, что с телом связаны главные центральные оси инерции $Oxyz$. Уравнения вращательного движения тела под действием управляющего момента M имеют вид

$$J\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times J\vec{\omega} = \vec{M}, \tag{1}$$

где $J = \mathrm{diag}\{A, B, C\}$ — тензор инерции тела в осях $Oxyz$.

Пусть заданы две правые тройки взаимно ортогональных ортов $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$, $\vec{s}_3$ и $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$. Орты $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3$ занимают неизменное положение в инерциальном пространстве, а орты $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ — неизменное положение в твердом теле. Тогда векторы $\vec{s}_i$ вращаются по отношению к системе $Oxyz$ с угловой скоростью $-\vec{\omega}$. Следовательно, можем записать

$$\dot{\vec{s}}_i = -\vec{\omega} \times \vec{s}_i, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{2}$$

Таким образом, будем рассматривать систему, состоящую из динамических уравнений Эйлера (1) и кинематических уравнений Пуассона (2).

Предположим, что момент $\vec{M}$ складывается из диссипативной составляющей $\vec{M}_d$ и восстанавливающей составляющей $\vec{M}_r$: $\vec{M} = \vec{M}_d + \vec{M}_r$.

Диссипативный момент будем считать заданным формулой $\vec{M}_d = -\mathrm{grad}W(\vec{\omega})$, где $W(\vec{\omega})$ — непрерывно дифференцируемая при $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$ положительно определенная однородная порядка $\mu + 1$ функция, $\mu \geqslant 1$.

Замечание 1. В настоящей статье, согласно [12], функцию $W(\vec{\omega})$ будем называть *однородной порядка* $\mu + 1$, если для любых $\lambda > 0$ и $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$ имеет место равенство $W(\lambda\vec{\omega}) = \lambda^{\mu+1}W(\vec{\omega})$. Отметим, что в ряде работ (см., например, [13]) для функций, обладающих указанным свойством, используется термин «положительная однородность».

Восстанавливающий момент $\vec{M}_r$ требуется выбрать так, чтобы с помощью момента $\vec{M}$ обеспечить трехосную стабилизацию твердого тела [14]: система уравнений (1), (2) должна иметь асимптотически устойчивое положение равновесия

$$\vec{\omega} = \vec{0}, \qquad \vec{s}_i = \vec{r}_i, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{3}$$

Известно [14, 15], что для решения задачи трехосной стабилизации восстанавливающий момент можно определить по формуле

$$\vec{M}_r = -a_1 \vec{s}_1 \times \vec{r}_1 - a_2 \vec{s}_2 \times \vec{r}_2,$$

где a_1 и a_2 — положительные постоянные. К такому же виду сводится восстанавливающий момент и при электродинамической стабилизации тела [16–20].

Рассмотрим теперь случай, когда диссипативный момент эволюционирует со временем, что выражается в появлении скалярного множителя $h(t)$: $\vec{M}_d = -h(t)\mathrm{grad}W(\vec{\omega})$. Таким образом, система (1) принимает вид

$$J\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times J\vec{\omega} = -h(t)\mathrm{grad}W(\vec{\omega}) - a_1 \vec{s}_1 \times \vec{r}_1 - a_2 \vec{s}_2 \times \vec{r}_2. \tag{4}$$

Будем считать, что $h(t)$ — положительная и непрерывно дифференцируемая при $t \geqslant 0$ функция.

Из результатов, полученных в [14, 15], следует, что если существуют числа $h_1 > 0$ и $h_2 > 0$, для которых при $t \geqslant 0$ справедливы оценки $h_1 \leqslant h(t) \leqslant h_2$, то положение равновесия (3) системы (2), (4) асимптотически устойчиво.

В работе [5] отмечалось, что представляет интерес исследование наиболее радикальных типов эволюции, соответствующих случаям или исчезающих, или неограниченно возрастающих со временем диссипативных моментов. В настоящей статье рассмотрим случай, когда

$$h(t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty. \tag{5}$$

Требуется определить условия, при выполнении которых положение равновесия (3) системы (2), (4) будет асимптотически устойчивым, несмотря на то, что диссипативный момент стремится к нулю при возрастании времени.

3. Вспомогательный результат. В работах [15, 17, 19, 20] для решения задачи трехосной стабилизации в случае не зависящего от времени диссипативного момента использовались параметры Родрига—Гамильтона. Однако применение такого подхода для систем с эволюционирующим со временем диссипативным моментом является недостаточно эффективным и приводит к довольно громоздким выкладкам. В связи с этим в настоящей статье вместо введения параметров Родрига—Гамильтона будет использоваться следующий результат.

Лемма 1. *Пусть заданы положительные постоянные a_1 и a_2. Тогда для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ существует число $\delta > 0$ такое, что*

$$\|a_1(\vec{r}_1 \times \vec{s}_1) + a_2(\vec{r}_2 \times \vec{s}_2)\|^2 \geqslant \varepsilon \left(a_1^2\|\vec{r}_1 - \vec{s}_1\|^2 + a_2^2\|\vec{r}_2 - \vec{s}_2\|^2\right) \tag{6}$$

при $\|\vec{s}_1 - \vec{r}_1\|^2 + \|\vec{s}_2 - \vec{r}_2\|^2 < \delta^2$ (здесь и далее $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора).

