

ОБ ОДНОЙ КУБИЧЕСКОЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ*

В. Н. Малозёмов, Г. Ш. Тамасян

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

В простейшей вариационной задаче стационарная кривая является непрерывно дифференцируемой функцией. Теорема Гильберта о дифференцируемости содержит условие, которое гарантирует наличие второй производной стационарной кривой. Желательно иметь простой пример, когда условие теоремы Гильберта не выполнено и стационарная кривая не является дважды дифференцируемой.

В этой заметке анализируется кубическая вариационная задача со следующими свойствами: функционал задачи не ограничен как сверху, так и снизу; существует стационарная кривая, которая получается с помощью склеивания двух экстремалей и в точке склеивания которой отсутствует вторая производная. Несмотря на неблагоприятную ситуацию, делается попытка применить к данной задаче метод наискорейшего спуска (в форме, предложенной В. Ф. Демьяновым). Выясняется, что при правильной регулировке шага метод сходится к стационарной кривой. Библиогр. 2 назв. Ил. 6. Табл. 1.

Ключевые слова: кубическая вариационная задача, стационарная кривая, метод наискорейшего спуска.

1. Кубическая вариационная задача. Рассмотрим кубическую вариационную задачу вида

$$J(x) := \int_{-1}^1 [(x')^3 + 24tx] dt \rightarrow \text{extr}, \quad (1)$$

$$x(-1) = -1, \quad x(1) = 1, \quad x \in C^1[-1, 1].$$

Покажем, что для этой задачи существует стационарная кривая, которая, однако, не принадлежит пространству $C^2[-1, 1]$; при этом

$$\inf J(x) = -\infty, \quad \sup J(x) = \infty, \quad (2)$$

где инфимум и супремум берутся по множеству всех допустимых кривых.

Подынтегральную функцию обозначим буквой F ,

$$F(t, x, x') = (x')^3 + 24tx.$$

Стационарной кривой называется решение уравнения Эйлера

$$F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} = 0,$$

удовлетворяющее краевым условиям.

В данном случае приходим к нелинейной задаче:

$$\frac{d}{dt}(x')^2 = 8t, \quad (3)$$

$$x(-1) = -1, \quad x(1) = 1. \quad (4)$$

*Работа выполнена при поддержке СПбГУ (грант № 9.38.205.2014).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2016

Решение уравнения (3) будем искать в виде алгебраического полинома второй степени, поскольку его производная есть полином первой степени, квадрат производной — полином второй степени, дифференцирование которого снова приводит к полиному первой степени. Несложные вычисления показывают, что необходимо взять

$$x(t) = \varepsilon t^2 + c, \quad (5)$$

где $\varepsilon = \pm 1$ и c — произвольная вещественная константа.

К сожалению, ни одна из кривых вида (5), которые называют *экстремалими*, не удовлетворяет краевым условиям (4). Стационарную кривую получим, склеивая две различные экстремали. Положим

$$x_*(t) = \begin{cases} t^2 & \text{при } t \in [0, 1], \\ -t^2 & \text{при } t \in [-1, 0]. \end{cases} \quad (6)$$

Имеем $x'_*(t) = 2|t|$. Ясно, что функция x_* принадлежит пространству $C^1[-1, 1]$, но не принадлежит $C^2[-1, 1]$. Последний факт соответствует теореме Гильберта о дифференцируемости (см., например, [1, с. 111]), так как вторая производная $F''_{x'_*x'_*}$ на функции x_* в точке $t = 0$ обращается в ноль.

Функция x_* удовлетворяет уравнению (3) и краевым условиям (4). По определению она является стационарной кривой для вариационной задачи (1).

2. Доказательство предельных соотношений (2). Введем параметрическое семейство допустимых кривых (рис. 1)

$$x_\alpha(t) = \begin{cases} \left(\frac{t-\alpha}{1+\alpha}\right)^2 - 2 & \text{при } t \in [-1, \alpha], \\ 3\left(\frac{t-\alpha}{1-\alpha}\right)^2 - 2 & \text{при } t \in [\alpha, 1], \end{cases}$$

где $\alpha \in (-1, 1)$.

