УДК 511.22 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 3 (61). 2016. Вып. 4

# РЕГУЛЯРНЫЕ ФОРМАЛЬНЫЕ МОДУЛИ В ОДНОМЕРНЫХ ЛОКАЛЬНЫХ ПОЛЯХ*

*С. М. Власьев, С. В. Востоков, А. А. Горшков*

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

В работе исследуется проблема описания неразветвленных расширений локального поля, которые вместе с основным полем не содержат нетривиальных корней изогении формальной группы, заданной над кольцом целых этого поля. Эта задача возникла при изучении расширений без высшего ветвления для мультипликативных формальных групп в работе З. И. Боревича (1962). Библиогр. 6 назв.

*Ключевые слова*: локальное поле, вполне регулярное локальное поле, формальный модуль, формальная группа.

**1. Введение.** При исследовании нормальных расширений без высшего ветвления возникла задача описания всех неразветвленных расширений локального поля, которые вместе с основным полем являются *регулярными*, то есть не содержащими нетривиальных $p$-х корней из 1 (где $p$ — характеристика поля вычетов локального поля). Основное локальное поле при этом называется *вполне регулярным*. Эта задача была решена З. И. Боревичем в работе [1]. Основной результат этой работы, доказательство которого было упрощено Д. К. Фаддеевым и приведено там же, является следующим.

**Теорема 1.1. (З. И. Боревич, 1962).** *Для того чтобы локальное поле $K$ было вполне регулярным, необходимо и достаточно, чтобы показатель ветвления $e$ расширения $K/\mathbb{Q}_p$ не делился на $p-1$.*

Аналогичная задача возникает в арифметике формальных модулей. Она и решается в настоящей работе. Чтобы сформулировать эту задачу в общем случае, введем необходимые обозначения.

Пусть $K$ — локальное поле, $\mathfrak{O}_K$ — его кольцо целых, $\mathfrak{M}_K$ — максимальный идеал в $\mathfrak{O}_K$, $F(X,Y)$ — одномерная коммутативная формальная группа над $\mathfrak{O}_K$ (далее мы будем писать просто формальная группа), $i(X)$ — ее обратный элемент. Заметим, что на множестве $\mathfrak{M}_K$ можно задать структуру группы:

$$(\alpha +_F \beta)(X) = F(\alpha,\beta), \quad \alpha,\beta \in \mathfrak{M}_K,$$

$$(-_F\alpha)(X) = i(\alpha), \quad \alpha \in \mathfrak{M}_K.$$

Теперь пусть $\pi_0$ — простой элемент в подполе $K_0$ поля $K$, $F(X,Y)$ — формальная группа над $\mathfrak{O}_K$ такая, что $\mathrm{End}_{\mathfrak{O}_K}(F) \cong \mathfrak{O}_{K_0}$.

**Определение 1.1.** Под *формальным $\mathfrak{O}_{K_0}$-модулем $F(\mathfrak{M}_K)$* мы будем понимать $\mathfrak{O}_{K_0}$-модуль, построенный на максимальном идеале $\mathfrak{M}_K$ кольца целых $\mathfrak{O}_K$ с помощью следующих операций:

$$\alpha +_F \beta := F(\alpha,\beta), \quad a\cdot\alpha := [a]_F(\alpha), \quad a \in \mathfrak{O}_{K_0}, \quad \alpha,\beta \in \mathfrak{M}_K.$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-01-00393).



 DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.403

**Определение 1.2.** Обобщая определение регулярного локального поля в работе З. И. Боревича, мы называем локальное поле $K$ (а вместе с ним и формальный модуль $F(\mathfrak{M}_K)$) *регулярным относительно формальной группы* $F$, если $K$ (а значит, и $F(\mathfrak{M}_K)$) не содержит нетривиальных корней изогении $[\pi_0]_F$.

**Определение 1.3.** Будем называть локальное поле $K$ (а вместе с ним и формальный модуль $F(\mathfrak{M}_K)$) ***вполне*** *регулярным относительно формальной группы* $F$, если любое его конечное неразветвленное расширение $L/K$ (а значит и $F(\mathfrak{M}_L)$) является регулярным относительно формальной группы $F$.