Доказательство. Имеют место равенства

$$\|a_1\vec r_1\times\vec s_1+a_2\vec r_2\times\vec s_2\|^2=\|a_1\vec r_1\times\vec\rho_1+a_2\vec r_2\times\vec\rho_2\|^2=$$
$$=a_1^2\|\vec\rho_1\|^2\sin^2\theta_1+a_2^2\|\vec\rho_2\|^2\sin^2\theta_2+2a_1a_2(\vec r_1\times\vec\rho_1)^\top(\vec r_2\times\vec\rho_2)=$$
$$=a_1^2\|\vec\rho_1\|^2\left(1-\frac14\|\vec\rho_1\|^2\right)+a_2^2\|\vec\rho_2\|^2\left(1-\frac14\|\vec\rho_2\|^2\right)+2a_1a_2(\vec r_1\times\vec\rho_1)^\top(\vec r_2\times\vec\rho_2). \quad (7)$$

Здесь $\vec\rho_1=\vec r_1-\vec s_1$, $\vec\rho_2=\vec r_2-\vec s_2$, θ_1 — угол между векторами $\vec r_1$ и $\vec\rho_1$, θ_2 — угол между векторами $\vec r_2$ и $\vec\rho_2$.

В случае, когда $\vec s_1=\vec r_1$ или $\vec s_2=\vec r_2$, утверждение леммы очевидно, поэтому далее будем считать, что $\vec s_1\neq\vec r_1$ и $\vec s_2\neq\vec r_2$.

Рассмотрим малый плоский поворот системы координат, связанной с телом, из начального положения, определяемого ортами $\vec r_1$, $\vec r_2$, $\vec r_3$, в новое положение, определяемое ортами $\vec s_1$, $\vec s_2$, $\vec s_3$, вокруг оси конечного поворота, задаваемого ортом $\vec n$. Малый угол плоского поворота тела обозначим φ.

Пусть χ_1 — угол между векторами $\vec n$ и $\vec r_1$, а χ_2 — угол между векторами $\vec n$ и $\vec r_2$. Получим

$$\|\vec\rho_1\|=2\left|\sin\chi_1\sin\frac{\varphi}{2}\right|,\qquad \|\vec\rho_2\|=2\left|\sin\chi_2\sin\frac{\varphi}{2}\right|. \quad (8)$$

Вектор $\vec\rho_1$ ортогонален векторам $\vec n$ и $\vec r_1+\vec s_1$, поэтому существует число λ такое, что

$$\vec\rho_1=\lambda(\vec r_1+\vec s_1)\times\vec n.$$

Нетрудно проверить, что $\lambda=\operatorname{tg}(\varphi/2)$. Значит, можем записать

$$\vec\rho_1=2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}(\vec r_1\times\vec n)-\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}(\vec\rho_1\times\vec n).$$

Аналогичным образом получаем равенство

$$\vec\rho_2=2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}(\vec r_2\times\vec n)-\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}(\vec\rho_2\times\vec n).$$

Представим вектор $\vec n$ в виде $\vec n=c_1\vec r_1+c_2\vec r_2+c_3\vec r_3$, где c_1,c_2,c_3 — постоянные коэффициенты.

Тогда будем иметь

$$\vec r_1\times\vec n=c_2\vec r_3-c_3\vec r_2,\qquad \vec r_2\times\vec n=-c_1\vec r_3+c_3\vec r_1,$$

$$(\vec r_1\times\vec\rho_1)^\top(\vec r_2\times\vec\rho_2)=\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}(\vec r_1\times(2(\vec r_1\times\vec n)-(\vec\rho_1\times\vec n)))^\top(\vec r_2\times(2(\vec r_2\times\vec n)-(\vec\rho_2\times\vec n)))\geqslant$$
$$\geqslant 4\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\left(\vec r_1\times(\vec r_1\times\vec n)\right)^\top\left(\vec r_2\times(\vec r_2\times\vec n)\right)-\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\left(2\|\vec\rho_1\|+2\|\vec\rho_2\|+\|\vec\rho_1\|\|\vec\rho_2\|\right)=$$
$$=4\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\left(\vec r_1\times(c_2\vec r_3-c_3\vec r_2)\right)^\top\left(\vec r_2\times(c_3\vec r_1-c_1\vec r_3)\right)-\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\left(2\|\vec\rho_1\|+2\|\vec\rho_2\|+\|\vec\rho_1\|\|\vec\rho_2\|\right)=$$
$$=4\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}c_3^2-\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\left(2\|\vec\rho_1\|+2\|\vec\rho_2\|+\|\vec\rho_1\|\|\vec\rho_2\|\right).$$

