

РЯД ЛАПЛАСА ЭЛЛИпсоИДАЛЬНЫХ ФИГУР ВРАЩЕНИЯ*

К. В. Холшевников^{1,2}, Д. В. Миланов¹, В. Ш. Шайдуллин¹

¹ Санкт-Петербургский государственный университет,

Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

² Институт прикладной астрономии РАН,

Российская Федерация, 191187, Санкт-Петербург, наб. Кутузова, 10

Теория фигур равновесия активно развивалась в XIX столетии, когда выяснились причины, по которым наблюдаемые массивные небесные тела (Солнце, планеты, спутники) обладают близкой к эллипсоидальной формой. Было установлено, что существуют и в точности эллипсоидальные фигуры. Гравитационный потенциал таких фигур представляется рядом Лапласа, коэффициенты которого (постоянные Стокса I_n) определяются некоторым интегральным оператором. В случае эллипсоида вращения, эквиденситы (поверхности равной плотности) которого подобны, был найден общий член ряда, а для некоторых других распределений масс найдены первые члены ряда. Здесь мы получили общий член ряда при условии, что эквиденситы являются эллипсоидами вращения с возрастающим от центра к периферии сжатием. Получены также простые оценки и асимптотика I_n . Оказалось, что асимптотика зависит только от средней плотности, плотности на поверхности внешнего эллипсоида и его сжатия. Библиогр. 12 назв. Ил. 1.

Ключевые слова: гравитационный потенциал, ряд Лапласа, коэффициенты Стокса, эллипсоид вращения.

Введение. Представление гравитационного потенциала эллипсоидов со времен Ньютона являлось важной областью математического естествознания. Сотни работ посвящены этой теме. Результаты собраны в многочисленных монографиях (см., например, [1–8]). В частности, еще Лежандр [9] сумел вычислить коэффициенты Стокса ряда Лапласа однородного эллипсоида вращения, и этот результат приводится в учебниках и монографиях. В работе [10] он обобщен на случай эллипсоида вращения, эквиденситы (поверхности равной плотности) которого подобны внешней поверхности эллипсоида, а в остальном распределение масс произвольно. Здесь мы приводим дальнейшее обобщение, предполагая эквиденситы произвольными эллипсоидами, подчиненными лишь ограничению возрастания их сжатия от центра к периферии. Как показал Клеро [1, гл. 4; 8, гл. 1], это условие выполняется для равномерно вращающихся фигур, находящихся в равновесии под действием гравитации, гидростатического давления и центробежных сил.

Коэффициенты Стокса; интегральная формула. Введем криволинейные координаты, удобные для исследования эллипсоидальных фигур вращения,

$$\begin{aligned}x &= au \sin \theta \cos \lambda, \\y &= au \sin \theta \sin \lambda, \\z &= a\varphi(u) \cos \theta.\end{aligned}\tag{1}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Программы проведения фундаментальных исследований СПбГУ по приоритетным направлениям (грант 6.37.341.2015) и РФФИ (грант № 17-02-00542).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2017

Сплошной эллипсоид $T \in \mathbb{R}^3$ представляет собой образ множества $[0, 1] \times [0, \pi] \times [0; 2\pi]$ при отображении (1) и расслаивается на семейство эллипсоидов вращения $\{S(u)\}$

$$\frac{x^2 + y^2}{u^2} + \frac{z^2}{\varphi^2(u)} = a^2 \quad (2)$$

с экваториальной и полярной полуосями $au, a\varphi(u)$ соответственно. Если отвлечься от физики, то безразмерную вместе с u функцию φ , определяющую вид семейства $\{S(u)\}$, можно считать практически произвольной. Однако тогда придется рассматривать много различных случаев, не имеющих физического смысла. Чтобы избежать этого, считаем функцию φ гладкой на промежутке $0 \leq u \leq 1$, и, кроме того, наложим еще четыре условия.