Например, пусть $F_m = X + Y + XY$ — мультипликативная формальная группа. Эндоморфизмы умножения в $F_m$ для $r \in \mathbb{N}$ имеют вид

$$[r]_{F_m}(x) = (1 + x)^r - 1,$$

$$\mathrm{Ker}[p]_{F_m} = \{\xi = (\zeta - 1)\},$$

где $\zeta$ — первообразный корень $p$-й степени из 1. Диаграмма полей выглядит в этом случае так:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q}_p & \longrightarrow & L = K, \\ \mathbb{Z}_p & \longrightarrow & \mathfrak{O}_K, \\ p & \longrightarrow & \pi. \end{array}$$

Сформулируем теорему 1 в терминах регулярного формального модуля.

**Теорема 1.2.** *Пусть $K$ — регулярное локальное поле, $F_m(X, Y)$ — мультипликативная группа над $\mathbb{Z}_p$. Тогда поле $K$, а значит, и формальный модуль $F_m(\mathfrak{M}_K)$ являются вполне регулярными относительно формальной группы $F$ тогда и только тогда, когда индекс ветвления $e = e(K/\mathbb{Q}_p)$ не делится на $p - 1$.*

Таким образом, мы перенесли постановку задачи на область арифметики формальных модулей. Далее эта задача будет решаться для различных одномерных формальных групп (формальных модулей).

**2. Основные обозначения.** Введем основные обозначения:
$K$ — конечное алгебраическое расширение поля $\mathbb{Q}_p$;
$K_0$ — подполе в $K$;
$T$ — подполе инерции в $K$ со степенью инерции $f_0$;
$\mathfrak{O}_K$ — кольцо целых $K$, $\mathfrak{O}_{K_0}$ — кольцо целых $K_0$;
$\pi$ — простой элемент $\mathfrak{O}_K$, $\pi_0$ — простой элемент $\mathfrak{O}_{K_0}$;
$F(X, Y)$ — одномерная коммутативная формальная группа над $\mathfrak{O}_K$, причем $\mathrm{End}_{\mathfrak{O}_K}(F) \cong \mathfrak{O}_{K_0}$;
$L$ — расширение поля $K$, не содержащее $\mathrm{Ker}_F[\pi_0]$ (без нуля);
$\mathfrak{O}_L$ — кольцо целых $L$;
$\Pi$ — простой элемент $\mathfrak{O}_L$.

Общая диаграмма (башня) полей выглядит так:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Q}_p & \longrightarrow & K_0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & L, \\ \mathbb{Z}_p & \longrightarrow & \mathfrak{O}_{K_0} & \longrightarrow & \mathfrak{O}_K & \longrightarrow & \mathfrak{O}_L, \\ p & \longrightarrow & \pi_0 & \longrightarrow & \pi & \longrightarrow & \Pi. \end{array}$$

**3. Многочленная формальная группа.** Пусть $K$ — конечное расширение поля $\mathbb{Q}_p$ и $c$ — некоторая единица в $K$.

**Определение 3.1.** Формальную группу вида $F_c(X,Y) = X + Y + cXY$ назовем *многочленной формальной группой.*

**Замечание 3.1.** Известно, что $\mathrm{End}(F_c) \cong \mathbb{Z}_p$ (см. [2]), то есть в общем случае эта формальная группа не является группой Любина—Тейта. Однако, например, для $c \in \mathbb{Z}_p$ она таковой является.

Легко видеть, что справедливо равенство

$$F_c(X,Y) = c^{-1}((1+cX)(1+cY)-1).$$

Тогда несложно доказать, что (см., например, [3]) выполняется

$$[p]_{F_c}(X) = c^{-1}([p]_{F_m}(cX)) = c^{-1}((1+cX)^p - 1),$$

$$\mathrm{Ker}[p]_{F_c} = \{\xi = c^{-1}(\zeta - 1)\},$$

где $\zeta$ — первообразный корень $p$-й степени из 1.