Используя равенства (7), приходим к оценке

$$\|a_1\vec r_1\times\vec s_1+a_2\vec r_2\times\vec s_2\|^2\geqslant a_1^2\|\vec\rho_1\|^2\left(1-\frac14\|\vec\rho_1\|^2\right)+a_2^2\|\vec\rho_2\|^2\left(1-\frac14\|\vec\rho_2\|^2\right)-$$
$$-2a_1a_2\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\left(2\|\vec\rho_1\|+2\|\vec\rho_2\|+\|\vec\rho_1\|\|\vec\rho_2\|\right).$$

Учитывая соотношения (8), получаем

$$\frac{\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}{\|\vec{\rho}_1\|+\|\vec{\rho}_2\|}\to 0 \quad \text{при} \quad \|\vec{\rho}_1\|+\|\vec{\rho}_2\|\to 0.$$

Значит, для любого $\varepsilon\in(0,1)$ положительное число δ можно выбрать так, чтобы при $\|\vec{s}_1-\vec{r}_1\|^2+\|\vec{s}_2-\vec{r}_2\|^2<\delta^2$ выполнялось неравенство (6). Лемма доказана.

4. Линейные диссипативные силы. Рассмотрим сначала случай, когда функция $W(\omega)$ представляет собой квадратичную форму $W(\vec{\omega})=\vec{\omega}^\top D\vec{\omega}$ с постоянной симметричной положительно определенной матрицей D. Тогда уравнения (4) будут иметь вид

$$J\dot{\vec{\omega}}+\vec{\omega}\times J\vec{\omega}=-2h(t)D\vec{\omega}-a_1\vec{s}_1\times\vec{r}_1-a_2\vec{s}_2\times\vec{r}_2. \tag{9}$$

Теорема 1. *Пусть справедливо предельное соотношение* (5). *Если существует число* $\nu\geqslant 1$ *такое, что*

$$|\dot{h}(t)|\leqslant Lh^{\frac{3-\nu}{2}}(t) \quad \textit{при} \quad t\geqslant 0, \quad L=\mathrm{const}>0, \tag{10}$$

$$\int\limits_0^t h^\nu(\tau)d\tau\to+\infty \quad \textit{при} \quad t\to+\infty, \tag{11}$$

то положение равновесия (3) *системы* (2), (9) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. В качестве функции Ляпунова выбираем

$$V=\frac{1}{2}\vec{\omega}^\top J\vec{\omega}+\frac{a_1}{2}\|\vec{s}_1-\vec{r}_1\|^2+\frac{a_2}{2}\|\vec{s}_2-\vec{r}_2\|^2+\gamma h^\nu(t)\vec{\omega}^\top J\vec{\eta}.$$

Здесь γ — положительный параметр, $\vec{\eta}=a_1\vec{s}_1\times\vec{r}_1+a_2\vec{s}_2\times\vec{r}_2$.

Если величина γ достаточно мала, то справедливы оценки

$$\alpha_1\left(\|\vec{\omega}\|^2+\|\vec{s}_1-\vec{r}_1\|^2+\|\vec{s}_2-\vec{r}_2\|^2\right)\leqslant V\leqslant\alpha_2\left(\|\vec{\omega}\|^2+\|\vec{s}_1-\vec{r}_1\|^2+\|\vec{s}_2-\vec{r}_2\|^2\right),$$

где α_1 и α_2 — положительные постоянные.

Дифференцируя функцию V в силу системы (2), (9), получаем

$$\dot{V}=-2h(t)\vec{\omega}^\top D\vec{\omega}+\gamma\nu h^{\nu-1}(t)\dot{h}(t)\vec{\omega}^\top J\vec{\eta}+$$
$$+\gamma h^\nu(t)\vec{\eta}^\top\left(-\vec{\omega}\times J\vec{\omega}-2h(t)D\vec{\omega}-\vec{\eta}\right)-\gamma h^\nu(t)\vec{\omega}^\top J\left(a_1(\vec{\omega}\times\vec{s}_1)\times\vec{r}_1+a_2(\omega\times\vec{s}_2)\times\vec{r}_2\right).$$

Используя лемму 1, нетрудно показать существование положительных чисел α_3, α_4, α_5, α_6 и δ_1 таких, что

$$\dot{V}\leqslant-\alpha_3h(t)\|\vec{\omega}\|^2-\gamma\alpha_4h^\nu(t)\left(\|\vec{s}_1-\vec{r}_1\|^2+\|\vec{s}_2-\vec{r}_2\|^2\right)+\gamma\alpha_5h^\nu(t)\|\vec{\omega}\|^2+$$
$$+\gamma\alpha_6\left(\|\vec{s}_1-\vec{r}_1\|+\|\vec{s}_2-\vec{r}_2\|\right)\left(h^{\nu-1}(t)\dot{h}(t)\|\vec{\omega}\|+h^\nu(t)\|\vec{\omega}\|^2+h^{\nu+1}(t)\|\vec{\omega}\|\right)$$

при $t\geqslant 0$, $\vec{\omega}\in\mathbb{R}^3$, $\|\vec{s}_1-\vec{r}_1\|^2+\|\vec{s}_2-\vec{r}_2\|^2<\delta_1^2$.