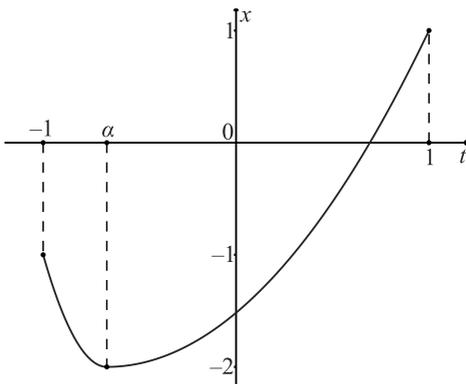


Рис. 1. График функции $x_\alpha(t)$.

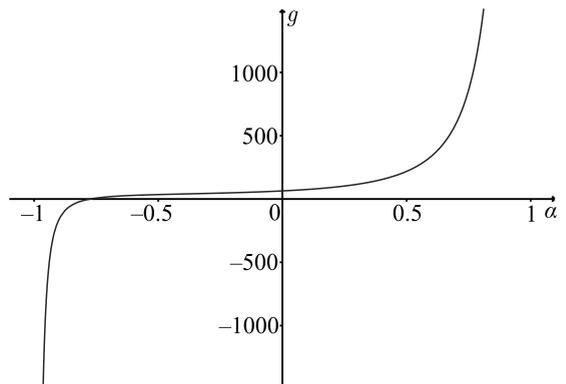


Рис. 2. График функции $g(\alpha) = J(x_\alpha)$ на интервале $(-1, 1)$.

Вычислим значение $J(x_\alpha)$. Имеем

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{\alpha} (x'_\alpha)^3 dt &= \frac{2}{(1+\alpha)^6} (t-\alpha)^4 \Big|_{-1}^{\alpha} = -\frac{2}{(1+\alpha)^2}, \\ \int_{\alpha}^1 (x'_\alpha)^3 dt &= \frac{54}{(1-\alpha)^6} (t-\alpha)^4 \Big|_{\alpha}^1 = \frac{54}{(1-\alpha)^2}, \\ 24 \int_{-1}^1 tx_\alpha dt &= -4(\alpha^2 + 4\alpha - 3). \end{aligned}$$

Значит, выполняется равенство

$$J(x_\alpha) = -\frac{2}{(1+\alpha)^2} + \frac{54}{(1-\alpha)^2} - 4(\alpha^2 + 4\alpha - 3).$$

Отсюда очевидным образом следуют предельные соотношения (2) (рис. 2).

3. Метод наискорейшего спуска. Интересно, что получится, если применить метод наискорейшего спуска к решению задачи (1). Напомним описание этого метода [2].

Рассмотрим простейшую вариационную задачу

$$\begin{aligned} J(x) &:= \int_a^b F(t, x(t), x'(t)) dt \rightarrow \inf, \\ x(a) &= A, \quad x(b) = B, \quad x \in C^1[a, b]. \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь функция $F(t, u, v)$ непрерывна вместе с $\partial F/\partial u$ и $\partial F/\partial v$ на множестве $[a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Решение будем искать в виде

$$x(t) = A + \int_a^t z(\tau) d\tau, \tag{8}$$

где $z \in C[a, b]$. В этом случае $x'(t) = z(t)$ на $[a, b]$ и $x(a) = A$.

Перепишем задачу (7) в терминах функции z :

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_a^b F(t, x, z) dt \rightarrow \inf, \\ \varphi(z) &:= A + \int_a^b z(t) dt - B = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Как известно [2, с. 182], функционал f дифференцируем по Гато, причем его производная Гато в точке z имеет вид

$$Q(t, z) = \int_t^b \frac{\partial F(\tau, x(\tau), z(\tau))}{\partial x} d\tau + \frac{\partial F(t, x(t), z(t))}{\partial z}.$$

Направление наискорейшего спуска функционала $f(z)$ при ограничении $\varphi(z) = 0$ вычисляется по формуле

$$G(t, z) = -\frac{q(t, z)}{\|q(t, z)\|},$$

где

$$q(t, z) = Q(t, z) - \frac{1}{b-a} \int_a^b Q(t, z) dt \quad (10)$$

$$\|q(t, z)\| = \sqrt{\int_a^b q^2(t, z) dt}.$$

Опишем алгоритм решения задачи (9), который мы будем использовать при расчетах. В качестве начального приближения берется произвольная функция $z_0 \in C[a, b]$, удовлетворяющая ограничению $\varphi(z_0) = 0$. По формуле (10) вычисляется $q(t, z_0)$. Если $q(t, z_0) \equiv 0$ на $[a, b]$, то z_0 — стационарная точка. Процесс заканчивается. Иначе переходим к построению z_1 .

