

ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ НА ДИНАМИКУ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ДИФФУНДИРУЮЩЕГО ВЕЩЕСТВА*

А. Н. Бестужева¹, А. Л. Смирнов²

¹ С.-Петербургский государственный университет путей сообщения,
Российская Федерация, 190031, Санкт-Петербург, Московский пр., 9

² С.-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

В работе продолжены исследования процесса диффузии вещества, попавшего на водную поверхность, в частности, изучено влияние неравномерности начального распределения вещества на динамические характеристики пятна загрязнения. Под пятном загрязнения понимается область поверхности воды, для которой концентрация диффундирующего вещества выше заданной пороговой. С помощью метода Фурье получены аналитические решения краевых задач для уравнения диффузии в неограниченных областях, содержащие специальные функции. Для их анализа используются асимптотические и численные методы. Сделан вывод о том, что при одинаковых объемах загрязнения его начальное распределение по поверхности оказывает слабое влияние не только на время жизни пятна, но и на его максимальный радиус. В случае равномерного распределения вещества найден максимальный размер пятна загрязнения и момент времени, когда он достигается. Библиогр. 7 назв. Ил. 3. Табл. 1.

Ключевые слова: диффундирующее вещество, уравнение диффузии, пятно загрязнения.

1. Введение. В статье [1] была решена краевая задача о распространении диффундирующего вещества по поверхности воды, когда вещество с плотностью, меньшей плотности воды, в начальный момент времени попадало на свободную поверхность водоема. Предполагалось, что диффундирующее вещество, равномерно распределенное, занимает на поверхности воды круг заданного радиуса. Настоящая статья посвящена вопросу влияния формы начального распределения диффундирующего вещества на динамические характеристики области загрязнения.

2. Постановка задачи. Пусть на свободную поверхность безграничной жидкости в начальный момент времени попало диффундирующее вещество, плотность которого меньше плотности воды. Будем считать, что жидкость идеальна, отсутствуют поверхностные (ветровые) и внутренние течения, нет источников и стоков жидкости. Задача состоит в определении зависимости размеров «пятна загрязнения» (области свободной поверхности, занимаемой диффундирующим веществом, с концентрацией выше пороговой) от времени.

В предположении, что коэффициент горизонтальной диффузии много больше коэффициента вертикальной диффузии, математическая модель представляет собой краевую задачу для двумерного уравнения диффузии:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = K \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right)$$

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (гранты № 16-01-00580 А и № 15-01-06311 А).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2017

с начальным условием

$$c(x, y, 0) = \begin{cases} c_0, & \text{при } 0 \leq r \leq l, \\ 0, & \text{при } l > r \end{cases}$$

и граничными условиями

$$c = 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty, \quad \frac{\partial c}{\partial n} = 0 \quad \text{при } r = 0.$$

Здесь $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, K — коэффициент горизонтальной турбулентной диффузии.

В [1] для функции концентрации в безразмерных переменных было получено следующее выражение:

$$c(r, t) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 t} J_0(\lambda r) F(\lambda) \lambda d\lambda, \quad (1)$$

где $F(\lambda) = \int_0^{\infty} f(\xi) J_0(\lambda \xi) \xi d\xi$. Здесь функция $f(\xi)$ описывает распределение вещества в начальный момент времени, а $J_0(x)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Связь безразмерных и размерных (со знаком \sim) величин такова: $\tilde{c} = c/c_0$, $\tilde{r} = r/l$, $\tilde{t} = Kt/l^2$. Здесь l, c_0 — характерные длина и концентрация, в качестве которых выбираются радиус пятна загрязнения (l) и концентрация диффундирующего вещества (c_0) в начальный момент времени.

В статье [1] был рассмотрен пример, в котором диффундирующее вещество в начальный момент равномерно распределено по области начального загрязнения D :

$$c(r, 0) = f_0(r) = \begin{cases} 1, & 0 \leq r \leq 1, \\ 0, & r > 1. \end{cases}$$

В этом случае $F_0(\lambda) = J_1(\lambda)/\lambda$.