Если справедлива оценка (10), то при достаточно малых значениях $\gamma>0$ и $\delta_2>0$ для функции V в области $t\geqslant 0$, $\|\vec{\omega}\|^2+\|\vec{s}_1-\vec{r}_1\|^2+\|\vec{s}_2-\vec{r}_2\|^2<\delta_2^2$ имеет место дифференциальное неравенство

$$\dot{V}\leqslant-\alpha_7h^\nu(t)V, \tag{12}$$

где $\alpha_7=\mathrm{const}>0$.

Интегрируя неравенство (12), получаем, что если решение $\left(\vec{\omega}^\top(t), \vec{s}_1^\top(t), \vec{s}_2^\top(t)\right)^\top$ системы (2), (9) начинается при $t = t_0 \geqslant 0$ в достаточно малой окрестности положения равновесия, то при всех $t \geqslant t_0$ имеем

$$\alpha_1 \left(\|\vec{\omega}(t)\|^2 + \|\vec{s}_1(t) - \vec{r}_1\|^2 + \|\vec{s}_2(t) - \vec{r}_2\|^2\right) \leqslant \widehat{V}(t) \leqslant \widehat{V}(t_0) \exp\left(-\alpha_7 \int\limits_{t_0}^{t} h^\nu(\tau) d\tau\right).$$

Здесь $\widehat{V}(t) = V(t, \vec{\omega}(t), \vec{s}_1(t), \vec{s}_2(t))$.

Учитывая условие (11), получаем, что положение равновесия (3) асимптотически устойчиво. Теорема доказана.

Следствие 1. *Если*

$$h(t) = (t+1)^{-\beta}, \tag{13}$$

где $\beta = \mathrm{const} > 0$*, то при выполнении неравенства*

$$\beta \leqslant 1 \tag{14}$$

положение равновесия (3) *системы* (2), (9) *асимптотически устойчиво.*

Замечание 2. Можно показать, что если функция $h(t)$ определяется по формуле (13), то неравенство (14) представляет собой не только достаточное, но и необходимое условие асимптотической устойчивости положения равновесия.

Действительно, для функции Ляпунова

$$\widetilde{V} = \frac{1}{2}\vec{\omega}^\top J \vec{\omega} + \frac{a_1}{2}\|\vec{s}_1 - \vec{r}_1\|^2 + \frac{a_2}{2}\|\vec{s}_2 - \vec{r}_2\|^2$$

и ее производной в силу системы (2), (9) при всех $t \geqslant 0$, $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$ и любых допустимых векторах $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$ имеют место оценки

$$\tilde{\alpha}_1 \left(\|\vec{\omega}\|^2 + \|\vec{s}_1 - \vec{r}_1\|^2 + \|\vec{s}_2 - \vec{r}_2\|^2\right) \leqslant \widetilde{V} \leqslant \tilde{\alpha}_2 \left(\|\vec{\omega}\|^2 + \|\vec{s}_1 - \vec{r}_1\|^2 + \|\vec{s}_2 - \vec{r}_2\|^2\right),$$

$$-\tilde{\alpha}_3 (t+1)^{-\beta}\, \widetilde{V} \leqslant \dot{\widetilde{V}} \leqslant 0,$$

где $\tilde{\alpha}_1$, $\tilde{\alpha}_2$, $\tilde{\alpha}_3$ — положительные постоянные.

Значит, положение равновесия устойчиво, и при любых $t_0 \geqslant 0$, $t \geqslant t_0$ выполнено неравенство

$$\widetilde{V}(\vec{\omega}(t), \vec{s}_1(t), \vec{s}_2(t)) \geqslant \widetilde{V}(\vec{\omega}(t_0), \vec{s}_1(t_0), \vec{s}_2(t_0)) \exp\left(-\tilde{\alpha}_3 \int_{t_0}^{t} (\tau+1)^{-\beta} d\tau\right).$$

Следовательно, если $\beta > 1$, то

$$\widetilde{V}(\vec{\omega}(t), \vec{s}_1(t), \vec{s}_2(t)) \geqslant \tilde{c}\, \widetilde{V}(\vec{\omega}(t_0), \vec{s}_1(t_0), \vec{s}_2(t_0)),$$

где $\tilde{c} = \mathrm{const} > 0$.

Таким образом, положение равновесия (3) не является притягивающим.

5. Нелинейные диссипативные силы. Рассмотрим теперь уравнения (4), в которых $W(\vec{\omega})$ представляет собой непрерывно дифференцируемую при $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$ положительно определенную однородную порядка $\mu + 1$ функцию, причем $\mu > 1$. Таким образом, момент диссипативных сил является существенно нелинейным.

Заметим, что модели с существенно нелинейными диссипативными силами применяются для описания широкого класса механических систем (см., например, [21–23] и цитируемую там литературу).

