

О ДВИЖЕНИИ ГРУНТОВЫХ ВОД К НЕСОВЕРШЕННОЙ ГАЛЕРЕЕ ПРИ НАЛИЧИИ ИСПАРЕНИЯ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Э. Н. Береславский, Л. М. Дудина

Санкт-Петербургский государственный университет гражданской авиации,
Российская Федерация, 196210, Санкт-Петербург, ул. Пилотов, 38

Рассматривается плоская установившаяся фильтрация в безнапорном пласте к несовершенной галерее при наличии испарения со свободной поверхности грунтовых вод. Для изучения влияния испарения формулируется и с применением метода П. Я. Полубариновой-Кочиной решается смешанная многопараметрическая краевая задача теории аналитических функций. На базе предлагаемой модели разрабатывается алгоритм расчета фильтрационных характеристик потока и приводится гидродинамический анализ зависимостей влияния всех физических параметров схемы на дебит галереи и ординату точки выхода кривой депрессии на непроницаемый экран. Библиогр. 21 назв. Ил. 5. Табл. 2.

Ключевые слова: фильтрация, безнапорный пласт, несовершенная галерея, грунтовые воды, свободная поверхность, испарение, комплексная скорость, конформные отображения, метод Полубариновой-Кочиной.

1. Введение. Как известно [1–5], решение задачи о притоке жидкости к несовершенной скважине с затопленным фильтром (т. е. осесимметричной задачи) в точной гидродинамической постановке, особенно для потока со свободной поверхностью связано с большими математическими трудностями и до настоящего времени не найдено. Поэтому в качестве первого приближения к решению этой проблемы были рассмотрены некоторые плоские аналоги-задачи о фильтрации к несовершенной прямолинейной галерее в безнапорном пласте [4, 5]. Следует отметить, что области комплексной скорости указанных задач позволяют с помощью инверсии свести дело к прямолинейным многоугольникам, применить формулу Кристоффеля—Шварца [6] и таким образом получить их решения.

В настоящей работе дается точное аналитическое решение задачи о фильтрации к несовершенной галерее с затопленным фильтром при наличии испарения со свободной поверхности грунтовых вод. В этом случае в области комплексной скорости, в отличие от [4, 5] возникают не прямолинейные, а круговые многоугольники, что не дает возможности воспользоваться классическим интегралом Кристоффеля—Шварца.

Для решения задачи используется метод П. Я. Полубариновой-Кочиной [1–3]. С помощью разработанных для областей специального вида [7–9], которые характерны для задач подземной гидромеханики, способов конформного отображения круговых многоугольников [10–13] решается смешанная многопараметрическая задача теории аналитических функций.

Учет характерных особенностей рассматриваемого течения позволяет получить решение через элементарные функции, что делает его использование наиболее простым и удобным. Приводимый подробный гидродинамический анализ дает некоторое представление о возможной зависимости параметров движения от степени несовершенства галереи. Полученные результаты, по крайней мере, качественно могут быть перенесены на случай скважин и трубчатых колодцев.

2. Постановка задачи. На рис. 1 представлена картина плоского установившегося течения жидкости в безнапорном пласте из бесконечности к несовершенной галерее с уровнем воды H_2 , водопримная часть которой BC (фильтр) имеет длину H_1 и примыкает к водонепроницаемой подошве пласта AB . Верхней границей области движения является свободная поверхность AED , с которой происходит равномерное испарение интенсивности ε ($0 < \varepsilon < 1$). Фильтрация считается установившейся, поэтому ордината свободной поверхности, возрастая по мере удаления от галереи влево, вверх по потоку при $x \rightarrow \infty$, является неограниченной [4, 5]. Справа свободная поверхность выходит на непроницаемый участок CD (экран). Грунт считается однородным и изотропным, течение жидкости подчиняется закону Дарси с известным коэффициентом фильтрации $\kappa = \text{const}$.

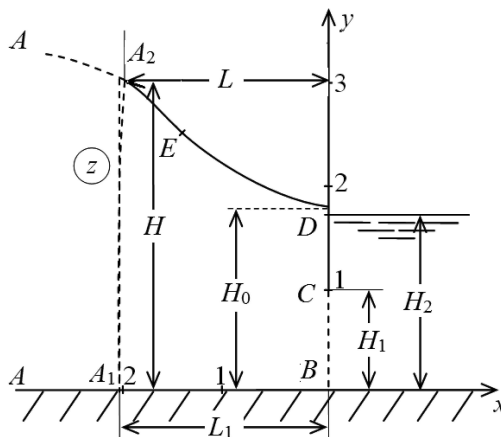


Рис. 1. Картина течения к несовершенной галерее, рассчитанная при $\varepsilon = 0.5$, $H = 3$, $L = 2$, $H_1 = 1$, $H_2 = 1.4$.