Пусть $\xi \in \mathrm{Ker}[p]_{F_c}(X),\ \xi \neq 0.$

**Лемма 3.1.** *Справедливо равенство*

$$-p = ((\varepsilon(X)c)X)^{p-1}|_{X=\xi}, \quad \textit{где} \quad \varepsilon \in 1 + \mathbb{Z}_p[c][|X|]. \tag{1}$$

Доказательство. Действительно, из определения $[p]_{F_c}(X)$ получаем

$$\frac{[p]_{F_c}(X)}{X} = p + C_p^2 cX + \ldots + C_p^{p-1}c^{p-2}X^{p-2} + (cX)^{p-1} = p\eta(X) + (cX)^{p-1},$$

где $\eta(X) = 1 + \frac{C_p^2}{p}cX + \ldots + \frac{C_p^{p-1}}{p}c^{p-2}X^{p-2} \in \mathbb{Z}[c][X]$. Поэтому выполняется

$$-p = \eta(X)^{-1}(cX)^{p-1}|_{X=\xi}.$$

Так как $\eta(X)^{-1} \equiv 1 \mod (X)$, найдется ряд $\varepsilon(X) \in \mathbb{Z}[c][|X|]$, $\varepsilon(X) \equiv 1 \mod (X)$ такой, что $\varepsilon(X)^{p-1} = \eta(X)^{-1}$. Тогда будем иметь

$$-p = ((\varepsilon(X)c)X)^{p-1}|_{X=\xi}.$$

□

Пусть $L$ — конечное расширение поля $\mathbb{Q}_p$ и $c$ — некоторая единица в $L$. Пусть $F_c(X,Y)$ — многочленная формальная группа над $\mathbb{Z}_p[c]$. Пусть $\xi \neq 0$ — корень изогении $[p]_{F_c}(X)$, причем $\xi \notin L$. Тогда диаграмма полей выглядит следующим образом:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{Q}_p & \longrightarrow & \mathbb{Q}_p[c] & \longrightarrow & L, \\
\mathbb{Z}_p & \longrightarrow & \mathbb{Z}_p[c] & \longrightarrow & \mathfrak{O}_L, \\
p & \longrightarrow & \pi & \longrightarrow & \Pi.
\end{array}$$

**Теорема 3.2.** *Поле $L$, а значит, и $F_c(\mathfrak{M}_L)$ являются вполне регулярными относительно формальной группы $F_c(X,Y)$ тогда и только тогда, когда индекс ветвления $e = e(L/\mathbb{Q}_p)$ не делится на $p-1$.*

Доказательство. Из равенства (1) леммы 3.1 следует

$$-p = (\varepsilon(\xi)c)^{p-1}\xi^{p-1},$$

то есть $\sqrt[p-1]{-p} = (\varepsilon(\xi)c)\xi$. Отсюда получаем

$$L(\mathrm{Ker}[p]_{F_c}) = L(\xi) = L(\sqrt[p-1]{-p}). \tag{2}$$

Пусть имеем $-p = \Pi^e\theta u$, где $\Pi$ — простой элемент в $L$, $\theta \in \mathfrak{R}$ — представитель Тейхмюллера в поле $L$, $u$ — главная единица поля $L$.

Если $e \equiv 0 \mod (p-1)$, то имеет место равенство

$$\sqrt[p-1]{-p} = \sqrt[p-1]{\Pi^e\theta}u_1,$$

где $u_1^{p-1} = u, u_1 \in L$. Отсюда получаем

$$L(\sqrt[p-1]{-p}) = L(\sqrt[p-1]{\theta}),$$

то есть расширение $L(\sqrt[p-1]{-p})/L$ неразветвлено, а значит, согласно (2), расширение $L(\mathrm{Ker}[p]_{F_c})/L$ тоже неразветвлено, следовательно $F_c(\mathfrak{M}_L)$ не является вполне регулярным модулем.

Если $e \not\equiv 0 \mod (p-1)$, то справедливо равенство

$$\sqrt[p-1]{-p} = \sqrt[p-1]{\Pi^e\theta}u_1,$$

и $L(\sqrt[p-1]{-p}) = L(\sqrt[p-1]{\Pi^e\theta})$ разветвлено над $L$, откуда $F_c(\mathfrak{M}_L)$ — вполне регулярный модуль. □

**Замечание 3.2.** Условие неразветвленности получилось таким же, как и в случае мультипликативной формальной группы $F_m$.