Теорема 2. *Пусть справедливо предельное соотношение* (5)*. Если существует число* $\nu \geqslant 1$ *такое, что*

$$|\dot{h}(t)| \leqslant L h^{1+\frac{1-\nu}{\mu+1}}(t) \quad \text{при } t \geqslant 0, \quad L = \mathrm{const} > 0, \tag{15}$$

и выполнено условие (11)*, то положение равновесия* (3) *системы* (2), (4) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Функцию Ляпунова выбираем в виде

$$V = \frac{1}{2}\vec{\omega}^\top J\vec{\omega} + \frac{a_1}{2}\|\vec{s}_1 - \vec{r}_1\|^2 + \frac{a_2}{2}\|\vec{s}_2 - \vec{r}_2\|^2 + \gamma h^\nu(t)\|\vec{\eta}\|^{\sigma-1}\vec{\omega}^\top J\vec{\eta},$$

где $\gamma > 0$, $\sigma \geqslant 1$, $\vec{\eta} = a_1\vec{s}_1 \times \vec{r}_1 + a_2\vec{s}_2 \times \vec{r}_2$.

При достаточно малых значениях γ в некоторой окрестности положения равновесия и при всех $t \geqslant 0$ справедливы оценки

$$\alpha_1\left(\|\vec{\omega}\|^2 + \|\vec{s}_1 - \vec{r}_1\|^2 + \|\vec{s}_2 - \vec{r}_2\|^2\right) \leqslant V \leqslant \alpha_2\left(\|\vec{\omega}\|^2 + \|\vec{s}_1 - \vec{r}_1\|^2 + \|\vec{s}_2 - \vec{r}_2\|^2\right). \tag{16}$$

Здесь $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ — положительные постоянные.

Продифференцируем функцию V в силу системы (2), (4). С использованием леммы 1 получаем, что положительные числа α_3, α_4, α_5, α_6 и δ_1 можно выбрать так, чтобы при $t \geqslant 0$, $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$, $\|\vec{s}_1 - \vec{r}_1\|^2 + \|\vec{s}_2 - \vec{r}_2\|^2 < \delta_1^2$ имело место неравенство

$$\begin{aligned}\dot{V} \leqslant -\alpha_3 h(t)\|\vec{\omega}\|^{\mu+1} - \gamma\alpha_4 h^\nu(t)\left(\|\vec{s}_1 - \vec{r}_1\|^{\sigma+1} + \|\vec{s}_2 - \vec{r}_2\|^{\sigma+1}\right) + \\ + \gamma\alpha_5 h^\nu(t)\|\vec{\omega}\|^2\left(\|\vec{s}_1 - \vec{r}_1\|^{\sigma-1} + \|\vec{s}_2 - \vec{r}_2\|^{\sigma-1}\right) + \\ + \gamma\alpha_6\left(\|\vec{s}_1 - \vec{r}_1\|^{\sigma} + \|\vec{s}_2 - \vec{r}_2\|^{\sigma}\right)\left(h^{\nu-1}(t)\dot{h}(t)\|\vec{\omega}\| + h^\nu(t)\|\vec{\omega}\|^2 + h^{\nu+1}(t)\|\vec{\omega}\|^\mu\right).\end{aligned}$$

Если $\sigma \geqslant \mu$ и выполнено условие (15), то найдутся положительные числа α_7, α_8, γ_0, δ_2 такие, что при $0 < \gamma < \gamma_0$ в области $t \geqslant 0$, $\|\vec{\omega}\|^2 + \|\vec{s}_1 - \vec{r}_1\|^2 + \|\vec{s}_2 - \vec{r}_2\|^2 < \delta_2^2$ справедливы соотношения

$$\dot{V} \leqslant -\alpha_7\left(h(t)\|\vec{\omega}\|^{\mu+1} + h^\nu(t)\left(\|\vec{s}_1 - \vec{r}_1\|^{\sigma+1} + \|\vec{s}_2 - \vec{r}_2\|^{\sigma+1}\right)\right) \leqslant -\alpha_8 h^\nu(t)V^\lambda,$$

где $\lambda = (\sigma + 1)/2$.

Интегрируя установленное для функции Ляпунова дифференциальное неравенство, получаем, что если решение $\left(\vec{\omega}^\top(t), \vec{s}_1^\top(t), \vec{s}_2^\top(t)\right)^\top$ системы (2), (4) начинается при $t = t_0 \geqslant 0$ в достаточно малой окрестности положения равновесия, то при всех $t \geqslant t_0$ имеет место оценка

$$\widehat{V}(t) \leqslant \widehat{V}(t_0)\left(1 + \alpha_8(\lambda - 1)\widehat{V}^{\lambda-1}(t_0)\int\limits_{t_0}^{t} h^\nu(\tau)d\tau\right)^{-\frac{1}{\lambda-1}}.$$

Здесь $\widehat{V}(t) = V(t, \vec{\omega}(t), \vec{s}_1(t), \vec{s}_2(t))$.