Решение задачи будем искать сначала для неограниченной области, а затем распространим полученные результаты на случай ограниченной слева области движения некоторой эквипотенциалью A_1A_2 , определяемой из решения.

Введем комплексный потенциал движения $\omega = \varphi + i\psi$ (φ — потенциал скорости, ψ — функция тока) и комплексную координату $z = x + iy$, отнесенные соответственно к κH и H , где H — напор в точке A .

Задача состоит в нахождении комплексного потенциала $\omega(z)$ как функции, аналитической в области фильтрации z и удовлетворяющей на границе области следующим краевым условиям:

$$\begin{aligned} AED : \quad \varphi = -y, \quad \psi = -\varepsilon x + Q; \quad DC : \quad x = 0, \quad \psi = Q; \\ CB : \quad x = 0, \quad \varphi = -H_2; \quad BA : \quad y = 0, \quad \psi = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Помимо положения свободной поверхности AED и, стало быть, ординаты H_0 точки выхода кривой депрессии на непроницаемый экран определению подлежат также фильтрационный расход Q .

3. Построение решения. Для решения задачи используем метод П. Я. Полубариновой-Кочкиной, который основан на применении аналитической теории линейных дифференциальных уравнений класса Фукса [1–3, 6].

Введем вспомогательную каноническую переменную ζ и функцию $z(\zeta)$, конформно отображающую верхнюю полуплоскость ζ на область течения z при соответствии точек $\zeta_D = 0$, $\zeta_E = e$, $\zeta_A = 1$, $\zeta_C = \infty$, а также функции $dw/d\zeta$ и $dz/d\zeta$.

Обратимся к области комплексной скорости w , соответствующей граничным условиям (1), которая изображена на рис. 2. Эта область, представляющая собой круговой четырехугольник $ACDE$ с разрезом с вершиной в точке E (соответствующей точке перегиба кривой депрессии) и углом $\pi\nu = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\varepsilon}$ при вершине A , принадлежит классу многоугольников в полярных сетках [7–9] и была исследована ранее [10–13]. Важно подчеркнуть, что подобные области, несмотря на свой частный вид, весьма типичны и характерны для многих задач подземной гидромеханики: при фильтрации из каналов, оросителей и водоемов, при течениях пресных вод над покоящимися солеными, в задачах обтекания шпунта Жуковского при наличии соленых подпорных вод [1–3] (см. также [14–21]).

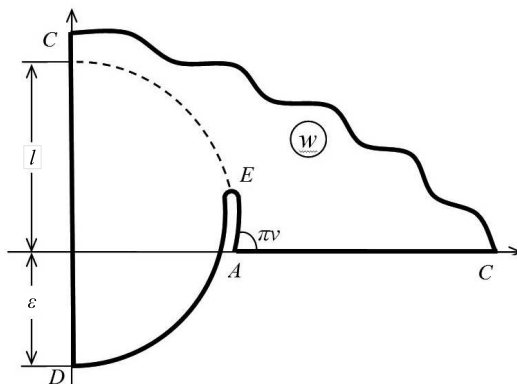


Рис. 2. Область комплексной скорости w .

Круговому четырехугольнику $ACDE$ в плоскости w соответствует следующее дифференциальное уравнение класса Фукса с четырьмя регулярными особыми точками [1–3, 6]:

$$Y'' + \left(\frac{1}{2\zeta} + \frac{1-\nu}{\zeta-1} - \frac{1}{\zeta-e} \right) Y' + \frac{\nu(\nu+1)\zeta + \lambda}{4\zeta(\zeta-1)(\zeta-e)} Y = 0. \quad (2)$$

Хорошо известно [1–3, 6], что при интегрировании уравнений подобного рода возникают трудности принципиального характера. Они обусловлены тем, что коэффициенты уравнения (2) помимо неопределенного аффикса e содержат еще и дополнительный (аксессуарный) параметр λ , также неизвестный заранее, и до сих пор не существует какого-либо эффективного способа их нахождения.