Общая $(k+1)$ -я итерация, перед началом которой имеются z_k и $q(t, z_k) \not\equiv 0$, состоит из следующих шагов:

- находим направление спуска $G_k(t) = G(t, z_k)$;
- вычисляем $\gamma_k > 0$ как точку минимума функции $\psi_k(\gamma) = f(z_k + \gamma G_k)$ на полуоси $(0, +\infty)$;
- определяем $z_{k+1} = z_k + \gamma_k G_k$.

Если $q(t, z_{k+1}) \equiv 0$ на $[a, b]$, то z_{k+1} — стационарная точка. Вычисления прекращаются. Иначе переходим к очередной итерации.

Отметим, что все точки последовательности z_0, z_1, \dots удовлетворяют ограничению задачи (9). Функции вида (8)

$$x_k(t) = A + \int_a^t z_k(\tau) d\tau, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (11)$$

удовлетворяют ограничениям задачи (7) и образуют для нее минимизирующую последовательность.

4. Пример. Воспользуемся описанным алгоритмом для решения задачи (1), заменив в ней операцию «extr» на «inf». Имеем $a = -1$, $b = 1$, $A = -1$, $B = 1$, $F(t, u, v) = v^3 + 24tu$ и

$$Q(t, z) = 12(1 - t^2) + 3z^2(t).$$

В качестве начального приближения возьмем функцию $x_0(t) = t$. Ей соответствует $z_0(t) \equiv 1$. Вычисляем

$$f(z_0) = 18, \quad Q(t, z_0) = -12t^2 + 15, \\ G_0(t) = \sqrt{\frac{5}{128}}(12t^2 - 4).$$

Далее получаем

$$\psi_0(\gamma) := f(z_0 + \gamma G_0) = \frac{\sqrt{10}}{7}\gamma^3 + 3\gamma^2 - \frac{8\sqrt{10}}{5}\gamma + 18.$$

График этой функции изображен на рис. 3. Единственным положительным корнем функции $\psi'_0(\gamma)$ является

$$\gamma_0 = \frac{\sqrt{10}}{30} \left(\sqrt{777} - 21 \right) \approx 0.725.$$

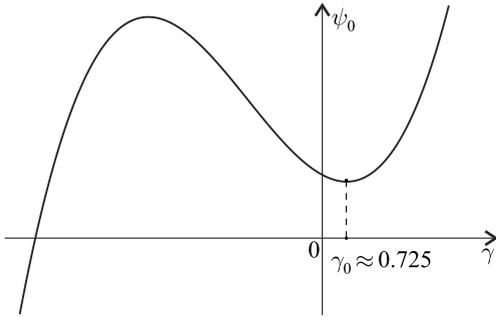


Рис. 3. График функции $\psi_0(\gamma)$.

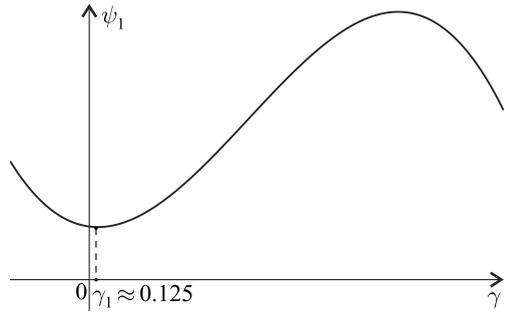


Рис. 4. График функции $\psi_1(\gamma)$.

