УДК 519.87 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 3 (61). 2016. Вып. 4

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТРОПИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ МИНИМАКСНЫХ ЗАДАЧ РАЗМЕЩЕНИЯ С ПРЯМОУГОЛЬНОЙ МЕТРИКОЙ НА ПРЯМОЙ*

Н. К. Кривулин, П. В. Плотников

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Методы тропической (идемпотентной) математики применяются для решения минимаксных задач размещения с прямоугольной метрикой при наличии ограничений на допустимую область размещения. Сначала рассматривается задача тропической оптимизации с ограничениями, сформулированная в терминах некоторого общего полуполя с идемпотентным сложением. Для решения задачи оптимизации вводится параметр, который обозначает минимум целевой функции, а затем задача сводится к параметризованной системе неравенств. Значение параметра определяется из условий существования решений системы, а решения системы при найденном значении параметра берутся в качестве решений исходной задачи оптимизации. Затем формулируется минимаксная задача размещения одиночного объекта на отрезке прямой на плоскости с прямоугольной метрикой. При отсутствии ограничений эта задача, которая также известна как задача Ролса или задача посыльного, имеет известные геометрическое и алгебраическое решения. Для задач размещения, в которых область размещения ограничена отрезком прямой, получено новое решение на основе представления этих задач в форме изученной выше задачи тропической оптимизации. Приведены решения в явном виде задач размещения для различных положений прямой, записанные как в терминах тропической математики, так и в обычной форме. Библиогр. 16 назв.

Ключевые слова: тропическая оптимизация, идемпотентное полуполе, прямоугольная метрика, задача Ролса о размещении с ограничениями.

1. Введение. Модели и методы тропической (идемпотентной) математики, изучающей теорию и приложения полуколец с идемпотентным сложением [1–9], находят применение для решения различных задач в технике, экономике, управлении и в других областях. В таких приложениях часто возникают оптимизационные задачи, которые формулируются и решаются в терминах тропической математики (задачи тропической оптимизации). Краткий обзор таких задач оптимизации можно найти, например, в работе [10].

Методы тропической оптимизации успешно применяются для решения ряда задач размещения [2, 11–13], включая минимаксную задачу размещения одиночного объекта на плоскости с прямоугольной метрикой. Указанная задача, которую также называют задачей Ролса или задачей посыльного, имеет при отсутствии ограничений на допустимую область размещения известное геометрическое решение [14, 15]. На основе представления в виде задачи тропической оптимизации в работах [12, 13] было дано алгебраическое решение этой задачи, полученное в явном виде в замкнутой форме.

В настоящей статье изучается минимаксная задача размещения на плоскости с прямоугольной метрикой при условии, что допустимая область размещения имеет форму отрезка произвольной прямой. Сначала рассматривается задача тропической оптимизации с ограничениями, для которой находится прямое решение в явном виде. Применяется подход, который был развит в работах [10, 16] и состоит в замене

*Работа выполнена при финансовой поддержке РГНФ в рамках научного проекта № 16-02-00059.

 DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.409

решения исходной задачи оптимизации на решение параметризованной системы неравенств. Затем формулируется задача размещения, которая сводится к рассмотренной выше задаче тропической оптимизации. Приводятся решения задач размещения в явном виде, записанные как в терминах тропической математики, так и в обычной форме.

2. Элементы идемпотентной алгебры. Рассмотрим числовое множество $\mathbb{X}$, на котором определены операции сложения $\oplus$ и умножения $\otimes$. Обозначим через $\langle\mathbb{X},\mathbb{0},\mathbb{1},\oplus,\otimes\rangle$ заданное на $\mathbb{X}$ при помощи этих операций коммутативное полукольцо с нулем $\mathbb{0}$ и единицей $\mathbb{1}$. При этом сложение будем считать идемпотентным (т. е. для любого числа $x\in\mathbb{X}$ выполняется $x\oplus x=x$), а умножение — обратимым (т. е. для каждого $x\neq\mathbb{0}$ существует обратный элемент x^{-1} такой, что $x\otimes x^{-1}=\mathbb{1}$). Так как $\langle\mathbb{X}\setminus\{\mathbb{0}\},\mathbb{1},\otimes\rangle$ образует коммутативную группу по умножению, описанную структуру $\langle\mathbb{X},\mathbb{0},\mathbb{1},\oplus,\otimes\rangle$ обычно называют *идемпотентным полуполем*.

Операция возведения в степень с целым показателем вводится стандартным образом. Для любого ненулевого числа $x\in\mathbb{X}$ и натурального числа n определим $x^0=\mathbb{1}$, $x^n=x\otimes x^{n-1}$, $x^{-n}=(x^{-1})^n$ и $\mathbb{0}^n=\mathbb{0}$. Будем предполагать, что операция возведения в целую степень ненулевого числа x может быть распространена на случай произвольного показателя степени. В частности, для любого $x<\mathbb{1}$ при $n=0$ положим $x^{1/n}=\mathbb{0}$.

Далее знак умножения $\otimes$ в алгебраических выражениях, как обычно, опускается.

В силу того, что сложение идемпотентно, можно определить отношение частичного порядка $\leq$ так: $x\leq y$ тогда и только тогда, когда $x\oplus y=y$. Из этого определения следует пара неравенств $x\leq x\oplus y$ и $y\leq x\oplus y$, а также равносильность неравенства $x\oplus y\leq z$ и системы неравенств $x\leq z$ и $y\leq z$ для любых $x,y,z\in\mathbb{X}$. Кроме того, нетрудно проверить свойства монотонности операций сложения и умножения, по которым при условии $x\leq y$ для любого z выполняются неравенства $x\oplus z\leq y\oplus z$ и $xz\leq yz$. Наконец, для любых $x,y\neq\mathbb{0}$ из неравенства $x\leq y$ следует $x^{-1}\geq y^{-1}$. В дальнейшем будем дополнительно предполагать, что введенный частичный порядок является линейным.