- Поверхности семейства $\{S(u)\}$ не пересекаются и вложены друг в друга.
- Семейство $\{S(u)\}$ стягивается к точке $S(0)$, общему центру эллипсоидов $S(u)$.
- Эллипсоиды $S(u)$ сжаты, причем сжатие $(u - \varphi)/u$, а тем самым и квадрат первого $\varphi_1(u) = (u^2 - \varphi^2)/u^2$ и квадрат второго эксцентриситета $\varphi_2(u) = (u^2 - \varphi^2)/\varphi^2$ меридионального сечения эллипсоида возрастают (хотя бы нестрого) вместе с u .
- Наружный эллипсоид $S(1)$ не является сферой, так что с учетом первого условия его сжатие заключено строго между нулем и единицей.

В случае твердотельно вращающихся самогравитирующих фигур равновесия эти условия выполнены [1, гл. 4]. Из них легко вывести следующие свойства функции φ : она строго возрастает на отрезке $[0, 1]$, причем

$$0 = \varphi(0) \leq \varphi(u) \leq \varphi(1) = \frac{c}{a}, \quad 0 < c < a, \quad \left(\frac{\varphi}{u}\right)' \leq 0, \quad 0 \leq \varphi' \leq \frac{\varphi}{u} \leq 1. \quad (3)$$

В частности, отношение $\varphi(u)/u$ непрерывно в нуле, причем

$$\frac{c}{a} \leq \frac{\varphi(u)}{u} \leq \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\varphi(u)}{u} = \varphi'(0) \leq 1. \quad (4)$$

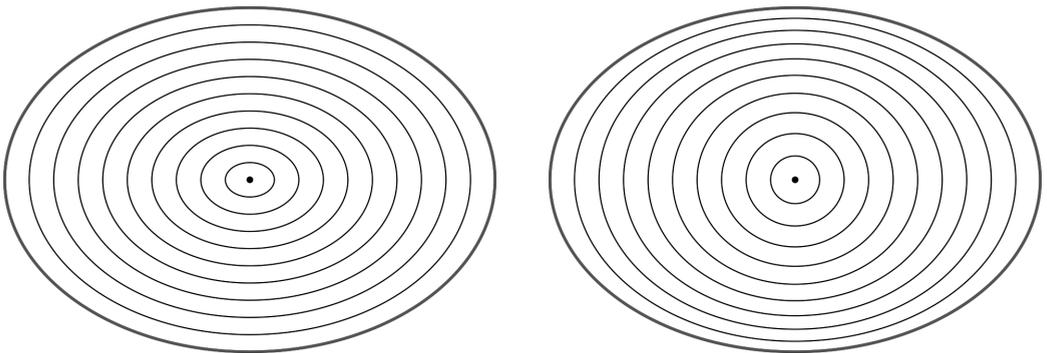


Рис. 1. Сечение меридиональной плоскостью эллипсоида T и семейства стягивающихся к точке эквиденсит; $c/a = 0.7$; слева — $\varphi(u) = 0.7u$ (эллипсоиды $S(u)$ подобны), справа — $\varphi(u) = u - 0.3u^2$ (сжатие эллипсоидов $S(u)$ возрастает от центра к краю).

Якобиан отображения (1) определяется формулой

$$\mathfrak{J} = a^3 u \varphi(u) \sin \theta [1 - \varphi_3(u) \cos^2 \theta], \quad (5)$$

где здесь и ниже

$$\varphi_1 = 1 - \frac{\varphi^2}{u^2}, \quad \varphi_2 = \frac{u^2}{\varphi^2} - 1, \quad \frac{\varphi_2}{1 + \varphi_2} = \varphi_1, \quad \varphi_3 = 1 - \frac{\varphi'}{\varphi} u, \quad \varphi_4 = \frac{\varphi' u^3}{\varphi^3} - 1. \quad (6)$$

Из (3) следует, что функции φ_1, φ_2 возрастают вместе с u (хотя бы нестрого), причем

$$0 \leq \varphi_1(u) \leq \varphi_1(1) = 1 - \frac{c^2}{a^2} = \varepsilon^2, \quad 0 \leq \varphi_2(u) \leq \varphi_2(1) = \frac{a^2}{c^2} - 1 = \tilde{\varepsilon}^2, \quad 0 \leq \varphi_3(u) \leq 1. \quad (7)$$

Здесь $\varepsilon, \tilde{\varepsilon}$ — первый и второй эксцентриситеты меридионального сечения наружного эллипса. Из последнего неравенства (7) следует, что якобиан (5) неотрицателен и обращается в нуль лишь при $\sin \theta = 0$ или $u\varphi(u) = 0$.