Замена переменной $\zeta = \operatorname{th}^2 t$ переводит верхнюю полуплоскость ζ в горизонтальную полуполосу $\operatorname{Re} t > 0$, $0 < \operatorname{Im} t < 0.5\pi$ вспомогательной параметрической переменной t (рис. 3), а интегралы Y уравнения (2), которые построены по методике [10–13], преобразуют к виду

$$Y_1 = \frac{\operatorname{ch} t \operatorname{ch} \nu t + C \operatorname{sh} t \operatorname{sh} \nu t}{\operatorname{ch}^{1+\nu} t}, \quad Y_2 = \frac{\operatorname{ch} t \operatorname{sh} \nu t + C \operatorname{sh} t \operatorname{ch} \nu t}{\operatorname{ch}^{1+\nu} t},$$

где C ($C \neq 1$) — некоторая подходящая вещественная постоянная. Тогда функция,

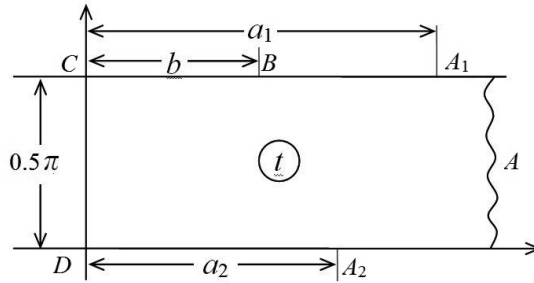


Рис. 3. Область вспомогательной параметрической переменной t .

совершающая конформное отображение полуполосы на область комплексной скорости w , принимает вид

$$w = -\sqrt{\varepsilon}i \frac{\sqrt{\varepsilon}(\operatorname{ch} t \operatorname{ch} vt + C \operatorname{sh} t \operatorname{sh} vt) + i(\operatorname{ch} t \operatorname{sh} vt + C \operatorname{sh} t \operatorname{ch} vt)}{\operatorname{ch} t \operatorname{ch} vt + C \operatorname{sh} t \operatorname{sh} vt - i\sqrt{\varepsilon}(\operatorname{ch} t \operatorname{sh} vt + C \operatorname{sh} t \operatorname{ch} vt)}. \quad (3)$$

Определяя характеристические показатели функций dw/dt и dz/dt около регулярных особых точек [1–3, 6], учитывая, что $w = dw/dz$, и принимая во внимание соотношение (3), придем к зависимостям

$$\frac{dw}{dt} = iM \frac{\sqrt{\varepsilon}(\operatorname{ch} t \operatorname{ch} vt + C \operatorname{sh} t \operatorname{sh} vt) + i(\operatorname{ch} t \operatorname{sh} vt + C \operatorname{sh} t \operatorname{ch} vt)}{\Delta(t)}, \quad (4)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{M \operatorname{ch} t \operatorname{ch} vt + C \operatorname{sh} t \operatorname{sh} vt - i\sqrt{\varepsilon}(\operatorname{ch} t \operatorname{sh} vt + C \operatorname{sh} t \operatorname{ch} vt)}{\sqrt{\varepsilon} \Delta(t)}, \quad (5)$$

$$\Delta(t) = \sqrt{\operatorname{sh}^2 t + \operatorname{ch}^2 b}, \quad (6)$$

где $M > 0$ – масштабная постоянная моделирования, b ($0 < b < \infty$) – неизвестная абсцисса точки B в плоскости t .

Можно проверить, что функции (4) удовлетворяют граничным условиям (1), переформулированным в терминах функций dw/dt и dz/dt , и, таким образом, являются параметрическим решением исходной краевой задачи. Запись представлений (4) для разных участков границы полуполосы с последующим интегрированием по всему контуру вспомогательной области параметрической переменной t приводит к замыканию области течения и, тем самым, служит контролем вычислений.

В результате получаем выражения для уровня воды H_2 в галерее и длины H_1 ее водоприемной части, а также уравнения для координат точек свободной поверхности $ACDE$ в параметрической форме:

$$\int_0^{0.5\pi} [\Phi_{DC}(t) + Y_{DC}(t)] dt + H_1 = H_2, \quad \int_0^b Y_{CB}(t) dt = H_1, \quad (7)$$

$$x(t) = - \int_0^t X_{DA}(t) dt, \quad y(t) = H_0 + \int_0^t Y_{DA}(t) dt \quad (0 \leq t \leq \infty). \quad (8)$$

Предположим теперь, что на некотором расстоянии L от галереи путем замера найдено положение кривой депрессии: $h = H$, т.е. известно значение потенциала

$\omega = -H + iQ$ в точке A_2 . Тогда, используя уравнения (8) кривой депрессии $ACDE$ и соответствие точек A_2 , получим выражения для геометрических размеров

$$L = \int_0^{a_2} X_{DA}(t)dt, \quad H = \int_0^{a_2} Y_{DA}(t)dt + \int_0^{0.5\pi} Y_{DC}(t)dt + \int_0^b Y_{CB}(t)dt, \quad (9)$$