## 4. Формальная группа Любина—Тейта

**Определение 4.1.** Пусть $K$ — конечное расширение поля $\mathbb{Q}_p$. Введем $\mathfrak{F}_\pi$ как множество формальных степенных рядов $f(X) \in \mathfrak{O}_K[|X|]$ таких, что выполняется

$$f(X) \equiv \pi X \mod deg\ 2, \quad f(X) \equiv X^q \mod \pi,$$

где $\pi$ — простой элемент в $K$ и $q$ — количество элементов поля частных поля $K$.

Тогда по известной теореме (см. [4]) для каждого $f(X)$ из $\mathfrak{F}_\pi$ однозначно строится формальная группа $F_\pi$ над $\mathfrak{O}_K$, которая называется *формальной группой Любина—Тейта.* При этом отображение $\mathfrak{O}_K \to \mathrm{End}_{\mathfrak{O}_K}(F_\pi) : \alpha \mapsto [\alpha]_{F_\pi}$ является кольцевым гомоморфизмом и $f = [\pi]_{F_\pi}$.

Пусть формальная группа Любина—Тейта $F_\pi(X,Y)$ построена по изогении

$$[\pi](X) = \pi X + \pi a_2 X^2 + \ldots + X^q + \ldots \tag{3}$$

Заметим, что в этом случае будем иметь $\mathfrak{O}_{K_0} = \mathfrak{O}_K, K_0 = K, \pi_0 = \pi$. Пусть $L$ — расширение поля $K$ такое, что $\mathrm{Ker}_{F_\pi}[\pi]$ (без нуля) не содержится в $L$. Тогда диаграмма полей имеет вид

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Q}_p & \longrightarrow & K & \longrightarrow & L, \\ \\ \mathbb{Z}_p & \longrightarrow & \mathfrak{O}_K & \longrightarrow & \mathfrak{O}_L, \\ \\ p & \longrightarrow & \pi & \longrightarrow & \Pi. \end{array}$$

**Теорема 4.1.** *Поле $L$, а значит, и $F_\pi(\mathfrak{M}_L)$ являются вполне регулярными относительно формальной группы $F_\pi$ тогда и только тогда, когда индекс ветвления $e = e(L/K)$ не делится на $q-1$.*

Доказательство. Так как $F_\pi(X,Y)$ построена по изогении (3), то $[\pi](X)$ можно представить в виде

$$[\pi](X) = \pi X \varepsilon(X) + X^q,$$

где $\varepsilon(X) \equiv 1 \mod X$. Заметим, что так как $q-1$ и $p$ взаимно просты, то из ряда $\varepsilon(X)^{-1}$ в этом случае можно извлечь в кольце $\mathfrak{O}_K[|X|]$ корень степени $q-1$. Это означает, что существует ряд $u(X) \in 1 + X\mathfrak{O}_K[|X|]$ такой, что $u(X)^{q-1} = \varepsilon(X)^{-1}$, поэтому имеет место равенство

$$\frac{[\pi](X)}{X} = \pi u(X)^{-(q-1)} + X^{q-1}.$$

Получаем уравнение для корня изогении $X \neq 0$:

$$-\pi = (Xu(X))^{q-1} = Y^{q-1}.$$

Так как $L$ — расширение поля $K$, $\Pi$ — простой элемент в $L$, то для $e = e(L/K)$ имеем

$$-\pi = \Pi^e \theta \eta(\Pi),$$

где $\eta(\Pi) \equiv 1 \mod \Pi$ — главная единица.

Если имеем $e = (q-1)e'$, то получим

$$-\pi = (\Pi^{e'} \eta_1(\Pi))^{q-1} \theta,$$

где $\eta_1^{q-1} = \eta$. И значит, выполняется

$$Y = \Pi^{e'} \eta_1 \sqrt[q-1]{\theta},$$

где $\Pi^{e'} \eta_1 \in L$, а $\theta$ из неразветвленного расширения поля $L$. Таким образом, $L(Y)/L$ неразветвлено, а значит $F_\pi(\mathfrak{M}_L)$ не является вполне регулярным модулем.