Для первого приближения z_1 получаем представление

$$z_1(t) := z_0(t) + \gamma_0 G_0(t) = \frac{\sqrt{777}-21}{4} t^2 + \frac{33-\sqrt{777}}{12}.$$

Переходим к построению z_2 . Вычисляем

$$\begin{aligned} f(z_1) &= 39 - \frac{37}{45} \sqrt{777} \approx 16.081, \\ Q(t, z_1) &= \frac{29-\sqrt{777}}{64} (504t^4 - 432t^2 + 407 + 11\sqrt{777}), \\ G_1(t) &= \frac{3(29-\sqrt{777})}{16\sqrt{809-29\sqrt{777}}} (35t^4 - 30t^2 + 3). \end{aligned}$$

Далее получаем

$$\psi_1(\gamma) := f(z_1 + \gamma G_1) \approx -0.343\gamma^3 + 3.893\gamma^2 - 0.955\gamma + 16.081.$$

График этой функции изображен на рис. 4.

Старший коэффициент полинома $\psi_1(\gamma)$ отрицательный, поэтому выполняется

$$\inf_{\gamma > 0} \psi_1(\gamma) = -\infty.$$

Отсюда следует, что рассматриваемая кубическая вариационная задача (1) не имеет решения.

Можно ограничиться локальным минимумом функции ψ_1 , который достигается в точке $\gamma_1 \approx 0.125$, и положить $z_2 = z_1 + \gamma_1 G_1$. Если и в дальнейшем на этапе поиска величины шага спуска ограничиваться информацией о локальном минимуме, получим сходящуюся последовательность $\{z_k\}$.

В таблице приведены результаты расчетов для первых пяти приближений. Напомним, что стационарная кривая $x_*(t)$ определяется формулой (6). При этом имеем $z_*(t) = 2|t|$. Функции x_k и z_k связаны соотношением (11).

Результаты расчетов

k	$f(z_k)$	$\ q(t, z_k)\ $	$\ z_* - z_k\ $	$\max_{-1 \leq t \leq 1} x_*(t) - x_k(t) $
0	18	5.060	0.816	0.250
1	16.081	0.955	0.214	0.053
2	16.022	0.437	0.132	0.033
3	16.008	0.248	0.090	0.020
4	16.004	0.151	0.069	0.015
5	16.002	0.086	0.057	0.012

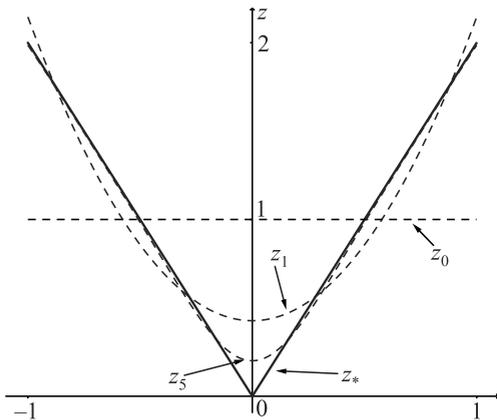


Рис. 5. Графики функций z_k и z_* .

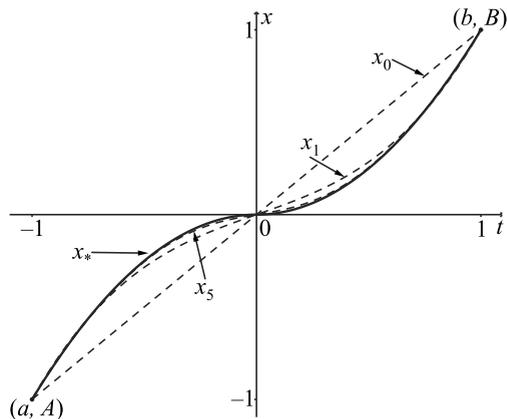


Рис. 6. Графики функций x_k и x_* .

На рисунках 5 и 6 изображены графики функций z_k и x_k при k , равном 0, 1, 5, и графики предельных функций z_* и x_* .