а также искомым выражений для фильтрационного расхода Q и ординаты H_0 точки выхода свободной поверхности на экран

$$Q = \int_0^b \Psi_{CB}(t)dt, \quad H_0 = H - \int_0^{a_2} \Phi_{DA}(t)dt. \quad (10)$$

Контролем счета служат другие выражения для величины H_0 :

$$H_0 = H_2 - \int_0^{0.5\pi} \Phi_{DC}(t)dt, \quad H_0 = H_1 + \int_0^{0.5\pi} Y_{DC}(t)dt. \quad (11)$$

В формулах (4)–(11) подынтегральные функции представляют собой выражения правых частей равенств (4), (5) на соответствующих участках контура вспомогательной области t .

4. Расчет схемы течения и анализ численных результатов. Представления (4)–(11) содержат четыре неизвестные постоянные M , C , b и a_2 . Параметры b ($0 < b < \infty$), a_2 ($0 < a_2 < \infty$), C ($C \neq 1$) определяются из уравнений (7) и (9) для задаваемых величин H_1 , H_2 ($H_1 \leq H_2 < H$) и L , постоянная моделирования M при этом исключится из второго уравнения (9), фиксирующего ординату задаваемой точки A_2 . После определения неизвестных постоянных последовательно находится фильтрационный расход Q и ордината H_0 точки выхода кривой депрессии на непроницаемый участок DC по формулам (10) и координаты точек кривой депрессии AED по формулам (8).

Рассмотрение участка A_1B водонепроницаемой подошвы пласта, в точке A_1 которой имеем $\omega \approx -H$, $z \approx -L_1$, приводит к двум следующим уравнениям:

$$\int_b^{a_1} \Phi_{BA_1}(t)dt = H - H_2, \quad L_1 = \int_b^{a_1} X_{BA_1}(t)dt. \quad (12)$$

Первое из них позволяет определить прообраз точки A_1 на плоскости t , т. е. величину a_1 ($b < a_1 < \infty$), а второе — по найденному из этого уравнения значению a_1 вычислить длину L_1 участка подошвы A_1B . Иными словами, формулы (12) позволяют найти координаты точки A_1 выхода на подошву пласта эквипотенциали, исходящей из точки $A_2(-L, H)$.

На рис. 1 изображена картина течения, рассчитанная при $\varepsilon = 0.5$, $H = 3$, $L = 2$, $H_1 = 1$, $H_2 = 1.4$. Результаты расчетов влияния определяющих физических параметров ε , H , L , H_1 , H_2 на величины Q и H_0 приведены в табл. 1, 2. На рис. 4 и 5 представлены зависимости Q (кривые 1) и H_0 (кривые 2) от параметров ε , H , L , H_1 и H_2 .

Анализ данных таблиц и графиков позволяет сделать следующие выводы.

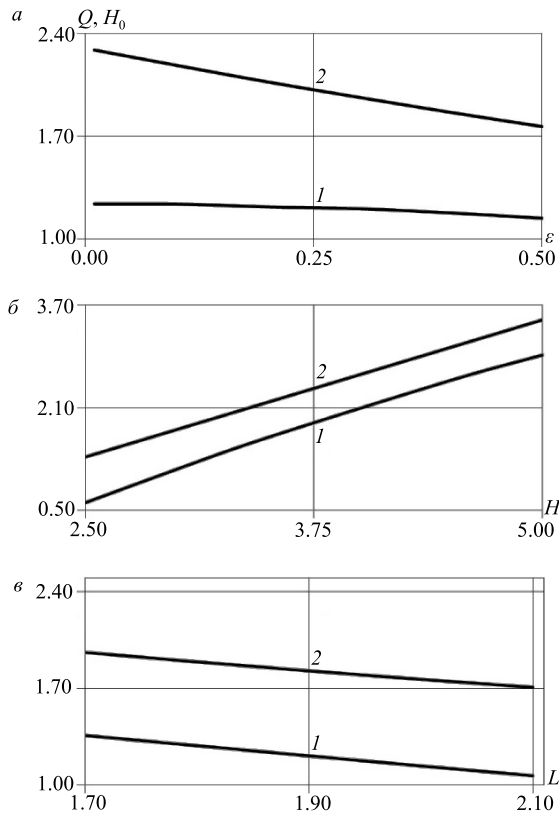


Рис. 4. Зависимости величин Q и H_0 : от ε при $H = 3$, $L = 2$, $H_1 = 1$, $H_2 = 1.4$ (а); от H при $\varepsilon = 0.5$, $L = 2$, $H_1 = 1$, $H_2 = 1.4$ (б); от L при $\varepsilon = 0.5$, $H = 3$, $H_1 = 1$, $H_2 = 1.4$ (в).