Пусть T — эллипсоидальная фигура, эквиденситы которой являются эллипсоидами $S(u)$, так что плотность ρ тела зависит только от u . Считаем ее интегрируемой и ограниченной.

По симметрии ряд Лапласа гравитационного потенциала V тела T содержит лишь зональные гармоники четного порядка [7]:

$$V = \frac{\mathcal{G}M}{a} \sum_{n=0}^{\infty} I_{2n} \left(\frac{a}{r}\right)^{2n+1} P_{2n} \left(\frac{z}{r}\right). \quad (8)$$

Здесь \mathcal{G} — гравитационная постоянная, M — масса T ,

$$I_{2n} = \frac{1}{Ma^{2n}} \int_T r^{2n} P_{2n} \left(\frac{z}{r}\right) \rho d\tau, \quad M = \int_T \rho d\tau, \quad (9)$$

где $d\tau$ — элемент объема, P_s — многочлен Лежандра со стандартной нормировкой $P_s(1) = 1$. Обратим внимание, что a является радиусом объемлющей T сферы.

Выразим интересующие нас функции через координаты u, θ, λ :

$$r = au\sqrt{1 - \varphi_1(u) \cos^2 \theta}, \quad \frac{z}{r} = \frac{\varphi(u) \cos \theta}{u\sqrt{1 - \varphi_1(u) \cos^2 \theta}}. \quad (10)$$

Вычисляя в (9) интеграл по λ (а для массы и по θ), получим с учетом (5)

$$I_{2n} = \frac{2\pi a^3}{M} \int_0^1 u^{2n+1} \varphi(u) \rho(u) du \int_0^\pi [1 - \varphi_1(u) \cos^2 \theta]^n [1 - \varphi_3(u) \cos^2 \theta] P_{2n} \left(\frac{z}{r}\right) \sin \theta d\theta, \quad (11)$$

$$M = \frac{4\pi a^3}{3} \int_0^1 \rho u (2\varphi + \varphi' u) du. \quad (12)$$

Но проще выразить массу через среднюю плотность $\bar{\rho}$ (отношение массы к объему):

$$M = \frac{4\pi a^2 c}{3} \bar{\rho}, \quad \bar{\rho} = \frac{a}{c} \int_0^1 \rho u (2\varphi + \varphi' u) du. \quad (13)$$

В интеграле по θ совершим замену переменных:

$$\xi = \frac{\varphi \cos \theta}{u \sqrt{1 - \varphi_1 \cos^2 \theta}}, \quad \cos \theta = \frac{u \xi}{\varphi \sqrt{1 + \varphi_2 \xi^2}}, \quad 1 - \varphi_1 \cos^2 \theta = \frac{1}{1 + \varphi_2 \xi^2},$$

$$1 - \varphi_3 \cos^2 \theta = \frac{1 + \varphi_4 \xi^2}{1 + \varphi_2 \xi^2}, \quad \sin \theta d\theta = -\frac{u d\xi}{\varphi(1 + \varphi_2 \xi^2)^{3/2}}.$$

Очевидно, ξ обращается в ± 1 на концах промежутка $0 \leq \theta \leq \pi$. Согласно (4) имеем $u/\varphi \geq 1$, а из последнего неравенства (7) вытекает положительность $1 + \varphi_2 \xi^2$. Поэтому ξ строго убывает от 1 до -1 с ростом φ от нуля до π .