Если $e$ не делится на $q-1$, то $L(Y) = L(\sqrt[q-1]{-\pi}) = L(\sqrt[q-1]{\Pi^e \theta})$ разветвлено над $L$, откуда $F_\pi(\mathfrak{M}_L)$ — вполне регулярный относительно группы $F$ модуль. □

**5. Формальная группа Хонды.** Пусть $K$ — конечное неразветвленное расширение $\mathbb{Q}_p$. Рассмотрим $\triangle$ — оператор Фробениуса в $\mathfrak{O}_K[|X|]$ :

$$\triangle\left(\sum a_i x^i\right) = \sum a_i^{Fr} x^{p \cdot i}, \quad a_i \in \mathfrak{O}_K,$$

где $Fr$ — продолжение автоморфизма Фробениуса на $K/\mathbb{Q}_p$. Множество операторов $\sum_{i \geqslant 0} a_i \triangle^i$, где $a_i \in \mathfrak{O}_K$, образуют некоммутативное кольцо $\mathfrak{O}_K[| \triangle |]$ формальных степенных рядов от $\triangle$, для которого выполняется $\triangle a = a^{Fr} \triangle$ для $a \in \mathfrak{O}_K$.

**Определение 5.1.** Пусть $K_0$ — конечное расширение поля $\mathbb{Q}_p$, $q$ — количество элементов поля частных поля $K_0$, $K$ — конечное неразветвленное расширение $K_0$, $\pi_0$ — простой элемент в $K_0$. Формальная группа $F$ над $\mathfrak{O}_K$ с логарифмом $\log_F(X) \in K[|X|]$ называется *формальной групппой Хонды*, если выполняется

$$u \circ \log_F \equiv 0 \mod \pi_0$$

для некоторого оператора $u = \pi_0 + a_1 \triangle + \ldots \in \mathfrak{O}_K[| \triangle |]$. Оператор $u$ называется *типом* формальной группы $F$.

Пусть опять $K_0$ — конечное расширение поля $\mathbb{Q}_p$, $K$ — конечное неразветвленное расширение $K_0$. Рассмотрим $F(X,Y)$ — группу Хонды над $\mathfrak{O}_K$ высоты $h$ такую, что $\mathfrak{O}_{K_0} \cong \mathrm{End}_{\mathfrak{O}_K} F$. Пусть $L$ — расширение $K$ такое, что $\mathrm{Ker}_F[\pi_0]$ (без нуля) не содержится в $L$. Тогда диаграмма полей имеет вид

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Q}_p & \longrightarrow & K_0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & L, \\ \mathbb{Z}_p & \longrightarrow & \mathfrak{O}_{K_0} & \longrightarrow & \mathfrak{O}_K & \longrightarrow & \mathfrak{O}_L, \\ p & \longrightarrow & \pi_0 & \longrightarrow & \pi_0 & \longrightarrow & \Pi. \end{array}$$

**Теорема 5.1.** *Поле $L$, а значит, и $F(\mathfrak{M}_L)$ являются вполне регулярными относительно формальной группы $F$ тогда и только тогда, когда индекс ветвления $e = e(L/K)$ не делится на $q^h - 1$.*

Доказательство. Заметим, что $e = e(L/K) = e(L/K_0)$, так как расширение $K/K_0$ неразветвлено по условию.

Пусть $\pi_0$ — простой элемент в $K_0$. Рассмотрим эндоморфизм формальной группы $F$ умножения на $\pi_0$:

$$[\pi_0]_F(X) = \pi_0 X + a_2 \pi_0 X^2 + \ldots + a_{q^h} X^{q^h} + \ldots, \quad a_i \in \mathfrak{O}_K$$

и $a_{q^h} \in \mathfrak{O}_K^*$, так как высота $F$ равна $h$. Все коэффициенты $a_i \in \pi_0 \mathfrak{O}_K$, так как по условию расширение $\mathfrak{O}_K/\mathfrak{O}_{K_0}$ неразветвлено.