Функция x_5 имеет вид

$$\begin{aligned}
 x_5(t) \approx & 0.192203 t + 1.739081 t^3 - 2.853252 t^5 + 5.459985 t^7 - 8.941935 t^9 + \\
 & + 12.372540 t^{11} - 14.610029 t^{13} + 14.640463 t^{15} - 12.266217 t^{17} + \\
 & + 8.470679 t^{19} - 4.748481 t^{21} + 2.121426 t^{23} - 0.736246 t^{25} + \\
 & + 0.190414 t^{27} - 0.034208 t^{29} + 0.003763 t^{31} - 0.000189 t^{33}.
 \end{aligned}$$

5. Проекция производной Гато на подпространство. В заключение отметим, что функция $q(t, z)$ является ортогональной проекцией производной Гато $Q(t, z)$ на подпространство пространства $C[a, b]$, определяемое условием

$$\int_a^b z(t) dt = 0. \tag{12}$$

Это следует из приведенной ниже леммы.

Пусть $z_0(t)$ — произвольная непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция. Рассмотрим экстремальную задачу: *минимизировать функционал*

$$\int_a^b [z(t) - z_0(t)]^2 dt$$

по всем функциям $z \in C[a, b]$, удовлетворяющим ограничению (12).

Лемма 1. *Данная задача имеет единственное решение*

$$z_*(t) = z_0(t) - c_0, \tag{13}$$

где $c_0 = \frac{1}{b-a} \int_a^b z_0(t) dt$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой функции z , удовлетворяющей условию (12), в силу определения c_0 имеем

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_a^b [z - (z_0 - c_0)]^2 dt = \int_a^b [(z - z_0) + c_0]^2 dt = \\ &= \int_a^b (z - z_0)^2 dt - 2 \int_a^b z_0 c_0 dt + \int_a^b c_0^2 dt = \int_a^b (z - z_0)^2 dt - (b - a)c_0^2. \end{aligned}$$

Значит, справедливо неравенство

$$\int_a^b (z - z_0)^2 dt \geq (b - a)c_0^2.$$

Равенство достигается только при $z = z_0 - c_0$. Лемма доказана. \square

ДОБАВЛЕНИЕ 1

Экстремальное свойство коэффициентов Фурье. Это добавление навеяно леммой из п. 5.

Пусть в пространстве $L_2[a, b]$ заданы функция x_0 и ортонормированная система $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$. Рассмотрим экстремальную задачу: *минимизировать*

$$\int_a^b [x - x_0]^2 dt$$

по всем функциям x из $L_2[a, b]$, удовлетворяющим условиям

$$\int_a^b x \xi_k dt = 0, \quad k \in 1 : n. \quad (14)$$

Теорема 1. *Данная задача имеет единственное решение*

$$x_* = x_0 - \sum_{k=1}^n c_k \xi_k,$$

где $c_k = \int_a^b x_0 \xi_k dt$ — коэффициенты Фурье функции x_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$p_0 = \sum_{k=1}^n c_k \xi_k.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \int_a^b x_0 p_0 dt &= \sum_{k=1}^n c_k \int_a^b x_0 \xi_k dt = \sum_{k=1}^n c_k^2, \\ \int_a^b p_0^2 dt &= \sum_{k,j=1}^n c_k c_j \int_a^b \xi_k \xi_j dt = \sum_{k=1}^n c_k^2. \end{aligned} \quad (15)$$

Возьмем произвольную функцию $x \in L_2[a, b]$, удовлетворяющую условиям (14). Для нее в силу (15) выполняется

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_a^b [x - (x_0 - p_0)]^2 dt = \int_a^b [(x - x_0) + p_0]^2 dt = \\ &= \int_a^b [x - x_0]^2 dt - 2 \int_a^b x_0 p_0 dt + \int_a^b p_0^2 dt = \int_a^b [x - x_0]^2 dt - \sum_{k=1}^n c_k^2. \end{aligned}$$

Остается переписать полученное неравенство в виде

$$\int_a^b [x - x_0]^2 dt \geq \sum_{k=1}^n c_k^2$$

и отметить, что равенство имеет место только тогда, когда $x = x_0 - p_0$. Теорема доказана. \square

ДОБАВЛЕНИЕ 2

Эквивалентные определения стационарной кривой. Напомним, что стационарной кривой для простейшей вариационной задачи (7) называется допустимая кривая, удовлетворяющая уравнению Эйлера. Можно дать эквивалентное определение стационарной кривой в терминах функции $q(t, z)$ вида (10).