Примерами алгебраических структур рассмотренного типа являются идемпотентные полуполя вещественных чисел:

$$\mathbb{R}_{\max,+}=\langle\mathbb{R}\cup\{-\infty\},-\infty,0,\max,+\rangle,\qquad \mathbb{R}_{\min,+}=\langle\mathbb{R}\cup\{+\infty\},+\infty,0,\min,+\rangle,$$
$$\mathbb{R}_{\max,\times}=\langle\mathbb{R}_+\cup\{0\},0,1,\max,\times\rangle,\qquad \mathbb{R}_{\min,\times}=\langle\mathbb{R}_+\cup\{+\infty\},+\infty,1,\min,\times\rangle,$$

где $\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел и $\mathbb{R}_+=\{x\in\mathbb{R}|\ x>0\}$.

Нулевым элементом для полуполя $\mathbb{R}_{\max,+}$ является $-\infty$, единичным — число 0. В этом полуполе любому числу $x\in\mathbb{R}$ можно сопоставить обратный x^{-1}, который совпадает с противоположным числом $-x$ в обычной алгебре. Для любой пары чисел $x,y\in\mathbb{R}$ можно определить степень x^y, значение которой равно арифметическому произведению xy. Порядок, порожденный операцией идемпотентного сложения, совпадает с обычным линейным порядком на множестве $\mathbb{R}$.

3. Задача тропической оптимизации с ограничениями. В этом разделе рассматривается задача тропической оптимизации, сформулированная в терминах общего идемпотентного полуполя, для которой находится аналитическое решение в явном виде. Сначала вводится параметр для обозначения минимума целевой функции, а затем задача сводится к решению параметризованной системы неравенств. Условия существования решений системы используются для определения величины параметра, а все решения системы при найденном значении параметра берутся в качестве решений исходной задачи оптимизации.

Пусть заданы числа $a, b, c, d, f, g \in \mathbb{X}$, а также вещественное число k. Требуется найти ненулевые решения $t \in \mathbb{X}$ задачи

$$\begin{aligned} \min \quad & a t^{k-1} \oplus b t^{-(k-1)} \oplus c t^{-(k+1)} \oplus d t^{k+1}, \\ & f \leq t \leq g. \end{aligned} \tag{1}$$

Следующий результат описывает все решения рассматриваемой задачи.

Теорема 1. *Пусть $a, b, c, d, f, g > \mathbb{0}$ и k — вещественное число. Справедливы следующие утверждения:*

1) *если $k < -1$, то минимум в задаче* (1) *равен*

$$\mu = a^{1/2} b^{1/2} \oplus a^{(k+1)/2k} c^{(k-1)/2k} \oplus b^{(k+1)/2k} d^{(k-1)/2k} \oplus c^{1/2} d^{1/2} \oplus \\ \oplus a g^{k-1} \oplus b f^{-(k-1)} \oplus c f^{-(k+1)} \oplus d g^{k+1}$$

и достигается тогда и только тогда, когда

$$t = \left((\mu a^{-1})^{1/(k-1)} \oplus (\mu d^{-1})^{1/(k+1)} \oplus f \right)^{1-\alpha} \left((\mu b^{-1})^{1/(k-1)} \oplus (\mu c^{-1})^{1/(k+1)} \oplus g^{-1} \right)^{-\alpha};$$

2) *если $-1 \leq k \leq 1$, то минимум равен*

$$\mu = a^{1/2} b^{1/2} \oplus a^{(k+1)/2} d^{-(k-1)/2} \oplus b^{(k+1)/2} c^{-(k-1)/2} \oplus c^{1/2} d^{1/2} \oplus \\ \oplus a g^{k-1} \oplus b f^{-(k-1)} \oplus c g^{-(k+1)} \oplus d f^{k+1}$$

и достигается тогда и только тогда, когда

$$t = \left((\mu a^{-1})^{1/(k-1)} \oplus (\mu^{-1} c)^{1/(k+1)} \oplus f \right)^{1-\alpha} \left((\mu b^{-1})^{1/(k-1)} \oplus (\mu^{-1} d)^{1/(k+1)} \oplus g^{-1} \right)^{-\alpha};$$

3) *если $k > 1$, то минимум равен*

$$\mu = a^{1/2} b^{1/2} \oplus a^{(k+1)/2k} c^{(k-1)/2k} \oplus b^{(k+1)/2k} d^{(k-1)/2k} \oplus c^{1/2} d^{1/2} \oplus \\ \oplus a f^{k-1} \oplus b g^{-(k-1)} \oplus c g^{-(k+1)} \oplus d f^{k+1}$$

и достигается тогда и только тогда, когда

$$t = \left((\mu^{-1} b)^{1/(k-1)} \oplus (\mu^{-1} c)^{1/(k+1)} \oplus f \right)^{1-\alpha} \left((\mu^{-1} a)^{1/(k-1)} \oplus (\mu^{-1} d)^{1/(k+1)} \oplus g^{-1} \right)^{-\alpha};$$

где α — любое вещественное число, удовлетворяющее условию $0 \leq \alpha \leq 1$.

Доказательство. Обозначим минимум целевой функции в задаче (1) через μ. Тогда все решения задачи определяются системой, состоящей из уравнения и неравенства:

$$a t^{k-1} \oplus b t^{-(k-1)} \oplus c t^{-(k+1)} \oplus d t^{k+1} = \mu, \qquad f \leq t \leq g.$$

В силу того, что μ — минимальное значение целевой функции, равенство в системе можно заменить на неравенство, что приводит к системе

$$at^{k-1} \oplus bt^{-(k-1)} \oplus ct^{-(k+1)} \oplus dt^{k+1} \leq \mu, \qquad f \leq t \leq g.$$

Полученная система неравенств эквивалентна системе

$$at^{k-1} \leq \mu, \qquad bt^{-(k-1)} \leq \mu, \quad ct^{-(k+1)} \leq \mu, \quad dt^{k+1} \leq \mu, \quad f \leq t, \quad t \leq g. \qquad (2)$$

Заметим, что перемножение соответствующих частей первых двух неравенств дает неравенство $ab \leq \mu^2$, откуда с учетом условия леммы следует $\mu \geq a^{1/2}b^{1/2} > \mathbb{0}$.