Рассмотрим другие виды начального распределения концентрации и исследуем зависимость параметров пятна загрязнения от начальной формы $c(r, 0) = f(r)$. При этом будем считать фиксированным количество диффундирующего вещества:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 f_i(r) r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^1 f_0(r) r dr d\varphi = \pi, \quad i = 1, 2, 3.$$

Для линейной функции начального распределения концентрации $f_1(r) = 3(1-r)$ при $0 \leq r \leq 1$ можем записать

$$F_1(\lambda) = 3 \int_0^1 (1-\xi) J_0(\lambda \xi) \xi d\xi = \frac{3\pi}{2} \frac{J_1(\lambda) H_0(\lambda) - J_0(\lambda) H_1(\lambda)}{\lambda^2},$$

где $H_n(x)$ — функции Струве [2], и

$$c(r, t) = \frac{3\pi}{2} \int_0^{\infty} \frac{J_0(\lambda r)}{\lambda} \left(J_1(\lambda) H_0(\lambda) - J_0(\lambda) H_1(\lambda) \right) e^{-\lambda^2 t} d\lambda.$$

Для квадратичной функции начального распределения концентрации $f_2(r) = 2(1 - r^2)$ при $0 \leq r \leq 1$ имеем

$$F_2(\lambda) = \frac{4J_2(\lambda)}{\lambda^2}$$

и

$$c(r, t) = 4 \int_0^\infty e^{-\lambda^2 t} \frac{J_0(\lambda r)}{\lambda} J_2(\lambda) d\lambda.$$

Для функции начального распределения концентрации вида $f_3(r) = \frac{3}{2}\sqrt{1-r^2}$ при $0 \leq r \leq 1$ получаем

$$F_3(\lambda) = \frac{3(\sin \lambda - \lambda \cos \lambda)}{2\lambda^3}$$

и

$$c(r, t) = \frac{3}{2} \int_0^\infty e^{-\lambda^2 t} J_0(\lambda r) \frac{\sin \lambda - \lambda \cos \lambda}{\lambda^2} d\lambda.$$

На рис. 1 приведены графики функции концентрации $c(r, t)$ при различных формах начального распределения в моменты времени $t_1 = 0.1$ и $t_2 = 0.5$.

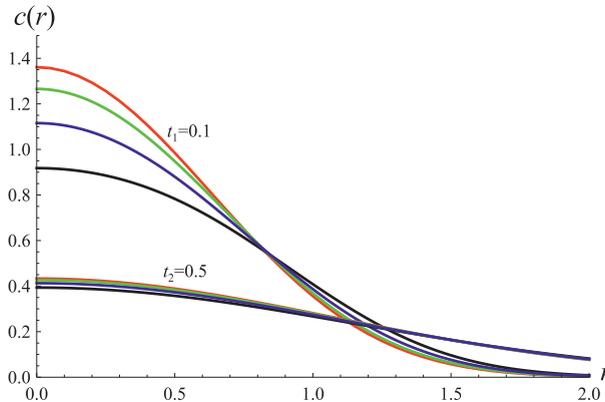


Рис. 1. Функции концентрации $c(r, t_1)$ и $c(r, t_2)$ для разных форм начального загрязнения: $f_0(r)$ — черный, $f_1(r)$ — красный, $f_2(r)$ — зеленый, $f_3(r)$ — синий.

Для больших значений времени t форма начального загрязнения слабо влияет на распространение пятна.

3. Влияние начальных условий на время жизни пятна загрязнения.

Вычислим время жизни T_i пятна загрязнения для различных форм f_i ($i = 0, 1, 2, 3$) начального распределения диффундирующего вещества. Для этого положим $r = 0$ в выражении для концентрации (1), тогда будем иметь

$$c^* = \int_0^\infty e^{-\lambda^2 T_i} J_0(0) F_i(\lambda) \lambda d\lambda.$$

Так как при достаточно малых значениях предельно допустимой концентрации $c^* \ll 1$, время жизни пятна загрязнения велико $T_i \gg 1$, можно использовать асимптотический метод для вычисления интегралов в правой части (интегралы Лапласа).