В понятных обозначениях можем записать

$$\int_0^\pi = \frac{u}{\varphi} w(u), \quad w(u) = \int_{-1}^1 \frac{1 + \varphi_4 \xi^2}{(1 + \varphi_2 \xi^2)^{n+5/2}} P_{2n}(\xi) d\xi. \quad (14)$$

Запишем $w(u)$ в виде

$$w(u) = F(p) + (\varphi_4 - \varphi_2) F_1(p), \quad p = \varphi_2(u),$$

$$F(p) = \int_{-1}^1 \frac{P_{2n}(\xi) d\xi}{(1 + p\xi^2)^{n+3/2}}, \quad F_1(p) = \int_{-1}^1 \frac{\xi^2 P_{2n}(\xi) d\xi}{(1 + p\xi^2)^{n+5/2}} = -\frac{2}{2n+3} F'(p). \quad (15)$$

Первый интеграл в (15) найден Лежандром и приведен, например, в [4, 5, 10]. Для $p > -1$ получаем

$$F(p) = \frac{2(-1)^n p^n}{(2n+1)(1+p)^{n+1/2}}, \quad F_1(p) = \frac{2(-1)^n p^{n-1}(p-2n)}{(2n+1)(2n+3)(1+p)^{n+3/2}}, \quad (16)$$

так что

$$w(u) = \frac{2(-1)^n \varphi_2^n}{(2n+1)(2n+3)(1+\varphi_2)^{n+3/2}} (2n\varphi_5 + \varphi_6), \quad (17)$$

где

$$\varphi_5 = 2 + \varphi_2 - \frac{\varphi_4}{\varphi_2} = \frac{u^2}{\varphi^2 \varphi_1} \left(1 - \frac{\varphi}{u} \varphi'\right), \quad \varphi_6 = 3 + 2\varphi_2 + \varphi_4 = \frac{u^2}{\varphi^2} \left(2 + \frac{\varphi'}{\varphi} u\right).$$

Замечание. Первое (а с ним и второе) равенство (16) доказаны классиками при условии $|p| < 1$. Покажем, что это условие излишне.

Рассмотрим F как определяемую интегралом (15) функцию комплексной переменной p , зависящую также от целочисленного параметра n . Она голоморфна на луче $p > -1$ и совпадает с функцией (16) при $-1 < p < 1$. По принципу аналитического продолжения она совпадает на всем луче.

Подставляя (14), (17) в (11) с учетом (6), (13) и заменяя $2n$ на n , представим выражение для коэффициентов Стокса с четными индексами в виде

$$I_n = (-1)^{n/2} J_n, \quad J_n = \frac{3a}{(n+1)(n+3)c\bar{\rho}} \int_0^1 \varrho W_n du, \quad W_n = u^{n+1} \varphi \varphi_1^{n/2} [(n+3)\varphi_7 - \varphi_8]. \quad (18)$$

Здесь φ_7, φ_8 определяются равенствами

$$\varphi_1\varphi_7 = 1 - \frac{\varphi}{u}\varphi', \quad \varphi_1\varphi_8 = 3\left(1 - \frac{\varphi}{u}\varphi'\right) - \left(1 - \frac{\varphi^2}{u^2}\right)\left(2 + \frac{u}{\varphi}\varphi'\right). \quad (19)$$

Оценки коэффициентов Стокса. Заменяя в правой части (19) φ' на φ/u , получим в силу последнего неравенства (3)

$$\varphi_1\varphi_8 \geq \left(1 - \frac{\varphi^2}{u^2}\right)(3 - 3) = 0.$$

С другой стороны, $3\varphi_7 - \varphi_8 \geq 0$. Поэтому можем записать

$$0 < J_n < \frac{3a}{(n+1)c\bar{\rho}} \int_0^1 \rho u^{n+1} \varphi \varphi_7 \varphi_1^{n/2} du. \quad (20)$$

Обозначив $\varrho^* = \sup \varrho(u)u^2$ и используя неравенство (3) для φ , запишем

$$J_n < \frac{3\varrho^*}{(n+1)\bar{\rho}} \int_0^1 (u^2\varphi_1)^{n/2-1} u \varphi_1 \varphi_7 du. \quad (21)$$

Подстановка

$$t(u) = u^2\varphi_1(u) = u^2 - \varphi^2(u), \quad dt = 2u\varphi_1(u)\varphi_7(u) du \quad (22)$$

позволяет найти значение последнего интеграла:

$$\frac{1}{2} \int_{t(0)}^{t(1)} t^{n/2-1} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\varepsilon^2} t^{n/2-1} dt = \frac{\varepsilon^n}{n}. \quad (23)$$