Теперь рассмотрим различные условия, которым может удовлетворять значение k.

Сначала предположим, что выполняется условие $k < -1$. Тогда значения $(k-1)$ и $(k+1)$ являются отрицательными, а решения неравенств $at^{k-1} \leq \mu$ и $dt^{k+1} \leq \mu$ относительно t имеют вид $t \geq (\mu a^{-1})^{1/(k-1)}$ и $t \geq (\mu d^{-1})^{1/(k+1)}$. Объединив эти решения с условием $t \geq f$, приходим к неравенству $t \geq (\mu a^{-1})^{1/(k-1)} \oplus (\mu d^{-1})^{1/(k+1)} \oplus f$.

Рассмотрим неравенства $bt^{-(k-1)} \leq \mu$ и $ct^{-(k+1)} \leq \mu$, которые решим относительно t^{-1} в виде $t^{-1} \geq (\mu b^{-1})^{1/(k-1)}$ и $t^{-1} \geq (\mu c^{-1})^{1/(k+1)}$. Найденные решения вместе с условием $t^{-1} \geq g^{-1}$ дают неравенство $t^{-1} \geq (\mu b^{-1})^{1/(k-1)} \oplus (\mu c^{-1})^{1/(k+1)} \oplus g^{-1}$ или эквивалентное ему неравенство $t \leq ((\mu b^{-1})^{1/(k-1)} \oplus (\mu c^{-1})^{1/(k+1)} \oplus g^{-1})^{-1}$.

Записывая вместе оба неравенства для t, получим двойное неравенство

$$(\mu a^{-1})^{1/(k-1)} \oplus (\mu d^{-1})^{1/(k+1)} \oplus f \leq t \leq \left((\mu b^{-1})^{1/(k-1)} \oplus (\mu c^{-1})^{1/(k+1)} \oplus g^{-1}\right)^{-1}. \quad (3)$$

Множество значений t, удовлетворяющих этому неравенству, непусто, если выполняется условие $(\mu a^{-1})^{1/(k-1)} \oplus (\mu d^{-1})^{1/(k+1)} \oplus f \leq ((\mu b^{-1})^{1/(k-1)} \oplus (\mu c^{-1})^{1/(k+1)} \oplus g^{-1})^{-1}$, которое равносильно условию

$$\left((\mu a^{-1})^{1/(k-1)} \oplus (\mu d^{-1})^{1/(k+1)} \oplus f\right)\left((\mu b^{-1})^{1/(k-1)} \oplus (\mu c^{-1})^{1/(k+1)} \oplus g^{-1}\right) \leq \mathbb{1}.$$

Раскроем скобки в левой части, а затем заменим полученное неравенство эквивалентной системой неравенств, включая $fg^{-1} \leq \mathbb{1}$, которое прямо следует из условия $f \leq g$. Решение остальных неравенств системы относительно μ дает

$$\begin{array}{llll} \mu \geq a^{1/2}b^{1/2}, & \mu \geq a^{(k+1)/2k}c^{(k-1)/2k}, & \mu \geq b^{(k+1)/2k}d^{(k-1)/2k}, & \mu \geq c^{1/2}d^{1/2}, \\ \mu \geq ag^{k-1}, & \mu \geq bf^{-(k-1)}, & \mu \geq cf^{-(k+1)}, & \mu \geq dg^{k+1}. \end{array}$$

Полученная система равносильна одному неравенству

$$\mu \geq a^{1/2}b^{1/2} \oplus a^{(k+1)/2k}c^{(k-1)/2k} \oplus b^{(k+1)/2k}d^{(k-1)/2k} \oplus c^{1/2}d^{1/2} \oplus \\ \oplus ag^{k-1} \oplus bf^{-(k-1)} \oplus cf^{-(k+1)} \oplus dg^{k+1}.$$

Заметим, что переход от исходной задачи к этому неравенству, в котором μ обозначает минимум целевой функции, включал только эквивалентные преобразования. Из этого следует, что полученное неравенство задает точную нижнюю границу для μ, а потому знак неравенства в нем можно заменить на знак равенства.

Осталось представить неравенство (3) для t в параметрической форме

$$t = \left((\mu a^{-1})^{1/(k-1)} \oplus (\mu d^{-1})^{1/(k+1)} \oplus f \right)^{1-\alpha} \left((\mu b^{-1})^{1/(k-1)} \oplus (\mu c^{-1})^{1/(k+1)} \oplus g^{-1} \right)^{-\alpha},$$

где вещественный параметр α в показателе степени удовлетворяет условию $0 \leq \alpha \leq 1$.

Перейдем к исследованию задачи в случае, когда выполняется условие $-1 \leq k \leq 1$.

Пусть сначала величина k удовлетворяет строгому неравенству $-1 < k < 1$, при котором значение $(k-1)$ является отрицательным, а $(k+1)$ — положительным. Тогда решение неравенств $at^{k-1} \leq \mu$ и $ct^{-(k+1)} \leq \mu$ системы (2) приводит к неравенствам $t \geq (\mu a^{-1})^{1/(k-1)}$ и $t \geq (\mu^{-1} c)^{1/(k+1)}$. Кроме того, неравенства $bt^{-(k-1)} \leq \mu$ и $dt^{k+1} \leq \mu$ могут быть представлены в виде $t^{-1} \geq (\mu b^{-1})^{1/(k-1)}$ и $t^{-1} \geq (\mu^{-1} d)^{1/(k+1)}$.

Заметим, что полученные неравенства останутся справедливыми, если положить $k = -1$ или $k = 1$. Например, при $k = -1$ решения неравенств $at^{k-1} \leq \mu$ и $bt^{-(k-1)} \leq \mu$ не меняются, а неравенства $ct^{-(k+1)} \leq \mu$ и $dt^{k+1} \leq \mu$ сводятся к $c \leq \mu$ и $d \leq \mu$. Последние два неравенства можно записать в виде $\mu^{-1} c \leq \mathbb{1}$ и $\mu^{-1} d \leq \mathbb{1}$, откуда следует, что при $k = -1$ выполняются формальные равенства $(\mu^{-1} c)^{1/(k+1)} = \mathbb{0}$ и $(\mu^{-1} d)^{1/(k+1)} = \mathbb{0}$, а потому очевидно, что $t \geq (\mu^{-1} c)^{1/(k+1)}$ и $t^{-1} \geq (\mu^{-1} d)^{1/(k+1)}$.