Прежде всего обращает на себя внимание противоположный качественный характер изменения величин Q , H_0 и L_1 при варьировании параметров ε и H (табл. 1): уменьшение ε и увеличение H приводят к возрастанию дебита галереи, ординаты выхода кривой депрессии на экран и длины L_1 , т. е. всех искомых параметров. Таким образом, по отношению к фильтрации в пласте уменьшение интенсивности испарения играет такую же роль, как и увеличение напора. При этом наибольшее влияние на величины Q и H_0 оказывает напор: при возрастании параметра H в 1.7 раза расход и ордината увеличиваются соответственно на 181 и 135.5%.

Таблица 1. Результаты расчетов величин Q , H_0 при варьировании ε , H , L , H_1 , H_2

| ε | Q | H_0 | H | Q | H_0 | L | Q | H_0 | H_1 | Q | H_0 | H_2 | Q | H_0 |
|---------------|------|-------|-----|------|-------|-----|------|-------|-------|------|-------|-------|------|-------|
| 0.01 | 1.25 | 2.29 | 2.9 | 1.04 | 1.69 | 1.2 | 1.59 | 2.19 | 0.9 | 1.11 | 1.83 | 1.09 | 1.38 | 1.34 |
| 0.10 | 1.24 | 2.18 | 3.5 | 1.64 | 2.24 | 1.7 | 1.36 | 1.96 | 1.1 | 1.16 | 1.70 | 1.19 | 1.25 | 1.58 |
| 0.30 | 1.21 | 1.96 | 4.5 | 2.53 | 2.38 | 1.8 | 1.29 | 1.89 | 1.2 | 1.19 | 1.63 | 1.29 | 1.20 | 1.68 |
| 0.50 | 1.14 | 1.77 | 5.0 | 2.92 | 3.98 | 2.0 | 1.14 | 1.77 | 1.4 | 1.20 | 1.45 | 1.40 | 1.14 | 1.77 |

Существенный интерес представляют зависимости расхода галереи и ординаты точки выхода свободной поверхности на экран от уровня воды H_2 в галерее, а также от степени заглубления экрана, т. е. от величины H_1 при фиксированных ε , H и L .

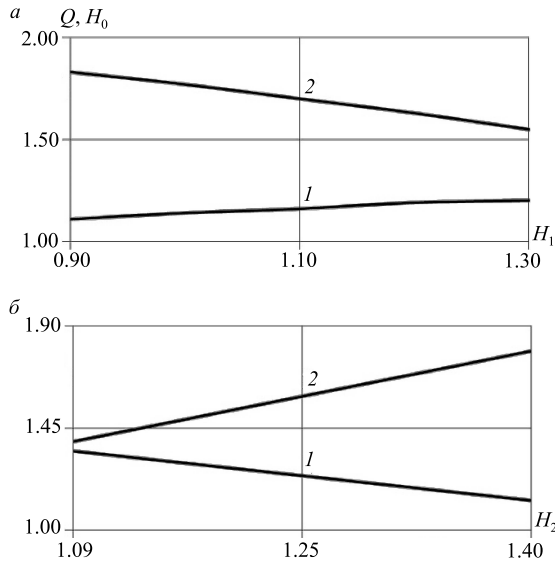


Рис. 5. Зависимости величин Q и H_0 : от длины фильтра H_1 при $\varepsilon = 0.5$, $H = 3$, $L = 2$, $H_2 = 1.4$ (а); от уровня воды в галерее H_2 при $\varepsilon = 0.5$, $H = 3$, $L = 2$, $H_1 = 1$ (б).

Здесь так же, как и в отношении параметров ε и H наблюдается противоположный качественный характер изменения величин Q , H_0 , а также L_1 при варьировании H_1 и H_2 . Видно, что увеличение уровня воды в галерее и уменьшение заглубления экрана сопровождаются уменьшением расхода и длины участка A_1B и подъемом свободной поверхности, что, в свою очередь, выражается в увеличении H_0 ; оба эти фактора характеризуют усиление подпора.