Окончательно, получаем

$$0 < J_n < \frac{B\varepsilon^n}{n(n+1)}, \quad B = 3\frac{\varrho^*}{\bar{\rho}}. \quad (24)$$

Асимптотика коэффициентов Стокса при $n \rightarrow \infty$. Асимптотику J_n нетрудно получить при дополнительных условиях непрерывности ϱ в точке $u = 1$ и $\varrho(1) > 0$. Представим (18) в виде

$$\frac{c\bar{\rho}n^2}{3a\varepsilon^n} J_n \sim G_n, \quad (25)$$

где

$$G_n = \int_0^1 H_n(u)u^{n+1} du, \quad H_n(u) = \frac{n}{\varepsilon^n} \varrho(u)\varphi(u)\varphi_7(u)\varphi_1^{n/2}(u). \quad (26)$$

Разобьем интервал интегрирования на два точкой $v = 1 - 1/\sqrt{n}$. Очевидно,

$$\int_0^v H_n(u)u^{n+1} du \leq \max_{0 \leq u \leq 1} [u^2 H_n(u)] \frac{v^n}{n} \leq \varrho^* \frac{c}{a\varepsilon^2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n, \quad (27)$$

что стремится к нулю в силу

$$\left[\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} \right]^{\sqrt{n}} \sim e^{-\sqrt{n}} \rightarrow 0. \quad (28)$$

Подстановка (22) преобразует интеграл по правому промежутку к виду

$$\frac{n}{2\varepsilon^n} \int_{t(v)}^{t(1)} \frac{\varrho\varphi}{\varphi_1} t^{n/2} dt = \frac{n}{2\varepsilon^n} h \int_{t(v)}^{t(1)} t^{n/2} dt \sim \frac{h}{\varepsilon^n} \left[t^{n/2+1}(1) - t^{n/2+1}(v) \right], \quad (29)$$

где h лежит между нижней и верхней гранями функции $\varrho(u)\varphi(u)/\varphi_1(u)$ на отрезке $v \leq u \leq 1$. По непрерывности $h \rightarrow (c/a)\varrho(1)\varepsilon^{-2}$, а в силу (28) $t^{n/2+1}(v) \rightarrow 0$. Таким образом, получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n = \frac{c}{a} \varrho(1). \quad (30)$$

Соотношения (25), (30) влекут искомую асимптотику

$$J_n \sim \frac{B_0 \varepsilon^n}{n^\sigma}, \quad \sigma = 2, \quad B_0 = \frac{3\rho(1)}{\bar{\varrho}}. \quad (31)$$

Интересно, что асимптотика зависит только от средней плотности, поверхностной плотности и эксцентриситета внешнего эллипсоида. Обратим также внимание на сходство формул (24) и (31).

Бесконечная в центре плотность. Плотность небесных тел в центре может быть весьма большой. Например, в центре Солнца плотность на 9 порядков выше, чем на границе фотосферы [11]. Поэтому допустима модель убывающей с ростом u плотности, бесконечной в точке $u = 0$, но интегрируемой по объему. Иными словами, интегрируемой должна быть функция $u^2 \varrho(u)$. По принципу поверхностного слоя [7, 12] это не влияет на полученные выше результаты. Впрочем, это легко доказать и формально, выделяя в T малое ядро.

Плотность, ограниченная сверху, но не снизу. Если $\varrho(1) = 0$, то коэффициенты Стокса убывают быстрее.

Пусть в окрестности единицы $\varrho(u) = \varrho_0(u)(1-u)^\nu$, где $\nu \geq 0$, $\varrho_0(u)$ ограничена и непрерывна в единице, и $\varrho_0(1) > 0$. Рассмотрим сначала случай линейной в окрестности единицы функции φ :

$$\varphi(u) = p + qu, \quad q = \varphi'(u) = \text{const}, \quad p + q = \varphi(1) = \sqrt{1 - \varepsilon^2}, \quad (32)$$