В результате объединения полученных неравенств, к которым добавляются неравенства $t \geq f$ и $t^{-1} \geq g^{-1}$, имеем двойное неравенство

$$(\mu a^{-1})^{1/(k-1)} \oplus (\mu^{-1} c)^{1/(k+1)} \oplus f \leq t \leq \left((\mu b^{-1})^{1/(k-1)} \oplus (\mu^{-1} d)^{1/(k+1)} \oplus g^{-1} \right)^{-1}.$$

Теперь так же, как в первой части доказательства, следует решить относительно μ неравенство $(\mu a^{-1})^{1/(k-1)} \oplus (\mu^{-1} c)^{1/(k+1)} \oplus f \leq ((\mu b^{-1})^{1/(k-1)} \oplus (\mu^{-1} d)^{1/(k+1)} \oplus g^{-1})^{-1}$. После выполнения необходимых алгебраических преобразований получаем неравенство для μ, которое для минимума целевой функции принимает форму равенства

$$\mu = a^{1/2} b^{1/2} \oplus a^{(k+1)/2} d^{-(k-1)/2} \oplus b^{(k+1)/2} c^{-(k-1)/2} \oplus c^{1/2} d^{1/2} \oplus \\ \oplus a g^{k-1} \oplus b f^{-(k-1)} \oplus c g^{-(k+1)} \oplus d f^{k+1}.$$

С помощью параметра α такого, что $0 \leq \alpha \leq 1$, множество решений t задачи записывается в виде

$$t = \left((\mu a^{-1})^{1/(k-1)} \oplus (\mu^{-1} c)^{1/(k+1)} \oplus f \right)^{1-\alpha} \left((\mu b^{-1})^{1/(k-1)} \oplus (\mu^{-1} d)^{1/(k+1)} \oplus g^{-1} \right)^{-\alpha}.$$

Построение решения задачи для случая, когда $k > 1$, осуществляется таким же образом, как в случае $k < -1$, и здесь для краткости опускается. ■

В заключение рассмотрим два следствия из полученного результата, которые будут использованы в примерах приложений в следующем разделе.

Предположим, что заданы числа $a, b, c, f, g \in \mathbb{X}$ и необходимо найти ненулевые значения неизвестного $t \in \mathbb{X}$, которые решают задачу

$$\begin{aligned} \min \quad & at^{-2} \oplus bt^2 \oplus c, \\ & f \leq t \leq g. \end{aligned} \tag{4}$$

Нетрудно видеть, что эта задача имеет форму задачи (1), в которой необходимо положить $k = -1$ и $d = c$. Тогда применение теоремы 1 дает следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть $a, b, c, f, g > \mathbb{0}$. Минимум в задаче* (4) *равен*

$$\mu = a^{1/2}b^{1/2} \oplus ag^{-2} \oplus bf^2 \oplus c$$

и достигается тогда и только тогда, когда

$$t = \left(\mu^{-1/2}a^{1/2} \oplus f\right)^{1-\alpha} \left(\mu^{-1/2}b^{1/2} \oplus g^{-1}\right)^{-\alpha}, \qquad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Теперь получим решение задачи, которая формулируется так:

$$\begin{aligned} \min \quad & at^{-1} \oplus bt, \\ & f \leq t \leq g. \end{aligned} \tag{5}$$

Ясно, что эта задача сводится к задаче (1) при условии $k = 0$, $c = a$ и $d = b$. Решение задачи (5) находится как следствие из теоремы 1 в следующем виде.

Следствие 2. *Пусть $a, b, f, g > \mathbb{0}$. Минимум в задаче* (5) *равен*

$$\mu = a^{1/2}b^{1/2} \oplus ag^{-1} \oplus bf$$

и достигается тогда и только тогда, когда

$$t = \left(\mu^{-1}a \oplus f\right)^{1-\alpha} \left(\mu^{-1}b \oplus g^{-1}\right)^{-\alpha}, \qquad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

4. Приложения к задачам размещения на прямой. Рассмотрим минимаксную задачу размещения на плоскости с прямоугольной метрикой и ограничениями на допустимую область размещения. Предположим, что на множестве $\mathbb{R}^2$ задан набор точек и определено некоторое допустимое подмножество $S \subset \mathbb{R}^2$. Требуется разместить новую точку на множестве S так, чтобы минимизировать расстояние от этой точки до самой удаленной от нее из числа заданных точек.

Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ имеются два вектора $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^T$ и $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)^T$. Расстояние между этими векторами в прямоугольной метрике вычисляется по формуле

$$\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|.$$

Рассмотрим набор точек $\boldsymbol{r}_i = (r_{1i}, r_{2i})^T \in \mathbb{R}^2$ и чисел $w_i \in \mathbb{R}$, заданных для всех $i = 1, \ldots, m$. Для произвольного вектора $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^T$ введем функцию

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \max_{1 \leq i \leq m} (\rho(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{x}) + w_i) = \max_{1 \leq i \leq m} (|r_{1i} - x_1| + |r_{2i} - x_2| + w_i) = \phi(x_1, x_2),$$

которая определяет максимальное по всем i расстояние в прямоугольной метрике от точки $\boldsymbol{x}$ до точки $\boldsymbol{r}_i$ с учетом дополнительного слагаемого w_i.

Задача размещения, которую иногда называют задачей Ролса или задачей посыльного, состоит в том, чтобы найти все векторы $\boldsymbol{x}$, обеспечивающие минимум

$$\min_{\boldsymbol{x} \in S} \quad \phi(\boldsymbol{x}). \tag{6}$$

Для решения задачи при условии, что допустимое множество S задается на плоскости в виде отрезка прямой, применим разработанные выше методы. Для этого задачу размещения будем представлять в виде задачи тропической оптимизации с ограничениями, а затем решать с использованием результатов предыдущего раздела.