Теорема 2. *Для того чтобы допустимая кривая x_* задачи (7) была стационарной, необходимо и достаточно, чтобы для производной $z_* = x'_*$ выполнялось соотношение*

$$q(t, z_*) \equiv 0 \quad \text{на } [a, b]. \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Пусть допустимая кривая x_* является стационарной кривой. Проинтегрировав уравнение Эйлера по отрезку $[t, b]$, получим

$$\int_t^b F'_x(\tau, x_*(\tau), z_*(\tau)) d\tau - F'_{x'}(b, x_*(b), z_*(b)) + F'_{x'}(t, x_*(t), z_*(t)) = 0$$

или

$$Q(t, z_*) \equiv \text{const} \quad \text{на } [a, b].$$

Теперь тождество (16) следует из определения (10) функции q .

Достаточность. Пусть x_* — допустимая кривая и $z_* = x'_*$. Тогда выполняется

$$x_*(t) = A + \int_a^t z_*(\tau) d\tau.$$

Продифференцируем тождество (16). Получим

$$-F'_x(t, x_*(t), x'_*(t)) + \frac{d}{dt} F'_{x'}(t, x_*(t), x'_*(t)) \equiv 0 \quad \text{на } [a, b].$$

Это означает, что x_* удовлетворяет уравнению Эйлера. По условию x_* удовлетворяет ограничениям задачи (7), так что кривая x_* является стационарной.

Теорема доказана. \blacksquare

Замечание. В п. 3 основного текста мы неявно пользовались следующим утверждением: если функция z принадлежит $C[a, b]$, удовлетворяет ограничению задачи (9) и $q(t, z) \equiv 0$ на $[a, b]$, то функция x вида (8) является стационарной кривой для задачи (7). Справедливость этого утверждения следует из теоремы 2, если учесть, что x удовлетворяет ограничениям задачи (7).

Литература

1. Коша А. Вариационное исчисление / А. Коша; пер. с венгер. Д. Валовича; под ред. Ш. А. Алимова. М.: Высшая школа, 1983. 279 с.
2. Демьянов В. Ф. Условия экстремума и вариационное исчисление. М.: Высшая школа, 2005. 335 с.

Статья поступила в редакцию 13 апреля 2016 г.

Сведения об авторах

Малозёмов Василий Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор;
v.malozemov@spbu.ru

Тамасян Григорий Шаликович — кандидат физико-математических наук, доцент;
g.tamasyan@spbu.ru

ON A CUBIC VARIATIONAL PROBLEM

Vassili N. Malozemov, Grigoriy Sh. Tamasyan

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation;
v.malozemov@spbu.ru, g.tamasyan@spbu.ru

An extremal curve of the simplest variational problem is a continuously differentiable function. Hilbert's differentiability theorem provides a condition that guarantees the existence of the second derivative of an extremal curve. It is desirable to have a simple example in which the condition of Hilbert's theorem fails to hold true and an extremal curve is not twice differentiable.

In this paper, we analyse a cubic variational problem with the following properties. The functional of the problem is neither bounded from above nor bounded from below. There exists an extremal curve of this problem that is obtained by pasting together two different extremal curves, and that is not twice differentiable at the sewing point. Despite this unfavourable situation, an attempt to apply the method of steepest descent (in the form proposed by V. F. Demyanov) to this problem is made. It appears that the method converges to the extremal curve provided one chooses a suitable step size rule. Refs 2. Figs 6. Table 1.

Keywords: cubic variational problem, extremal curve, method of steepest descent.

References

1. Kósa A., *Calculus of variations* (Vyssh. shkola, Moscow, 1983, 279 p.) [in Russian].
2. Demyanov V. F., *Extremality conditions and variational problems* (Vyssh. shkola, Moscow, 2005, 335 p.) [in Russian].

Для цитирования: Малозёмов В. Н., Тамасян Г. Ш. Об одной кубической вариационной задаче // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2016. Т. 3 (61). Вып. 4. С. 615–623. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.410

For citation: Malozemov V. N., Tamasyan G. S. On a cubic variational problem. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2016, vol. 3 (61), issue 4, pp. 615–623. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.410