Учитывая условие (11) и неравенство (16), можно сделать вывод, что положение равновесия (3) асимптотически устойчиво. Теорема доказана.

Следствие 2. *Если функция $h(t)$ определяется по формуле* (13)*, то для асимптотической устойчивости положения равновесия* (3) *системы* (2)*,* (4) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство* (14).

6. Результаты численного моделирования. Рассмотрим твердое тело с моментами инерции $A = 5$, $B = 6$, $C = 4$. Пусть $D = \mathrm{diag}\{4, 4, 4\}$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$. Предположим, что тело в начальный момент времени отклонено от положения равновесия так, что соответствующие «самолетные» углы крена, тангажа и рыскания, определяющие ориентацию тела в базовой системе координат, соответственно равны $\varphi(0) = 0.5$, $\theta(0) = 0.5$, $\psi(0) = -0.5$, а проекции угловой скорости на главные центральные оси инерции равны $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0.3$.

Процесс стабилизации твердого тела в базовой системе координат происходит под действием диссипативного и восстанавливающего моментов в соответствии с уравнениями (9). Функцию $h(t)$ будем выбирать из следующих двух вариантов: 1) $h(t) = (1+t)^{-7/8}$, 2) $h(t) = (1+t)^{-8/7}$. В первом случае наблюдается асимптотическая устойчивость стабилизируемого режима движения (рис. 1). Затухание колебаний завершается приблизительно при $t = 200$.

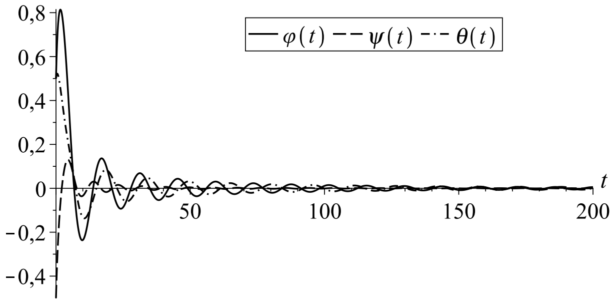

Рис. 1. Случай $h(t) = (1+t)^{-7/8}$.

Во втором случае отсутствует асимптотическая устойчивость стабилизируемого режима движения (рис. 2), однако имеет место устойчивость, и колебания тела остаются ограниченными, что и наблюдается на длительном интервале времени.

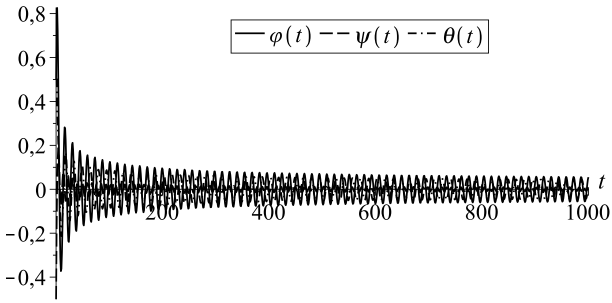

Рис. 2. Случай $h(t) = (1+t)^{-8/7}$.

Таким образом, результаты численного моделирования согласуются с выводами, полученными в работе.

7. Заключение. В работе поставлен вопрос о возможности экономии ресурсов реактивных систем управления путем создания таких систем, в которых диссипативный момент стремится к нулю с течением времени. С математической точки зрения проблема сводится к анализу устойчивости решения дифференциальной системы с нестационарным параметром при диссипативном моменте. При этом интересующий нас случай исчезающего демпфирования является наиболее сложным [5], а известные для него к настоящему времени результаты получены, в основном, для механических систем с одной степенью свободы.

В данной статье рассмотрена система 6-го порядка, возникающая в задаче о трехосной стабилизации твердого тела в условиях исчезающего со временем диссипативного момента. Доказана лемма об оценке снизу нормы восстанавливающего момента в окрестности стабилизируемого движения твердого тела, а также теоремы 1 и 2 об асимптотической устойчивости стабилизируемого движения тела.

Соответствующие следствия 1 и 2 из этих теорем показывают, что найденные в теоремах достаточные условия асимптотической устойчивости близки к необходимым.

Отметим также, что с помощью полученных при доказательствах теорем 1 и 2 дифференциальных неравенств для функций Ляпунова можно оценить время переходных процессов в изучаемых системах.

Литература

1. *Сарычев В. А.* Вопросы ориентации искусственных спутников. В сер.: Итоги науки и техники. Исследование космического пространства. Т. 11. М.: ВИНИТИ АН СССР, 1978. 223 с.

2. *Rouche N., Habets P., Laloy M.* Stability theory by Liapunov's direct method. New York: Springer, 1977. 396 p.

3. *Hatvani L.* On partial asymptotic stability and instability. III. Energy-like Ljapunov functions // Acta Sci. Math. 1985. Vol. 49, N 1–4. P. 157–167.