Таблица 2. Результаты расчетов величин L_1 при варьировании ε , H , L , H_1 , H_2

| ε | L_1 | H | L_1 | L | L_1 | H_1 | L_1 | H_2 | L_1 |
|---------------|-------|-----|-------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0.01 | 2.639 | 2.9 | 2.001 | 1.0 | 1.429 | 0.9 | 2.013 | 1.09 | 2.236 |
| 0.10 | 2.439 | 3.0 | 2.035 | 1.7 | 1.823 | 1.1 | 2.052 | 1.19 | 2.125 |
| 0.30 | 2.178 | 4.0 | 2.412 | 1.9 | 1.962 | 1.2 | 2.065 | 1.29 | 2.084 |
| 0.50 | 2.035 | 5.0 | 2.659 | 2.1 | 2.109 | 1.3 | 2.074 | 1.40 | 2.035 |

Из табл. 1 и рис. 5 следует, что уменьшение параметров H_1 и H_2 соответственно в 1.6 и 1.3 раза влечет изменение величины Q на 21% (при фиксировании H_1) и на 7.5% (при фиксировании H_2). Отмеченные закономерности приводят к заключению о том, что дебит зависит от величины понижения уровня в несколько большей степени, чем от несовершенства галереи (скважины, колодца).

Из рис. 4 и 5 видно, что для базового варианта зависимости расхода Q и ординаты H_0 от всех параметров ε , H , L , H_1 , H_2 близки к линейным.

Особый интерес представляет поведение фильтрационных характеристик Q и H_0 , а также длины участка A_1B непроницаемой подошвы, т. е. величины L_1 от параметра L . В табл. 2 приведены результаты расчетов длины L_1 при варьировании L . Видно, что возрастание дебита галереи и ординаты выхода свободной поверхности на непроницаемый экран при фиксировании параметров ε , H , H_1 и H_2 может происходить только за счет уменьшения длины L .

Заметно также, что при некотором удалении от галереи отклонение эквипотенциалей A_2A_1 от вертикальных прямых становится незначительным. Так, из табл. 2 следует, что для базового варианта $\varepsilon = 0.5$, $H = 3$, $L = 2$, $H_1 = 1.0$, $H_2 = 1.4$ соответствующее значение L_1 равно 2.035 и, следовательно, $L_1 - L = 0.035$. Для других вариантов, которые содержатся в табл. 1 и 2, разность может достигать величин 0.001–0.009: например, при $H = 2.9$ имеем $L_1 = 2.001$, так что $L_1 - L = 0.001$. Таким образом, на достаточном удалении от галереи, практически уже при $L = 2$ имеет место приближенное равенство $L_1 \approx L$, которое выполняется тем точнее, чем больше H_2 при данном H_1 или чем меньше H_1 при фиксированном H_2 . Сказанное означает, что на указанном расстоянии эквипотенциали мало отличаются от отрезков вертикальных прямых (см. рис. 1), и если ограничить область движения одной из таких эквипотенциалей, то рассматриваемая задача близка к случаю фильтрации через земляную перемычку соответствующей ширины с вертикальными откосами при наличии на низовом откосе непроницаемого экрана. Решение последней задачи при $\varepsilon = 0$ в гидродинамической постановке приведено в [4].

Для выяснения вопроса о влиянии испарения со свободной поверхности потока на фильтрационные характеристики рассмотрим вариант $\varepsilon = 0.01$, $H = 1$, $L = 2.5$, $H_1 = 0.01$, $H_2 = 0.4$, для которого получены следующие значения: $H_0 = 0.641$, $L_1 = 2.742$. Сравнение этих результатов с подобным случаем, рассмотренным в [4, 5], но при отсутствии испарения ($\varepsilon = 0$), для которого $H_0 = 0.717$, $L_1 = 2.555$, показывает, что относительная погрешность составляет соответственно 10.6 и 7.3 %. С возрастанием величины ε влияние испарения со свободной поверхности грунтовых вод становится еще более значительным.

5. Заключение. Разработана методика построения точного аналитического решения задачи о движении жидкости к несовершенной галерее при наличии испарения со свободной поверхности грунтовых вод. Показано, что картина течения вблизи непроницаемого экрана существенно зависит не только от степени несовершенства галереи, но и от наличия испарения, что сильно отражается на дебите галереи и ординате точки выхода кривой депрессии на экран. Полученные результаты дают представление о возможной зависимости характеристик течения при рассмотрении задачи о фильтрации уже к несовершенной скважине.