поскольку $\varphi(1) = c/a = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$ согласно (3). Действуя, как и в случае $\varrho(1) > 0$, убеждаемся в справедливости формул (26), (28). Соотношение (29) переходит в

$$\int_v^1 H_n(u) u^{n+1} du = \frac{n}{2\varepsilon^n} \int_{t(v)}^{t(1)} \frac{\varrho\varphi}{\varphi_1} t^{n/2} dt = \frac{n}{2\varepsilon^n} h_1 h_2, \quad h_1 = \int_{t(v)}^{t(1)} (1-u)^\nu t^{n/2} dt, \quad (33)$$

а h_2 лежит между нижней и верхней гранями функции $\varrho_0(u)\varphi(u)/\varphi_1(u)$ на отрезке $v \leq u \leq 1$. Соотношения (22), (32) с учетом положительности u позволяют выразить u через t :

$$t = (1 - q^2)u^2 - 2pqu - p^2, \quad u = \frac{pq + \sqrt{p^2 + (1 - q^2)t}}{1 - q^2}. \quad (34)$$

Избавляясь от иррациональности в числителе, представим $1 - u$ в виде

$$1 - u = h_3(1 - Kt), \quad h_3 = \frac{(1 - pq - q^2)^2 - p^2}{(1 - q^2) \left[1 - pq - q^2 + \sqrt{p^2 + (1 - q^2)t} \right]}, \quad (35)$$

$$K = \frac{1 - q^2}{(1 - pq - q^2)^2 - p^2}.$$

Заметим, что выполняется равенство

$$(1 - pq - q^2)^2 - p^2 = (1 - q^2) [1 - (p + q)^2] = \varepsilon^2(1 - q^2), \quad (36)$$

так что $K = 1/\varepsilon^2$. В силу (34) имеем $t(1) = 1 - (p + q)^2 = \varepsilon^2$, так что

$$p^2 + (1 - q^2)t(1) = (1 - pq - q^2)^2, \\ h_3(1) = \frac{\varepsilon^2}{2[(1 - q(p + q))]} = \frac{\varepsilon^2}{2[(1 - \varphi'(1))]}, \quad 0 < h_3(1) < \infty. \quad (37)$$

По непрерывности функция $h_3(t)$ конечна и положительна на отрезке интегрирования в (33). Поэтому последний интеграл (33) равен

$$h_1 = h_4^\nu \int_{t(v)}^{t(1)} (1 - Kt)^\nu t^{n/2} dt,$$

где h_4 лежит между нижней и верхней гранями функции $h_3(t)$ на отрезке $t(v) \leq t \leq t(1)$. Подстановка $y = Kt$ дает

$$h_1 = h_4^\nu K^{-n/2-1} h_5, \quad h_5 = \int_{Kt(v)}^1 (1 - y)^\nu y^{n/2} dy \quad (38)$$

или

$$h_5 = \int_0^1 (1 - y)^\nu y^{n/2} dy - \int_0^{Kt(v)} (1 - y)^\nu y^{n/2} dy. \quad (39)$$

Соотношения типа (27), (28) показывают, что последний интеграл экспоненциально убывает. Поэтому можем записать

$$h_5 \sim \int_0^1 (1 - y)^\nu y^{n/2} dy = B \left(\frac{n}{2} + 1, \nu + 1 \right) \sim \Gamma(\nu + 1) \left(\frac{2}{n} \right)^{\nu+1}. \quad (40)$$

Собирая соотношения (25), (26), (33), (38), (40), получим окончательно

$$J_n \sim \frac{B_1 \varepsilon^n}{n^\sigma}, \quad \sigma = \nu + 2, \quad B_1 = \frac{3 \varrho_0 \Gamma(\nu + 1)}{\bar{\varrho}} B_2^\nu, \quad B_2 = \frac{\varepsilon^2}{1 - \varphi'(1)}. \quad (41)$$

Постоянную B_2 легко оценить:

$$B_2 = \frac{\varepsilon^2}{1 - q\sqrt{1 - \varepsilon^2}}, \quad \varepsilon^2 < B_2 \leq 1,$$

поскольку $0 < q \leq p + q = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$. Для подобных эллипсоидов $S(u)$, как легко показать, $B_2 = 1$. Оценка (41) совпадает в этом случае с полученной в [10].