Сначала запишем целевую функцию задачи (6) в терминах идемпотентного полуполя $\mathbb{R}_{\max,+}$. Учитывая, что с помощью операций этого полуполя прямоугольную метрику для векторов $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^T$ и $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)^T$ можно представить в форме

$$\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (x_1^{-1} y_1 \oplus y_1^{-1} x_1)(x_2^{-1} y_2 \oplus y_2^{-1} x_2),$$

целевая функция задачи принимает следующий вид:

$$\phi(x_1, x_2) = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i (x_1^{-1} r_{1i} \oplus r_{1i}^{-1} x_1)(x_2^{-1} r_{2i} \oplus r_{2i}^{-1} x_2). \qquad (7)$$

Ниже решение задачи (6) будет получено для различных случаев расположения на плоскости прямой, на которой выполняется размещение.

4.1. Размещение на горизонтальной прямой. Предположим, что заданы числа $f, g, q \in \mathbb{R}$ при условии $f \leq g$. Рассмотрим задачу размещения на отрезке горизонтальной прямой, для которой определим множество

$$S = \{(x_1, x_2)^T \; | f \leq x_1 \leq g, \; x_2 = q\}. \qquad (8)$$

Для решения задачи в терминах полуполя $\mathbb{R}_{\max,+}$ введем обозначения

$$a = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i r_{1i} (q^{-1} r_{2i} \oplus r_{2i}^{-1} q), \qquad b = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i r_{1i}^{-1} (q^{-1} r_{2i} \oplus r_{2i}^{-1} q).$$

Запишем целевую функцию (7), используя введенные обозначения, в виде

$$\phi(x_1, x_2) = \bigoplus_{i=1}^{m} \left(w_i r_{1i} (q^{-1} r_{2i} \oplus r_{2i}^{-1} q) x_1^{-1} \oplus w_i r_{1i}^{-1} (q^{-1} r_{2i} \oplus q r_{2i}^{-1}) x_1 \right) = a x_1^{-1} \oplus b x_1.$$

Теперь рассматриваемая задача сводится к задаче (5), в которой t заменяется на x_1. Применяя следствие 2, находим, что минимум в задаче (6) при условии (8) равен $\mu = a^{1/2} b^{1/2} \oplus a g^{-1} \oplus b f$ и достигается тогда и только тогда, когда

$$x_1 = \left(\mu^{-1} a \oplus f\right)^{1-\alpha} \left(\mu^{-1} b \oplus g^{-1}\right)^{-\alpha}, \qquad x_2 = q, \qquad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Представление решения в обычных обозначениях дает минимум задачи в виде

$$\mu = \max\left(\frac{a+b}{2}, a - g, b + f\right),$$

который достигается тогда и только тогда, когда

$$x_1 = (1-\alpha)\max(-\mu + a, f) - \alpha \max(-\mu + b, -g), \qquad x_2 = q,$$

где α удовлетворяет условию $0 \leq \alpha \leq 1$ и справедливы равенства

$$a = \max_{1 \leq i \leq m} (w_i + r_{1i} + r_{2i} - q, w_i + r_{1i} - r_{2i} + q),$$

$$b = \max_{1 \le i \le m} (w_i - r_{1i} + r_{2i} - q, w_i - r_{1i} - r_{2i} + q).$$

Заметим, что решение задачи размещения на отрезке вертикальной прямой при условии $S = \{(x_1, x_2)^T \ |x_1 = p, \ f \le x_2 \le g\}$, где $f, g, p \in \mathbb{R}$ — заданные числа, прямо получается из решения предыдущей задачи путем замены x_1 на x_2, x_2 на x_1, а также q на p.

***4.2. Размещение на прямой, наклоненной под углом* 45°.** Перейдем к решению задачи размещения на отрезке прямой, наклоненной к горизонтальной оси координат под углом 45°. Пусть заданы числа $f, g, p, q \in \mathbb{R}$, где $f \le g$. Тогда отрезок прямой можно определить при помощи параметра t в виде

$$S = \{(x_1, x_2)^T \ |x_1 = p + t, \ x_2 = q + t, \ f \le t \le g\}. \tag{9}$$

Чтобы записать целевую функцию в компактном виде, введем обозначения

$$a = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i p^{-1} q^{-1} r_{1i} r_{2i}, \quad b = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i p q r_{1i}^{-1} r_{2i}^{-1}, \quad c = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i (p^{-1} q r_{1i} r_{2i}^{-1} \oplus p q^{-1} r_{1i}^{-1} r_{2i}).$$

Записывая равенства $x_1 = p + t$ и $x_2 = q + t$ в терминах тропических операций, будем иметь $x_1 = pt$ и $x_2 = qt$. В результате подстановки в целевую функцию (7) с учетом введенных обозначений a, b и c получим

$$\phi(x_1, x_2) = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i (p^{-1} r_{1i} t^{-1} \oplus r_{1i}^{-1} p t)(q^{-1} r_{2i} t^{-1} \oplus r_{2i}^{-1} q t) = a t^{-2} \oplus b t^2 \oplus c.$$

Рассматриваемая задача принимает вид (4), ее решение дает следствие 1. Получаем минимум в задаче (6) при условии (9), равный $\mu = a^{1/2} b^{1/2} \oplus a g^{-2} \oplus b f^2 \oplus c$, который достигается тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} x_1 &= p(\mu^{-1/2} a^{1/2} \oplus f)^{1-\alpha} (\mu^{-1/2} b^{1/2} \oplus g^{-1})^{-\alpha}, \\ x_2 &= q(\mu^{-1/2} a^{1/2} \oplus f)^{1-\alpha} (\mu^{-1/2} b^{1/2} \oplus g^{-1})^{-\alpha}, \qquad 0 \le \alpha \le 1. \end{aligned}$$

С использованием обычных обозначений полученный результат можно представить в следующей форме. Минимум в задаче равен

$$\mu = \max((a + b)/2, c, a - 2g, b + 2f)$$

и достигается тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} x_1 &= (1 - \alpha) \max((a - \mu)/2, f) - \alpha \max((b - \mu)/2, -g) + p, \\ x_2 &= (1 - \alpha) \max((a - \mu)/2, f) - \alpha \max((b - \mu)/2, -g) + q, \end{aligned}$$