Литература

1. Кочина П. Я. Гидродинамика и теория фильтрации. Избранные труды. М.: Наука, 1991.
2. Полубарина-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. 2-е изд. М.: Наука, 1977.
3. Полубарина-Кочина П. Я., Пряхинская В. Г., Эмих В. Н. Математические методы в вопросах орошения. М.: Наука, 1969.
4. Пряхинская В. Г. Движение грунтовых вод в прямоугольной перемычке с непроницаемой вертикальной стенкой // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1964. № 4. С. 41–49.
5. Полубарина-Кочина П. Я., Постнов В. А., Эмих В. Н. Установившаяся фильтрация к несовершенной галерее в безнапорном пласте // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1967. № 4. С. 97–100.
6. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1950.
7. Береславский Э. Н., Кочина П. Я. О некоторых уравнениях класса Фукса в гидро- и аэромеханике // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1992. № 5. С. 3–7.
8. Кочина П. Я., Береславский Э. Н., Кочина Н. Н. Аналитическая теория линейных дифференциальных уравнений класса Фукса и некоторые задачи подземной гидромеханики. Ч. 1. М.: Институт проблем механики РАН, 1996. Препринт № 567. 122 с.
9. Береславский Э. Н., Кочина П. Я. О дифференциальных уравнениях класса Фукса, встречающихся в некоторых задачах механики жидкостей и газов // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1997. № 5. С. 9–17.

10. Береславский Э. Н. Об учете инфильтрации или испарения со свободной поверхности методом круговых многоугольников // ПММ. 2010. Т. 74. Вып. 2. С. 239–251.
11. Береславский Э. Н. Об интегрировании в замкнутой форме некоторых дифференциальных уравнений класса Фукса, встречающихся в гидро- и аэромеханике // Докл. РАН. 2009. Т. 428, № 4. С. 439–443.
12. Береславский Э. Н. О дифференциальных уравнениях класса Фукса, связанных с конформным отображением круговых многоугольников в полярных сетках // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 3. С. 296–301.
13. Береславский Э. Н. Об интегрировании в замкнутой форме одного класса фуксовых уравнений и его приложения // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 6. С. 1048–1050.
14. Береславский Э. Н. О влиянии испарения или инфильтрации на свободную поверхность грунтовых вод в некоторых задачах подземной гидромеханики // Докл. РАН. 2016. Т. 468, № 4. С. 395–400.
15. Береславский Э. Н. О применении уравнений класса Фукса для расчета фильтрации из каналов и оросителей // ПММ. 2013. Т. 77. Вып. 5. С. 711–794.
16. Береславский Э. Н. Моделирование фильтрационных течений из каналов // ПММ. 2011. Т. 75. Вып. 4. С. 563–571.
17. Береславский Э. Н. Моделирование фильтрационных течений из каналов // Докл. РАН. 2010. Т. 434, № 4. С. 472–475.
18. Береславский Э. Н. К задаче Жуковского об обтекании шпунта // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 4. С. 603–610.
19. Береславский Э. Н. Гидродинамическая модель отжима пресными фильтрационными водами покоящихся соленых при обтекании шпунта Жуковского // Доклады РАН. 1998. Т. 363, № 4. С. 479–482.
20. Береславский Э. Н. Забор пресной очищенной воды при фильтрации из водоема // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 5. С. 867–871.
21. Береславский Э. Н. К задаче о фильтрации из оросителя ирригационной системы // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1987. № 2. С. 105–109.

Статья поступила в редакцию 24 января 2017 г.; рекомендована в печать 22 июня 2017 г.

Сведения об авторах

Береславский Эдуард Наумович — доктор физико-математических наук, профессор; eduber@mail.ru
Дудина Лилия Михайловна — аспирант; liliya_shuvalova@mail.ru

ABOUT FLOW OF GROUND WATER TO IMPERFECT GALLERY IN THE PRESENCE OF EVAPORATION WITH A FREE SURFACE

Eduard N. Bereslavskii, Liliya M. Dudina

St. Petersburg State University of Civil Aviation, ul. Pilotov, 38, St. Petersburg, 196210, Russian Federation; eduber@mail.ru, liliya_shuvalova@mail.ru

The plane steady filtering depressurised to the formation of imperfect gallery in the presence of evaporation from the free surface groundwater. To study the effect of evaporation is formulated and using the method of P. Y. Polubarinova-Kochina solved multiparametric mixed boundary value problem of analytic function theory. On the basis of the proposed model, an algorithm for calculating seepage flow characteristics and provides hydrodynamic analysis of the impact of all the dependencies of physical parameters of the circuit in flow rate ordinate galleries and exit points of the curve depression on an impermeable screen. Refs 21. Figs 5. Tables 2.

Keywords: filtration, pressureless reservoir, imperfect gallery, ground water, free surface, evaporation, complex velocity, conformal mappings, method of Polubarinova-Kochina.

References

1. Kochina P. Y., *Hydrodynamics and the theory of filtration. Selected Works* (Nauka Publ., Moscow, 1991) [in Russian].
2. Polubarinova-Kochina P. Y., *Theory of the motion of ground waters* (2nd ed., Nauka Publ., Moscow, 1977) [in Russian].