4. *Srirangarajan H. R., Banait P. J.* Analysis of duffing's oscillator equation with time-dependent parameters // J. Sound Vib. 2000. Vol. 233, N 3. P. 435–440. https://doi.org/10.1006/jsvi.1999.2819

5. *Хатвани Л.* О действии демпфирования на свойства устойчивости равновесий неавтономных систем // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 4. С. 725–732.

6. *Shen Y., Yang S., Liu X.* Nonlinear dynamics of a spur gear pair with time-varying stiffness and backlash based on incremental harmonic balance method // Int. J. Mech. Sci. 2006. Vol. 48, N 11. P. 1256–1263. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2006.06.003

7. *Sun J., Wang O. G., Zhong Q. C.* A less conservative stability test for second-order linear time-varying vector differential equations // Int. J. Control. 2007. Vol. 80, N 4. P. 523–526.

8. *Onitsuka M.* Uniform asymptotic stability for damped linear oscillators with variable parameters // Appl. Math. Comput. 2011. Vol. 218, N 4. P. 1436–1442. https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.06.025

9. *Александров А. Ю.* Об устойчивости положений равновесия нелинейных неавтономных механических систем // ПММ. 2007. Т. 71. Вып. 3. С. 361–376.

10. *Александров А. Ю., Косов А. А.* Об асимптотической устойчивости положений равновесия механических систем с нестационарным ведущим параметром // Известия РАН. Теория и системы управления. 2008. № 3. С. 8–22.

11. *Александров А. Ю., Платонов А. В.* О сохранении асимптотической устойчивости механических систем при эволюции диссипативных сил, приводящей к их исчезновению // Системы управления и информационные технологии. 2012. Т. 50, № 4. С. 4–7.

12. Математическая энциклопедия: в 5 т. / под ред. И. М. Виноградова. Т. 3. М.: Советская энциклопедия, 1982. 592 с.

13. *Зубов В. И.* Устойчивость движения. М.: Высш. школа, 1973. 272 с.

14. *Зубов В. И.* Динамика управляемых систем. М.: Высш. школа, 1982. 285 с.

15. *Смирнов Е. Я.* Некоторые задачи математической теории управления. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981. 200 с.

16. *Антипов К. А., Тихонов А. А.* Параметрическое управление в задаче о стабилизации космического аппарата в магнитном поле Земли // Автомат. и телемех. 2007. № 8. С. 44–56.

17. *Александров А. Ю., Тихонов А. А.* Электродинамическая стабилизация ИСЗ на экваториальной орбите // Космические исследования. 2012. Т. 50, № 4. С. 335–340.

18. *Антипов К. А., Тихонов А. А.* Электродинамическое управление в задаче о стабилизации космического аппарата в геомагнитном поле // Космические исследования. 2014. Т. 52, № 6. С. 512–520.

19. *Aleksandrov A. Yu., Antipov K. A., Platonov A. V., Tikhonov A. A.* Electrodynamic attitude stabilization of a satellite in the Konig frame // Nonlinear Dyn. 2015. Vol. 82, issue 3. P. 1493–1505. https://doi.org/10.1007/s11071-015-2256-1

20. *Александров А. Ю., Антипов К. А., Платонов А. В., Тихонов А. А.* Электродинамическая стабилизация искусственного спутника Земли в кениговой системе координат // Известия РАН. Теория и системы управления. 2016. № 2. С. 128–141.

21. *Меркин Д. Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1987. 304 с.

22. Вибрации в технике. Справочник: в 6 т. / ред. совет: В. Н. Челомей (пред.). М.: Машиностроение, 1979. Т. 2. Колебания нелинейных механических систем / под ред. И. И. Блехмана. 351 с.

23. *Rivin E. I.* Passive vibration isolation. New York: Asme Press, 2003. 426 p.

Статья поступила в редакцию 13 мая 2017 г.; рекомендована в печать 22 июня 2017 г.

Сведения об авторах

Александров Александр Юрьевич — доктор физико-математических наук, профессор; a.u.aleksandrov@spbu.ru

Тихонов Алексей Александрович — доктор физико-математических наук, профессор; a.tikhonov@spbu.ru

ATTITUDE STABILIZATION OF A RIGID BODY IN CONDITIONS OF DECREASING DISSIPATION

Alexander Yu. Aleksandrov, Alexey A. Tikhonov

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; a.u.aleksandrov@spbu.ru, a.tikhonov@spbu.ru

The article deals with the problem of triaxial stabilization of an angular position of a rigid body. The issue of the possibility of implementing a control system, in which dissipative torque tends to zero over time, and the only remaining control torque is a restoring one is raised. The case of vanishing damping considered in this paper is known as the most difficult one in the problem of analyzing the stability of mechanical systems with a nonstationary parameter at dissipative forces. A lemma about a lower estimate of the norm of the restoring torque in a neighborhood of the stabilized motion of a rigid body and two theorems on the asymptotic stability of the stabilized motion of a body are proved. It is shown that the sufficient conditions for asymptotic stability found in theorems are close to necessary ones. The results of numerical modeling illustrating the conclusions obtained in the work are presented. Refs 23. Figs 2.