В случаях $i = 0, 2, 3$ интегралы могут быть вычислены в элементарных или специальных функциях. Разложение результатов в ряд по большому параметру T_i для первых двух членов дает

$$c^* = 1 - e^{-\frac{1}{4T_0}} \sim \frac{1}{4T_0} - \frac{1}{32T_0^2},$$

$$c^* = 4\left(\frac{1}{2} + 2(e^{-\frac{1}{4T_2}} - 1)T_2\right) \sim \frac{1}{4T_2} - \frac{1}{48T_2^2},$$

$$c^* = \frac{3}{2} - 3\sqrt{T_3}D\left(\frac{1}{2\sqrt{T_3}}\right) \sim \frac{1}{4T_3} - \frac{1}{40T_3^2},$$

где $D(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{y^2} dy$ — интеграл Дюсона [3]. В случае, когда прямое вычисление интеграла невозможно, используем асимптотическую формулу для вычисления интеграла Лапласа (см. [4]):

$$c^* = \frac{1}{4T_1} - \frac{3}{160T_1^2}.$$

Легко заметить, что во всех случаях первое приближение для времени жизни пятна одинаково:

$$T = \frac{1}{4c^*} \tag{2}$$

и совпадает с найденным в статье [1]. Влиянием следующих членов при малых пороговых значениях c^* можно пренебречь.

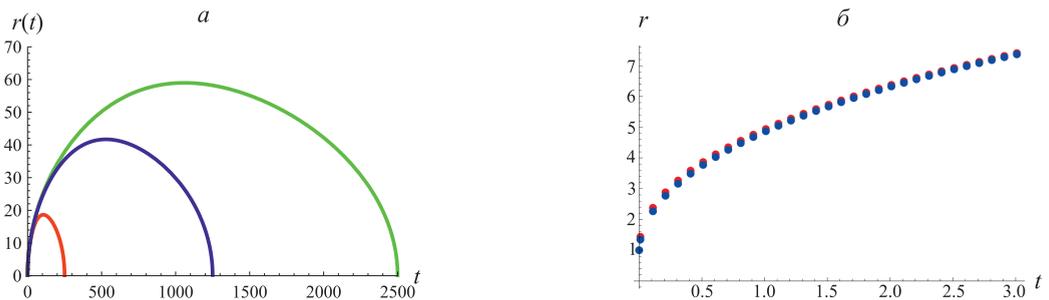


Рис. 2. Зависимость радиуса пятна загрязнения от времени. *a* — при всех значениях времени t при $c^* = 0.001$ (красный), $c^* = 0.0005$ (синий), $c^* = 0.0001$ (зеленый); *б* — при малых значениях времени для начального распределения формы f_2 (красный) и f_0 (синий).

На рис. 2 приведены графики зависимостей радиуса пятна загрязнения от времени при $c^* = 0.001$. Значения функции $r(t)$ находятся численно из формулы (1) при $c(r(t), t) = c^*$ и $F(\lambda) = F_0(\lambda)$.

На рис. 2, *a* построен график функции при всех значениях времени t при различных значениях параметра c^* . Заметим, что время жизни пятна загрязнения хорошо согласуется с формулой (2). Качественное поведение графика совпадает с результатами, приведенными в [5] для точечного источника в случае постоянного значения коэффициента горизонтальной диффузии.

На рис. 2, *б* для небольших значений времени построена зависимость радиуса пятна от времени при различных формах начального распределения диффундирующего вещества. Очевидно, что при одинаковых объемах загрязнения его начальное

распределение по поверхности оказывает слабое влияние на время жизни пятна и его максимальный радиус. Это влияние заметно лишь в короткий промежуток времени после начала распространения пятна и для больших значений пороговой концентрации c^* .

Оценим этот промежуток в размерном времени $\tilde{t} = Kt/t^2$. В работах [6, 7] сообщается о значениях коэффициента K , лежащих в диапазоне от $10^2 \text{ м}^2/\text{с}$ до $10^4 \text{ м}^2/\text{с}$. Если считать, что начальный радиус пятна не превышает 100 м, то получаем $\tilde{t} \leq 100$ сек при $t = 1$.

В следующем разделе рассмотрим только начальное распределение загрязнения вида $f_0(r)$.

4. Определение максимального размера области загрязнения. Численные значения максимального радиуса пятна $r_m = r(T_m)$ и времени T_m , когда он достигается, в зависимости от пороговой концентрации приведены в таблице.

Значения максимального радиуса пятна и времени достижения максимального размера пятна

c^*	T_m	r_m
0.4	0.032	1.032
0.1	0.78	1.92
0.01	9.07	6.07
0.005	18.3	8.58
0.001	91.84	19.18
0.0005	183.3	27.12
0.0001	919.6	60.65

На рис. 3 в логарифмических осях изображены численно найденные точки (T_m, c^*) (красные) и (r_m, c^*) (синие).