где α удовлетворяет условию $0 \le \alpha \le 1$ и справедливы равенства

$$a = \max_{1 \le i \le m} (w_i + r_{1i} + r_{2i} - p - q), \qquad b = \max_{1 \le i \le m} (w_i - r_{1i} - r_{2i} + p + q),$$
$$c = \max_{1 \le i \le m} (w_i + r_{1i} - r_{2i} - p + q, w_i - r_{1i} + r_{2i} + p - q).$$

Нетрудно видеть, что допустимое множество для задачи размещения на отрезке прямой, наклоненной под углом 135° к горизонтальной оси, может быть представлено в виде $S = \{(x_1, x_2)^T \; | x_1 = p - t, \; x_2 = q + t, \; f \leq t \leq g\}$. Решение такой задачи не имеет существенных отличий от решения предыдущей и находится аналогичным путем.

4.3. Размещение на произвольной прямой. Рассмотрим задачу размещения на отрезке произвольной прямой, который для фиксированных чисел $f, g, q, k \in \mathbb{R}$, где $f \leq g$, описывается при помощи множества

$$S = \{(x_1, x_2)^T \; | f \leq x_1 \leq g, \; x_2 = kx_1 + q\}. \tag{10}$$

Сначала также, как при решении предыдущих задач, введем обозначения

$$a = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i r_{1i} r_{2i}^{-1} q, \quad b = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i r_{1i}^{-1} r_{2i} q^{-1}, \quad c = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i r_{1i} r_{2i} q^{-1}, \quad d = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i r_{1i}^{-1} r_{2i}^{-1} q.$$

Заменим равенство $x_2 = kx_1 + q$ на эквивалентное ему равенство в терминах тропических операций в виде $x_2 = qx_1^k$. После подстановки в целевую функцию (7) получим

$$\phi(x_1, x_2) = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i (x_1^{-1} r_{1i} \oplus r_{1i}^{-1} x_1)(q^{-1} x_1^{-k} r_{2i} \oplus r_{2i}^{-1} q x_1^k) =$$
$$= a x_1^{k-1} \oplus b x_1^{-(k-1)} \oplus c x_1^{-(k+1)} \oplus d x_1^{k+1}.$$

Записывая целевую функцию вместе с ограничением, приходим к задаче оптимизации относительно x_1 в виде (1). Решение полученной задачи с помощью теоремы 1 дает оптимальные значения для x_1, после чего остается вычислить $x_2 = qx_1^k$.

В результате для задачи (6) при условии (10) оказываются справедливыми следующие утверждения:

1) если $k < -1$, то минимум в задаче равен

$$\mu = a^{1/2} b^{1/2} \oplus a^{(k+1)/2k} c^{(k-1)/2k} \oplus b^{(k+1)/2k} d^{(k-1)/2k} \oplus c^{1/2} d^{1/2} \oplus$$
$$\oplus a g^{k-1} \oplus b f^{-(k-1)} \oplus c f^{-(k+1)} \oplus d g^{k+1}$$

и достигается тогда и только тогда, когда

$$x_1 = \left((\mu a^{-1})^{1/(k-1)} \oplus (\mu d^{-1})^{1/(k+1)} \oplus f\right)^{1-\alpha} \otimes$$
$$\otimes \left((\mu b^{-1})^{1/(k-1)} \oplus (\mu c^{-1})^{1/(k+1)} \oplus g^{-1}\right)^{-\alpha},$$
$$x_2 = q\left((\mu a^{-1})^{1/(k-1)} \oplus (\mu d^{-1})^{1/(k+1)} \oplus f\right)^{(1-\alpha)k} \otimes$$
$$\otimes \left((\mu b^{-1})^{1/(k-1)} \oplus (\mu c^{-1})^{1/(k+1)} \oplus g^{-1}\right)^{-\alpha k};$$

2) если $-1 \leq k \leq 1$, то минимум равен

$$\mu = a^{1/2} b^{1/2} \oplus a^{(k+1)/2} d^{-(k-1)/2} \oplus b^{(k+1)/2} c^{-(k-1)/2} \oplus c^{1/2} d^{1/2} \oplus$$
$$\oplus a g^{k-1} \oplus b f^{-(k-1)} \oplus c g^{-(k+1)} \oplus d f^{k+1}$$

и достигается тогда и только тогда, когда

$$x_1 = \Big((\mu a^{-1})^{1/(k-1)} \oplus (\mu^{-1} c)^{1/(k+1)} \oplus f\Big)^{1-\alpha} \otimes \otimes \Big((\mu b^{-1})^{1/(k-1)} \oplus (\mu^{-1} d)^{1/(k+1)} \oplus g^{-1}\Big)^{-\alpha},$$

$$x_2 = q\Big((\mu a^{-1})^{1/(k-1)} \oplus (\mu^{-1} c)^{1/(k+1)} \oplus f\Big)^{(1-\alpha)k} \otimes \otimes \Big((\mu b^{-1})^{1/(k-1)} \oplus (\mu^{-1} d)^{1/(k+1)} \oplus g^{-1}\Big)^{-\alpha k};$$

3) если $k > 1$, то минимум равен

$$\mu = a^{1/2} b^{1/2} \oplus a^{(k+1)/2k} c^{(k-1)/2k} \oplus b^{(k+1)/2k} d^{(k-1)/2k} \oplus c^{1/2} d^{1/2} \oplus \oplus a f^{k-1} \oplus b g^{-(k-1)} \oplus c g^{-(k+1)} \oplus d f^{k+1}$$

и достигается тогда и только тогда, когда

$$x_1 = \Big((\mu^{-1} b)^{1/(k-1)} \oplus (\mu^{-1} c)^{1/(k+1)} \oplus f\Big)^{1-\alpha} \otimes \otimes \Big((\mu^{-1} a)^{1/(k-1)} \oplus (\mu^{-1} d)^{1/(k+1)} \oplus g^{-1}\Big)^{-\alpha},$$

$$x_2 = q\Big((\mu^{-1} b)^{1/(k-1)} \oplus (\mu^{-1} c)^{1/(k+1)} \oplus f\Big)^{(1-\alpha)k} \otimes \otimes \Big((\mu^{-1} a)^{1/(k-1)} \oplus (\mu^{-1} d)^{1/(k+1)} \oplus g^{-1}\Big)^{-\alpha k};$$

где α — любое число, удовлетворяющее условию $0 \le \alpha \le 1$.