По подготовительной лемме Вейерштрасса существует $\varepsilon(X) \in 1 + X\mathfrak{O}_{K_0}[|X|]$ такой, что выполняется

$$f(X) := \frac{[\pi_0](X)}{X}\varepsilon(X) = \pi_0 + \pi_0 c_1 X^1 + \ldots + \pi_0 c_{q^h-2} X^{q^h-2} + c_{q^h-1} X^{q^h-1},$$

где $c_{q^h-1} \in \mathfrak{O}_K^*$.

Ясно, что справедливо равенство

$$\mathrm{Ker}[\pi_0]_F(X) = \mathrm{Ker} f(X).$$

Пусть $\pi$ — корень многочлена $f(X)$ и соответственно ненулевой корень $[\pi_0](X) = 0$, тогда расширение $K(\pi)/K$ вполне разветвлено и $\pi$ — простой элемент в нем. Поэтому в поле $K(\pi)$ имеем

$$-\pi_0 \left(1 + c_1\pi + \ldots + c_{q^h-2}\pi^{q^h-2}\right) = c_{q^h-1}\pi^{q^h-1},$$

откуда получаем

$$-\pi_0 = c_{q^h-1}\pi^{q^h-1}\varepsilon,$$

где $\varepsilon = (1 + c_1\pi + \ldots + c_{q^h-2}\pi^{q^h-2})^{-1}$.

Пусть $\varepsilon'$ — единица в $K(\pi)$ такая, что $(\varepsilon')^{q^h-1} = \varepsilon$, тогда $\pi' = \pi\varepsilon'$ будет корнем уравнения

$$X^{q^h-1} + \pi_0' = 0,$$

где $\pi_0' = \pi_0 c_{q^h-1}^{-1} \in K_0$. При этом будем иметь

$$L(\mathrm{Ker}[\pi_0]_F) = L(\pi) = L(\pi'),$$

так как $\mathrm{Ker}[\pi_0]_F$ не принадлежит по условию полю $L$. Но $K \subset L$, а уравнение

$$c_{q^h-1}X^{q^h-1} + \pi_0\left(1 + c_1X + \ldots + c_{q^h-2}X^{q^h-2}\right) = 0$$

равносильно уравнению

$$Y^{q^h-1} + \pi_0 c_{q^h-1}^{-1} = 0 \Leftrightarrow Y^{q^h-1} + \pi_0' = 0,$$

где

$$Y = X\left(1 + c_1X + \ldots + c_{q^h-2}X^{q^h-2}\right)^{-1}.$$

Итак, мы доказали

$$L(\mathrm{Ker}[\pi_0]_F) = L(\pi'),$$

где $\pi'$ — корень уравнения $X^{q^h-1} + \pi_0' = 0, \pi_0'$ — простой в $K_0$ (и в $K$).

Пусть индекс ветвления $e = e(L/K)$ делится на $q^h - 1$, то есть $e = (q^h - 1)e'$, и пусть $\Pi$ — простой элемент в $L$. Тогда справедливо

$$-\pi_0' = \Pi^e\theta\eta,$$

где $\theta$ — представитель Тейхмюллера, а $\eta$ — главная единица поля $L$. Следовательно, имеет место равенство

$$\pi' = \sqrt[q^h-1]{-\pi_0'} = \Pi^{e'}\sqrt[q^h-1]{\theta}\eta_1,$$

где $\eta_1^{q^h-1} = \eta$ в $L$.

Поэтому расширение $L(\pi') = L(\sqrt[q^h-1]{\theta})$, а с ним и $L(\mathrm{Ker}[\pi_0]_F)$ неразветвлено над $L$. Это значит, что $F(\mathfrak{M}_L)$ не является вполне регулярным модулем.

Если же $e$ не делится на $q^h-1$, то расширение $L(\pi') = L(\sqrt[q^h-1]{\pi^e\theta})$ будет разветвлено над $L$, откуда $F(\mathfrak{M}_L)$ — вполне регулярный относительно группы $F$ модуль. $\square$

**Заключение.** Фактически исследование регулярных формальных модулей было выполнено только для случая мультипликативной формальной группы одномерного локального поля в работе З. И. Боревича [1]. В данной работе сделан следующий шаг к обобщению результатов — получены свойства для случая многочленной формальной группы, для формальной группы Любина—Тейта и формальной группы Хонды.