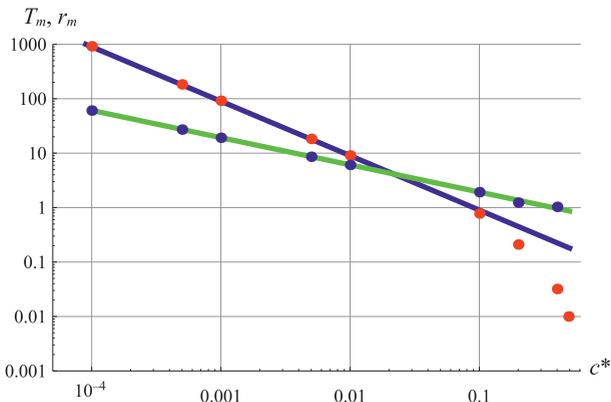


Рис. 3. Зависимости максимального радиуса пятна (синие точки) и времени достижения максимального размера пятна (красные точки) от параметра c^* . Линейные зависимости, полученные методом аппроксимации, для радиуса пятна (зеленая линия) и времени достижения максимального размера пятна (синяя линия).

Заметно, что при малых значениях концентрации зависимости этих параметров в логарифмических шкалах линейны. Поэтому интерполирующие функции следует искать в виде $r_m(c^*) = \alpha_1(c^*)^{\beta_1}$ и $T_m(c^*) = \alpha_2(c^*)^{\beta_2}$. Метод наименьших квадратов

дает $\alpha_1 = 0.606$, $\beta_1 = -0.50019$ и $\alpha_2 = 0.0906$, $\beta_2 = -1.0016$. Графики функций

$$r_m(c^*) = \frac{\alpha_1}{\sqrt{c^*}} \quad \text{и} \quad T_m = \frac{\alpha_2}{c^*} \quad (3)$$

изображены на рис. 3 сплошными линиями.

К сожалению, аналитическое выражение для коэффициентов α_1 и α_2 получить не удалось. Время, при котором радиус пятна максимален, определяется из уравнения

$$\frac{\partial c(r, t)}{\partial t} = - \int_0^{\infty} \lambda^2 J_0(\lambda r(t)) J_1(\lambda) e^{-\lambda^2 t} d\lambda = 0,$$

причем радиус $r(t)$ задается неявно формулой (1). Попытка получения асимптотической оценки r_m для малых c^* успехов не увенчалась.

Представление решения в виде рядов по гипергеометрическим функциям, как это было предложено в [1],

$$c(r, t) = \frac{1}{4t^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (m+1)}{m!} \left(\frac{r^2}{4t}\right)^m {}_2F_1\left(-m, -m, 2, \frac{1}{r^2}\right)$$

или

$$c(r, t) = \frac{1}{4t^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \left(\frac{1}{4t}\right)^m {}_2F_1(-m, -1-m, 1, r^2)$$

также оказалось неприменимо для решения рассматриваемой задачи. Дело в том, что полученные ряды сходятся медленно и для адекватного представления решения для времени t , для которого радиус пятна загрязнения максимален, нужно не менее 5-6-ти членов ряда. Соответственно получающиеся алгебраические уравнения имеют слишком высокий порядок для аналитического решения. Таким образом, вопрос аналитического получения оценок (3) остается открытым.

5. Заключение. Получены выражения для концентрации диффундирующего вещества и оценки времени жизни и размеров пятна загрязнения при различных формах начального распределения диффундирующего вещества. При одинаковых объемах загрязнения форма его начального распределения мало влияет на время существования пятна загрязнения и его размер.

Литература

1. Bestuzheva A. N., Smirnov A. L. Propagation dynamics of a diffusing substance on the surface and in the bulk of water // Vestnik St. Petersburg Univ. Math. 2015. Vol. 48, issue 4. P. 262–270. <https://doi.org/10.3103/S1063454115040044>
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, 2-е издание. М.: Наука, 1974. Т. 2. 296 с.
3. Temme N. M. Error Functions, Dawson's and Fresnel Integrals. Ch. 7. In: NIST Digital Library of Mathematical Functions / eds F. W. J. Olver, A. B. Olde Daalhuis, D. W. Lozier, et al. Cambridge University Press, 2010. URL: <http://dlmf.nist.gov> (accessed: 07.07.2017).
4. Bauer S. M., Smirnov A. L., Filippov S. B., Tovstik P. E., Vaillancourt R. Asymptotic methods in mechanics of solids. In: International Series of Numerical Mathematics. Vol. 167. Birkhauser, 2015.
5. Чхетиани О. Г., Голицын Г. С. Обнаружение и распространение диффузионных пятен смеси и время их жизни // Доклады Академии Наук. 2014. Т. 455, № 5. С. 524–528.