Keywords: triaxial stabilization, attitude motion, dissipation, evolution, asymptotic stability.

References

1. Sarychev V. A., *Problems of artificial satellites orientation.* In Ser.: *Advances in Science and Technology. Space Research* **11** (VINITI of the USSR Academy of Sciences, Moscow, 1978) [in Russian].

2. Rouche N., Habets P., Laloy M., *Stability Theory by Liapunov's Direct Method* (Springer, New York, 1977).

3. Hatvani L., "On partial asymptotic stability and instability. III. Energy-like Ljapunov functions", *Acta Sci. Math.* **49**(1–4), 157–167 (1985).

4. Srirangarajan H.R., Banait P.J., "Analysis of duffing's oscillator equation with time-dependent parameters", *J. Sound Vib.* **233**(3), 435–440 (2000). https://doi.org/10.1006/jsvi.1999.2819

5. Hatvani L., "The effect of damping on the stability properties of equilibria of non-autonomous systems", *J. Appl. Math. Mech.* **65**(4), 707–713 (2001).

6. Shen Y., Yang S., Liu X., "Nonlinear dynamics of a spur gear pair with time-varying stiffness and backlash based on incremental harmonic balance method", *Int. J. Mech. Sci.* **48**(11), 1256–1263 (2006). https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2006.06.003

7. Sun J., Wang O. G., Zhong Q. C., "A less conservative stability test for second-order linear time-varying vector differential equations", *Int. J. Control* **80**(4), 523–526 (2007).

8. Onitsuka M., "Uniform asymptotic stability for damped linear oscillators with variable parameters", *Appl. Math. Comput.* **218**(4), 1436–1442 (2011). https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.06.025

9. Aleksandrov A. Yu., "The stability of the equilibrium positions of non-linear non-autonomous mechanical systems", *J. Appl. Math. Mech.* **71**(3), 324–338 (2007).

10. Aleksandrov A. Yu., Kosov A. A., "Asymptotic stability of equilibrium positions of mechanical systems with a nonstationary leading parameter", *J. Comput. Syst. Sci. Int.* **47**(3), 332–345 (2008). https://doi.org/10.1134/S1064230708030027

11. Aleksandrov A. Yu., Platonov A. V., "On the preservable of asymptotic stability of mechanical systems under evolution of dissipative forces resulting in their vanishing", *Control Systems and Information Technologies* **50**(4), 4–7 (2012) [in Russian].

12. *Encyclopedia of Mathematics* **3** (ed. M. Hazewinkel, Kluwer Academic Publishers, 1989).

13. Zubov V. I., *Stability of Motion* (Vysshaya Shkola Publ., Moscow, 1973) [in Russian].

14. Zubov V. I., *Dynamics of Controlled Systems* (Vysshaya Shkola Publ., Moscow, 1982) [in Russian].

15. Smirnov E. Ya., *Some Problems of the Mathematical Control Theory* (Leningrad Univ. Press, Leningrad, 1981) [in Russian].

16. Antipov K. A., Tikhonov A. A., "Parametric control in the problem of spacecraft stabilization in the geomagnetic field", *Autom. Remote Control* **68**(8), 1333–1345 (2007). https://doi.org/10.1134/S000511790708005X

17. Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A., "Electrodynamic stabilization of Earth-orbiting satellites in equatorial orbits", *Cosmic Res.* **50**(4), 313–318 (2012). https://doi.org/10.1134/S001095251203001X

18. Antipov K. A., Tikhonov A. A., "Electrodynamic control for spacecraft attitude stability in the geomagnetic field", *Cosmic Res.* **52**(6), 472–480 (2014). https://doi.org/10.1134/S001095251406001X

19. Aleksandrov A. Yu., Antipov K. A., Platonov A. V., Tikhonov A. A. "Electrodynamic attitude stabilization of a satellite in the Konig frame", *Nonlinear Dyn.* **82**(3), 1493–1505 (2015). https://doi.org/10.1007/s11071-015-2256-1

20. Aleksandrov A. Yu., Antipov K. A., Platonov A. V., Tikhonov A. A., "Electrodynamic stabilization of artificial Earth satellites in the Konig coordinate system", *J. Comput. Syst. Sci. Int.* **55**(2), 296–309 (2016). https://doi.org/10.1134/S1064230716010020

21. Merkin D. R., *Introduction to the Theory of Stability* (Springer, New York, 1997).

22. *Vibrations in Engineering. Handbook* (Moscow, 1979, **2** *Oscillations of Nonlinear Mechanical Systems*, ed. I. I. Blekhman) [in Russian].

23. Rivin E. I. *Passive Vibration Isolation* (Asme Press, New York, 2003).

Для цитирования: *Александров А. Ю., Тихонов А. А.* Стабилизация вращательного движения твердого тела в условиях убывающей диссипации // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 4. С. 631–641. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.411

For citation: Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A. Attitude stabilization of a rigid body in conditions of decreasing dissipation. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2017, vol. 4 (62), issue 4, pp. 631–641. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.411