При использовании обычных обозначений найденное решение описывается так:

1) если $k < -1$, то минимум в задаче (6) при условии (10) равен

$$\mu = \max\Big(\frac{a+b}{2}, \frac{a(k+1)+c(k-1)}{2k}, \frac{b(k+1)+d(k-1)}{2k}, \frac{c+d}{2}, a+(k-1)g, b-(k-1)f, c-(k+1)f, d+(k+1)g\Big)$$

и достигается тогда и только тогда, когда

$$x_1 = (1-\alpha)\max\left(\frac{\mu-a}{k-1}, \frac{\mu-d}{k+1}, f\right) - \alpha\max\left(\frac{\mu-b}{k-1}, \frac{\mu-c}{k+1}, -g\right),$$

$$x_2 = k\left((1-\alpha)\max\left(\frac{\mu-a}{k-1}, \frac{\mu-d}{k+1}, f\right) - \alpha\max\left(\frac{\mu-b}{k-1}, \frac{\mu-c}{k+1}, -g\right)\right) + q;$$

2) если $-1 \le k \le 1$, то минимум равен

$$\mu = \max\Big(\frac{a+b}{2}, \frac{a(k+1)-d(k-1)}{2}, \frac{b(k+1)-c(k-1)}{2}, \frac{c+d}{2}, a+(k-1)g, b-(k-1)f, c-(k+1)g, d+(k+1)f\Big)$$

и достигается тогда и только тогда, когда

$$x_1 = (1-\alpha)\max\left(\frac{\mu-a}{k-1}, \frac{c-\mu}{k+1}, f\right) - \alpha\max\left(\frac{\mu-b}{k-1}, \frac{d-\mu}{k+1}, -g\right),$$
$$x_2 = k\left((1-\alpha)\max\left(\frac{\mu-a}{k-1}, \frac{c-\mu}{k+1}, f\right) - \alpha\max\left(\frac{\mu-b}{k-1}, \frac{d-\mu}{k+1}, -g\right)\right) + q;$$

3) если $k > 1$, то минимум равен

$$\mu = \max\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a(k+1)+c(k-1)}{2k}, \frac{b(k+1)+d(k-1)}{2k}, \frac{c+d}{2},\right.$$
$$\left. a+(k-1)f, b-(k-1)g, c-(k+1)g, d+(k+1)f\right)$$

и достигается тогда и только тогда, когда

$$x_1 = (1-\alpha)\max\left(\frac{b-\mu}{k-1}, \frac{c-\mu}{k+1}, f\right) - \alpha\max\left(\frac{a-\mu}{k-1}, \frac{d-\mu}{k+1}, -g\right),$$
$$x_2 = k\left((1-\alpha)\max\left(\frac{b-\mu}{k-1}, \frac{c-\mu}{k+1}, f\right) - \alpha\max\left(\frac{a-\mu}{k-1}, \frac{d-\mu}{k+1}, -g\right)\right) + q;$$

где α удовлетворяет условию $0 \leq \alpha \leq 1$ и справедливы равенства

$$a = \max_{1\leq i\leq m}(w_i - r_{1i} + r_{2i} + q), \qquad b = \max_{1\leq i\leq m}(w_i + r_{1i} - r_{2i} - q),$$
$$c = \max_{1\leq i\leq m}(w_i + r_{1i} + r_{2i} - q), \qquad d = \max_{1\leq i\leq m}(w_i - r_{1i} - r_{2i} + q).$$

В заключение авторы выражают благодарность рецензентам за ряд важных замечаний и предложений, которые были учтены при подготовке рукописи статьи.

Литература

1. *Baccelli F., Cohen G., Olsder G. J., Quadrat J.-P.* Synchronization and Linearity. Wiley Series in Probability and Statistics. Chichester: Wiley, 1993. 514 p.

2. *Cuninghame-Green R. A.* Minimax algebra and applications // Advances in Imaging and Electron Physics. Vol. 90 / Ed. by P. W. Hawkes. San Diego: Academic Press, 1994. P. 1–121.

3. *Маслов В. П., Колокольцов В. Н.* Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. М.: Физматлит, 1994. 144 с.

4. *Golan J. S.* Semirings and Affine Equations over Them: Theory and Applications. In Ser. Mathematics and Its Applications. New York: Springer, 2003. Vol. 556. 256 p.

5. *Heidergott B, Olsder G. J., van der Woude J.* Max Plus at Work. In Ser. Princeton Series in Applied Mathematics. Princeton: Princeton Univ. Press, 2006. 226 p.

6. *McEneaney W. M.* Max-Plus Methods for Nonlinear Control and Estimation. In Ser. Systems and Control: Foundations and Applications. Boston: Birkhäuser, 2006. 241 p.

7. *Itenberg I., Mikhalkin G., Shustin E. I.* Tropical algebraic geometry. In Ser. Oberwolfach Seminars. Basel: Birkhäuser, 2007. Vol. 35. 104 p.

8. *Gondran M., Minoux M.* Graphs, Dioids and Semirings. In Ser. Operations Research / Computer Science Interfaces. New York: Springer, 2008. Vol. 41. 383 p.

9. *Butkovič P.* Max-linear Systems: Theory and Algorithms. In Ser. Springer Monographs in Mathematics. London: Springer, 2010. 272 p.

10. *Krivulin N.* A multidimensional tropical optimization problem with nonlinear objective function and linear constraints // Optimization. 2015. Vol. 64, N 5. P. 1107–1129.

11. *Zimmermann K.* Disjunctive optimization, max-separable problems and extremal algebras // Theoret. Comput. Sci. 2003. Vol. 293, N 1. P. 45–54.