6. Астраханцев Г. П., Меньшуткин В. В., Петрова Н. А., Руховец Л. А. Моделирование экосистем больших стратифицированных озер. СПб.: Наука, 2003. 363 с.
7. Озмидов Р. В. Диффузия примесей в океане. Л.: Гидрометеоздат, 1986.

Статья поступила в редакцию 14 апреля 2017 г.; рекомендована в печать 22 июня 2017 г.

Сведения об авторах

Бестужева Алла Николаевна — кандидат физико-математических наук, доцент; bes_alla@inbox.ru
Смирнов Андрей Леонидович — кандидат физико-математических наук, доцент; a_l_smirnov@mail.ru

EFFECT OF THE INITIAL CONDITIONS ON DISPERSION DYNAMICS OF POLLUTION SPOTS

Alla N. Bestuzheva¹, Andrey L. Smirnov²

¹ St. Petersburg State Transport University, Moskovskiy pr., 9, St. Petersburg, 190031, Russian Federation; bes_alla@inbox.ru

² St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 190034, Russian Federation; a_l_smirnov@mail.ru

Current research results on processes of diffusion of a substance on the water surface are reported. In particular, the influence of initial distribution unevenness of the diffusing substance on dynamic characteristics of the pollution spot is studied. The pollution spot is a domain of the surface, in which the concentration of the diffusing substance is greater than a certain value. Using Fourier's method analytical solutions of boundary value problems for the diffusion equation are found in special functions in unbounded domains. For their analysis asymptotic and numerical methods are used. It has been proved that at identical volumes of pollution its initial distribution on a surface has weak impact not only on the spot's lifetime, but also on its maximum radius. In case of uniform distribution of the substance the maximum size of the pollution spot and the timepoint when it is reached are found. Refs 7. Figs 3. Table 1.

Keywords: diffusing substance, diffusion equation, pollution spot.

References

1. Bestuzheva A. N., Smirnov A. L., "Propagation dynamics of a diffusing substance on the surface and in the bulk of water", *Vestnik St. Petersburg Univ. Math.* **48**, issue 4, 262–270 (2015). <https://doi.org/10.3103/S1063454115040044>
2. Bateman H., Erdelyi A., *Higher transcendental functions* **2** (Dover Publ., 2007, 416 p.).
3. Temme N. M., *Error Functions, Dawson's and Fresnel Integrals. Ch. 7*. In: *NIST Digital Library of Mathematical Functions* (eds F. W. J. Olver, A. B. Olde Daalhuis, D. W. Lozier, et al, Cambridge University Press, 2010). Available at: <http://dlmf.nist.gov> (accessed: July 7, 2017).
4. Bauer S. M., Smirnov A. L., Filippov S. B., Tovstik P. E., Vaillancourt R., *Asymptotic methods in mechanics of solids*. In: *International Series of Numerical Mathematics* **167** (Birkhauser, 2015).
5. Chkhetiani O. G., Golitsyn G. S., "Detection and dispersion of diffusion tracer spots and their life times", *Doklady Mathematics* **89**(2), 245–249 (2014).
6. Astrakhansev G. P., Menshutkin V. V., Petrova N. A., Rukhovets L. A., *Modelling of ecosystems of large stratified lakes* (Nauka Publ., St. Petersburg, 2003, 363 p.) [in Russian].
7. Ozmidov R. V., *Diffusion of contaminants in the ocean* (Kluwer Academic Publishers, 1990, 283 p.).

Для цитирования: Бестужева А. Н., Смирнов А. Л. Влияние начальных условий на динамику распространения диффундирующего вещества // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 4. С. 664–670. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.414>

For citation: Bestuzheva A. N., Smirnov A. L. Effect of the initial conditions on dispersion dynamics of pollution spots. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2017, vol. 4 (62), issue 4, pp. 664–670. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.414>