Перейдем к произвольной дифференцируемой функции $\varphi = p + qu + o_{u \rightarrow 1}(1 - u)$. Возьмем $\delta > 0$ и линейные функции $\varphi^+ = p - \delta + (q + \delta)u$ и $\varphi^- = p + \delta + (q - \delta)u$. Для достаточно больших n будет выполнено

$$(1 - \delta) \int_v^1 \varrho \varphi^+ \varphi_7^+ (\varphi_1^+)^{n/2} \leq \int_v^1 \varrho \varphi \varphi_7 \varphi_1^{n/2} \leq (1 + \delta) \int_v^1 \varrho \varphi^- \varphi_7^- (\varphi_1^-)^{n/2}.$$

Разделив неравенство на ε^n/n^ν , убеждаемся в том, что главный член асимптотики зависит только от коэффициентов линейного приближения и имеет вид (41).

Заключение. Мы определили коэффициенты Стокса сплошного эллипсоида, поверхности равной плотности которого являются эллипсоидами вращения, подчиненными лишь естественному ограничению возрастания сжатия от центра к периферии. В случае ограниченной сверху и отделенной от нуля плотности коэффициенты убывают по закону (31), причем $\sigma = 2$. Если плотность спадает до нуля на поверхности, то σ может быть произвольным числом, большим двух, в зависимости от скорости убывания плотности. Если плотность бесконечна в центре масс, это не влияет на оценки (24), (31).

Полученные простые оценки и асимптотика позволяют найти область сходимости ряда Лапласа (8). При любом законе изменения эквиденсит и любой функции $\rho(u)$ (при указанных ограничениях) эта область одна и та же: $r \geq a\varepsilon$. Впрочем, уже для градиента потенциала ряд расходится (или сходится условно) в некоторых точках сферы $r = a\varepsilon$. Напомним, что ряд Лапласа сходится именно к потенциалу (т.е. в (8) имеет место равенство) в пересечении указанной области и внешнего к эллипсоиду пространства. Таким образом, ряд (8) представляет потенциал во всем внешнем пространстве при $\varepsilon \leq 1/\sqrt{2} = 0.707107$ или, что то же, $c/a \geq 1/\sqrt{2}$. В противном случае ряд расходится в части внешнего пространства в окрестности полюсов.

Литература

1. Пуанкаре А. Фигуры равновесия жидкой массы. М.; Ижевск: РХД, 2000. 208 с.
2. Аппель П. Фигуры равновесия вращающейся жидкости. Л.; М.: ОНТИ, 1936. 376 с.
3. Сретенский Л. Н. Теория ньютоновского потенциала. М.; Л.: ГИТТЛ, 1946. 320 с.
4. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: ИЛ, 1952. 476 с.
5. Дубошин Г. Н. Теория притяжения. М.: Физматлит, 1961. 288 с.
6. Чандрасекар С. Эллипсоидальные фигуры равновесия. М.: Мир, 1973. 289 с.
7. Антонов В. А., Тимошкова Е. И., Холшевников К. В. Введение в теорию ньютоновского потенциала. М.: Наука, 1988. 270 с.
8. Кондратьев Б. П. Теория потенциала и фигуры равновесия. М.; Ижевск: Изд. ИКИ, 2003. 624 с.
9. Legendre A. M. Mémoires présentés par les savants étrangers. 1785. Vol. X.
10. Холшевников К. В., Миланов Д. В., Шайдулин В. Ш. Коэффициенты Стокса сжатого эллипсоида вращения, эквиденситы которого подобны его поверхности // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4(62). Вып. 3. С. 516–524.
11. Guenther D. B., Demarque P., Kim Y. C., Pinsonneault M. H. Standard solar model // The Astrophysical Journal. 1992. Vol. 387. P. 372–393.
12. Kholshchevnikov K. V., Shaidulin V. Sh. Existence of a class of irregular bodies with a higher convergence rate of Laplace series for the gravitational potential // Celest. Mech. Dyn. Astr. 2015. Vol. 122, issue 4. P. 391–403.

Статья поступила в редакцию 2 марта 2017 г.; рекомендована в печать 22 июня 2017 г.