12. *Krivulin N. K.* An extremal property of the eigenvalue of irreducible matrices in idempotent algebra and solution of the Rawls location problem // Vestnik St. Petersburg Univ. Math. 2011. Vol. 44, N 4. P. 272–281.

13. *Krivulin N. K., Plotnikov P. V.* On an algebraic solution of the Rawls location problem in the plane with rectilinear metric // Vestnik St. Petersburg Univ. Math. 2015. Vol. 48, N 2. P. 75-81.

14. *Elzinga J., Hearn D. W.* Geometrical solutions for some minimax location problems // Transport. Sci. 1972. Vol. 6, N 4. P. 379–394.

15. *Francis R. L.* A geometrical solution procedure for a rectilinear distance minimax location problem // AIIE Trans. 1972. Vol. 4, N 4. P. 328–332.

16. *Krivulin N.* Algebraic solutions of tropical optimization problems // Lobachevskii J. Math. 2015. Vol. 36, N 4. P. 363–374.

Статья поступила в редакцию 4 мая 2016 г.

Сведения об авторах

Кривулин Николай Кимович — доктор физико-математических наук, доцент; nkk@math.spbu.ru

Плотников Павел Владимирович — аспирант; pavplot@gmail.com

USING TROPICAL OPTIMIZATION TO SOLVE MINIMAX LOCATION PROBLEMS WITH RECTILINEAR METRIC ON THE LINE

Nikolai K. Krivulin, Pavel V. Plotnikov

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; nkk@math.spbu.ru, pavplot@gmail.com

Methods of tropical (idempotent) mathematics are applied to the solution of minimax location problems under constraints on the feasible location region. A tropical optimization problem is first considered, formulated in terms of a general semifield with idempotent addition. To solve the optimization problem, a parameter is introduced to represent the minimum value of the objective function, and then the problem is reduced to a parametrized system of inequalities. The parameter is evaluated using existence conditions for solutions of the system, whereas the solutions of the system for the obtained value of the parameter are taken as the solutions of the initial optimization problem. Then, a minimax location problem is formulated to locate a single facility on a line segment in the plane with rectilinear metric. When no constraints are imposed, this problem, which is also known as the Rawls problem or the messenger boy problem, has known geometric and algebraic solutions. For the location problems, where the location region is restricted to a line segment, a new solution is obtained, based on the representation of the problems in the form of the tropical optimization problem considered above. Explicit solutions of the problems for various positions of the line are given both in terms of tropical mathematics and in the standard form. Refs 16.

Keywords: tropical optimization, idempotent semifield, rectilinear metric, Rawls location problem with constraints.

References

1. Baccelli F., Cohen G., Olsder G. J., Quadrat J.-P., *Synchronization and Linearity. Wiley Series in Probability and Statistics* (Chichester, Wiley, 1993, 514 p.).

2. Cuninghame-Green R. A., “Minimax algebra and applications”, *Advances in Imaging and Electron Physics* **90**, 1–121 (ed. by P. W. Hawkes, Academic Press, San Diego, 1994).

3. Maslov V. P., Kolokoltsov V. N., *Idempotent analysis and its applications to optimal control theory* (Fizmatlit, Moscow, 1994, 144 p.) [in Russian].

4. Golan J. S., *Semirings and Affine Equations over Them: Theory and Applications.* In Ser. *Mathematics and Its Applications* (Springer, New York, 2003, **556**, 256 p.).

5. Heidergott B., Olsder G. J., van der Woude J., *Max-plus at Work.* In Ser. *Princeton Series in Applied Mathematics* (Princeton Univ. Press, Princeton, 2006, 226 p.).

6. McEneaney W. M., *Max-Plus Methods for Nonlinear Control and Estimation.* In Ser. *Systems and Control: Foundations and Applications* (Birkhäuser, Boston, 2006, 241 p.).

7. Itenberg I., Mikhalkin G., Shustin E. I., *Tropical Algebraic Geometry.* In Ser. *Oberwolfach Seminars* (Birkhäuser, Basel, 2007, **35**, 104 p.).

8. Gondran M., Minoux M., *Graphs, Dioids and Semirings.* In Ser. *Operations Research / Computer Science Interfaces* (Springer, New York, 2008, **41**, 383 p.).

9. Butkovič P., *Max-linear Systems: Theory and Algorithms.* In Ser. *Springer Monographs in Mathematics* (Springer, London, 2010, 272 p.).

10. Krivulin N., "A multidimensional tropical optimization problem with nonlinear objective function and linear constraints", *Optimization* **64**(5), 1107–1129 (2015).

11. Zimmermann K., "Disjunctive optimization, max-separable problems and extremal algebras", *Theoret. Comput. Sci.* **293**(1), 45–54 (2003).

12. Krivulin N. K., "An extremal property of the eigenvalue of irreducible matrices in idempotent algebra and solution of the Rawls location problem", *Vestnik St. Petersburg Univ. Math.* **44**(4), 272–281 (2011).

13. Krivulin N. K., Plotnikov P. V., "On an algebraic solution of the Rawls location problem in the plane with rectilinear metric", *Vestnik St. Petersburg Univ. Math.* **48**(2), 75–81 (2015).

14. Elzinga J., Hearn D. W., "Geometrical solutions for some minimax location problems", *Transport. Sci.* **6**(4), 379–394 (1972).

15. Francis R. L., "A geometrical solution procedure for a rectilinear distance minimax location problem", *AIIE Trans.* **4**(4), 328–332 (1972).

16. Krivulin N., "Algebraic solutions of tropical optimization problems", *Lobachevskii J. Math.* **36**(4), 363–374 (2015).

Для цитирования: Кривулин Н. К., Плотников П. В. Использование тропической оптимизации для решения минимаксных задач размещения с прямоугольной метрикой на прямой // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2016. Т. 3 (61). Вып. 4. С. 602–614. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.409

For citation: Krivulin N. K., Plotnikov P. V. Using tropical optimization to solve minimax location problems with rectilinear metric on the line. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2016, vol. 3 (61), issue 4, pp. 602–614.
DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.409