Остается открытым вопрос о произвольных формальных модулях как в одномерных локальных полях, так и в формальных модулях в многомерном случае, конструкция для которого дается в [5] и [6]. Кроме того, возникает вопрос об условиях для неразветвленного кругового поля, содержащего все корни $p$-й степени из 1. Эти вопросы мы постараемся исследовать в следующих работах.

**Литература**

1. *Боревич З. И.* О регулярных локальных полях // Вестн. Ленингр. ун-та. 1962. С. 142–145.
2. *Hazewinkel M.* Formal groups and applications. New York: Academic Press, 1978.
3. *Востоков С. В., Волков В. В., Пак Г. К.* Символ Гильберта для многочленных формальных групп // Зап. науч. сем. ПОМИ. 2012. Т. 400. С. 127–132.
4. *Fesenko I. B., Vostokov S. V.* Local fields and their extensions. Second edition, 2002.
5. *Zhukov I. B.* Higher dimensional local fields // Invitation to higher local fields. 2000. Vol. 3. P. 5–18.
6. *Honda T.* On the theory of commutative formal groups // J. Math. Soc. Japan. 1970. P. 213–246.


Статья поступила в редакцию 1 апреля 2016 г.


Сведения об авторах

*Власьев Сергей Михайлович* — аспирант; svlassiev@gmail.com

*Востоков Сергей Владимирович* — доктор физико-математических наук, профессор; sergei.vostokov@gmail.com

*Горшков Андрей Андреевич* — аспирант; andrey.a.gorshkov@gmail.com


## REGULAR FORMAL MODULES IN ONE-DIMENSIONAL LOCAL FIELDS


*Sergey M. Vlassiev, Sergei V. Vostokov, Andrei A. Gorshkov*

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; svlassiev@gmail.com, sergei.vostokov@gmail.com, andrey.a.gorshkov@gmail.com



Studies of regular local fields were started in 1962 in Z. I. Borevich's article during his work on tamely ramified extensions. This article generalizes an idea of local fields regularity in terms of formal groups and corresponding formal modules. The article considers formal group over a ring of integers of a local field (finite extension of p-adic numbers) and a formal module built via this formal group over a ring of integers' maximal ideal. To be regular formal module should not contain non-trivial roots of isogeny of corresponding formal group. The article describes totally regular in terms of formal groups local fields, i.e. fields, which are together with all their unramified extensions are regular in terms of formal group. Original Borevich's work may be considered as a solution for a case of multiplicative formal groups. This paper is the next step that provides description for totally regular local fields and corresponding formal modules in cases of polynomial formal groups, Lubin-Tate formal groups and Honda formal groups. When classification in special cases was received new problems have been stated in the article, e.g. regular and totally regular modules description in multi-dimensional case. Refs 6.


*Keywords*: local field, totally regular local field, formal module, formal group.


**References**

1. Borevich Z. I., "About regular local fields", *Vestn. of Leningrad Univ.*, 142–145 (1962) [in Russian].
2. Hazewinkel M., *Formal groups and applications* (Academic Press, New York, 1978).
3. Vostokov S. V., Volkov V. V., Pak G. K., "The Hilbert symbol of polynomial formal groups", *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI* **400**, 127–132 (2012).
4. Fesenko I. B., Vostokov S. V., *Local fields and their extensions* (Second edition, 2002).
5. Zhukov I. B., "Higher dimensional local fields", *Invitation to higher local fields* **3**, 5–18 (2000).
6. Honda T., "On the theory of commutative formal groups", *J. Math Soc. Japan*, 213–246 (1970).



**Для цитирования:** Власьев С. М., Востоков С. В., Горшков А. А. Регулярные формальные модули в одномерных локальных полях // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2016. Т. 3 (61). Вып. 4. С. 544–551. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.403

**For citation:** Vlassiev S. M., Vostokov S. V., Gorshkov A. A. Regular formal modules in one-dimensional local fields. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2016, vol. 3 (61), issue 4, pp. 544–551. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.403