Сведения об авторах

Холшевников Константин Владиславович — доктор физико-математических наук, профессор; kvk@astro.spbu.ru

Миланов Данила Владимирович — аспирант; danila.milanov@gmail.com

Шайдулин Вахит Шамилевич — кандидат физико-математических наук, доцент; shvak@yandex.ru

LAPLACE SERIES OF ELLIPSOIDAL FIGURES OF REVOLUTION

Konstantin V. Kholoshevnikov^{1,2}, Danila V. Milanov¹, Vakhit Sh. Shaidulin¹

¹ St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 190034, Russian Federation; kvk@astro.spbu.ru, danila.milanov@gmail.com, shvak@yandex.ru

² Institute of Applied Astronomy RAS, nab. Kutuzova, 10, St. Petersburg, 191187, Russian Federation; kvk@astro.spbu.ru

Theory of the figures of equilibrium was developed actively during XIX century when causes making the form of observable massive celestial bodies (the Sun, planets, moons) almost ellipsoidal were discovered. The existence of exactly ellipsoidal figures was established. The gravitational potential of such figures can be presented by Laplace series. Its coefficients (Stokes constants I_n) are defined by a certain integral operator. The general term of the series was found under condition that equidensities (surfaces of equal density) are homothetic to the outer surface of the ellipsoid of revolution. First few terms were found for several other mass distributions. Here we have found the general term of the series under condition that equidensities are ellipsoids of revolution with an oblateness increasing from the centre to the surface. Simple estimates and asymptotics of I_n are also found. It turned out that asymptotics depends on the mean density, the density on the surface of the outer ellipsoid, and its oblateness only. Refs 12. Fig. 1.

Keywords: gravitational potential, Laplace series, Stokes coefficients, ellipsoid.

References

1. Poincaré H., *Figures d'équilibre d'une masse fluide* (Gauthier-Villars, Paris, 1900) [in French].
2. Appell P., *Figures d'équilibre d'une masse liquide homogène en rotation* (Gauthier-Villars, Paris, 1932) [in French].
3. Sretensky L.N., *Theory of Newtonian Potential* (GITTL Publ., Moscow, Leningrad, 1946, 320 p.) [in Russian].
4. Hobson E.W., *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1931, 476 p.).
5. Duboshin G.N., *Theory of Attraction* (Fizmatlit Publ., Moscow, 1961, 288 p.) [in Russian].
6. Chandrasekhar S., *Ellipsoidal Figures of Equilibrium* (Dover Publ., New York, 1987, 264 p.).
7. Antonov V.A., Timoshkova E.I., Kholoshevnikov K.V., *Introduction to the Theory of Newtonian Potential* (Nauka Publ., Moscow, 1988, 270 p.) [in Russian].
8. Kondratiev B.P., *Theory of Potential, and Figures of Equilibrium* (Inst. Kosm. Res. Publ., Moscow, Ijevsk, 2003, 624 p.) [in Russian].
9. Legendre A.M., *Mémoires présentées par les savants étrangers* (1785, X) [in French].
10. Kholoshevnikov K.V., Milanov D.V., Shaidulin V.Sh., “Stokes constants of an oblate ellipsoid of revolution with equidensities homothetic to its surface”, *Vestnik St. Petersburg Univ. Math.* **50**, issue 3, 318–324 (2017).
11. Guenther D.B., Demarque P., Kim Y.C., Pinsonneault M.H., “Standard solar model”, *The Astrophysical Journal* **387**, 372–393 (1992).
12. Kholoshevnikov K.V., Shaidulin V.Sh., “Existence of a class of irregular bodies with a higher convergence rate of Laplace series for the gravitational potential”, *Celest. Mech. Dyn. Astr.* **122**(4), 391–403 (2015). <https://doi.org/10.1007/s10569-015-9622-7>

Для цитирования: Холшевников К. В., Миланов Д. В., Шайдулин В. Ш. Ряд Лапласа эллипсоидальных фигур вращения // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 4. С. 695–703. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.417>

For citation: Kholoshevnikov K.V., Milanov D.V., Shaidulin V.Sh. Laplace series of ellipsoidal figures of revolution. *Vestnik SPbSU. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2017, vol. 4(62), issue 4, pp. 695–703. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.417>