3. Polubarinova-Kochina P. Y., Priazhinskaia V. G., Emikh V. N., *Mathematical methods in irrigation* (Nauka Publ., Moscow, 1969) [in Russian].
4. Priazhinskaia V. G., "Movement of groundwater in a rectangular web with an impenetrable vertical wall", *Izv. AN SSSR. Mekhanika i Mashinostroenie* (4), 41–49 (1964) [in Russian].
5. Polubarinova-Kochina P. Y., Postnov V. A., Emikh V. N., "Steady filtration to the unadulterated gallery in the free-flowing formation", *Izv. AN SSSR. Mekhanika zhidkosti i gaza* (4), 97–100 (1967) [in Russian].
6. Golubev V. V., *Lectures on the analytic theory of differential equations* (Gostekhizdat Publ., Moscow, Leningrad, 1950) [in Russian].
7. Bereslavskii E. N., Kochina P. Y., "Some equations of the Fuchs class in hydro- and aeromechanics", *Fluid Dynamics* **27**, issue 5, 603–607 (1992).
8. Kochina P. Y., Bereslavskii E. N., Kochina N. N., *Analytic theory of linear differential equations of the Fuchs class and some problems of underground hydromechanics*, ch.1 (Institut problem mekhaniki RAN, Moscow, 1996, preprint N 567, 122 p.) [in Russian].
9. Bereslavskii E. N., Kochina P. Y., "Differential equations of the Fuchs class encountered in some problems of mechanics of liguids and gases", *Fluid Dynamics* **32**, issue 5, 619–625 (1997).
10. Bereslavskii E. N., "Investigation of the effect of seepage or evaporation from a tree surface by the method of circular polygons", *J. Appl. Math. Mech.* **74**, issue 2, 171–180 (2010). <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2010.05.007>
11. Bereslavskii E. N., "On closed-form integration of some fuchsian differential equations encountered of hydro- and aeromechanics", *Doklady mathematics* **80**(2), 706–709 (2009). <https://doi.org/10.1134/S1064562409050196>
12. Bereslavskii E. N., "Differential equations of the Fuchs class associated with the conformal mapping of circular polygons in polar nets", *Differ. Equ.* **33**(3), 292–297 (1997).
13. Bereslavskii E. N., "Integration in closed form of a class of Fuchsian equations and its applications", *Differ. Uravn.* **25**(6), 1048–1050 (1989) [in Russian].
14. Bereslavskii E. N., "Effect of evaporation or infiltration on the free surface of groundwater in certain problems of underground hydromechanics", *Doklady physics* **61**(6), 279–284 (2016). <https://doi.org/10.1134/S1028335816060033>
15. Bereslavskii E. N., "On the use of equations of the Fuchs class to calculate seepage from channels and irrigation ditches", *J. Appl. Math. Mech.* **77**, issue 5, 508–518 (2013). <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2013.12.006>
16. Bereslavskii E. N., "Simulation of seepage flows from channels", *J. Appl. Math. Mech.* **75**, issue 4, 398–403 (2011). <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2011.09.004>
17. Bereslavskii E. N., "Simulation of filtration flows from channels", *Doklady physics* **55**(10), 498–501 (2010). <https://doi.org/10.1134/S102833581010006X>
18. Bereslavskii E. N., "The Zhukovskii problem of a flow around a sheet pile", *J. Appl. Math. Mech.* **63**, issue 4, 603–610 (1999). [https://doi.org/10.1016/S0021-8928\(99\)00072-6](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(99)00072-6)
19. Bereslavskii E. N., "Hydrodynamic model of pressing by fresh filtration waters of dormant saline during flow around Zhukovsky", *Doklady RAN* **363**(4), 479–482 (1998) [in Russian].
20. Bereslavskii E. N., "The intake of purified fresh water with filtration from a reservoir", *J. Appl. Math. Mech.* **54**, issue 5, 714–718 (1990). [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(90\)90124-S](https://doi.org/10.1016/0021-8928(90)90124-S)
21. Bereslavskii E. N., "To the problem of filtration from the irrigator irrigation system", *Izv. AN SSSR. Mekhanika zhidkosti i gaza* (2), 105–109 (1987) [in Russian].

Для цитирования: Береславский Э. Н., Дудина Л. М. О движении грунтовых вод к несовершенной галерее при наличии испарения со свободной поверхности // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 4. С. 654–663. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.413>

For citation: Bereslavskii E. N., Dudina L. M. About flow of ground water to imperfect gallery in the presence of evaporation with a free surface. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2017, vol. 4 (62), issue 4, pp. 654–663. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.413>