УДК 514.172 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 3 (61). 2016. Вып. 4

ПЛОСКИЕ СЕЧЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ЦИЛИНДРОВ

В. В. Макеев

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Верно ли, что через любую внутреннюю точку трехмерного выпуклого тела проходит его плоское сечение со вписанным правильным шестиугольником, а через центр центрально-симметричного выпуклого тела проходит плоское сечение со вписанным правильным восьмиугольником? В работе эти утверждения доказаны для цилиндров специального вида. Библиогр. 4 назв.

Ключевые слова: цилиндр, сечение, правильный шестиугольник и восьмиугольник.

Говорим, что многоугольник вписан в выпуклую фигуру, если его вершины лежат на ее границе. Всюду в дальнейшем под *выпуклой фигурой* (телом) понимаем компактное выпуклое множество с непустой внутренностью. Кажутся правдоподобными следующие недоказанные утверждения. Через любую внутреннюю точку трехмерного выпуклого тела проходит его плоское сечение со вписанным правильным шестиугольником, а через центр центрально-симметричного выпуклого тела проходит плоское сечение со вписанным правильным восьмиугольником. Ниже мы докажем эти утверждения для цилиндров специального вида.

Теорема 1. *Пусть C — прямой цилиндр с выпуклой фигурой F диаметра d в качестве основания. Через любую точку цилиндра, удаленную не менее чем на $2d$ от оснований, проходит плоское сечение цилиндра со вписанным правильным шестиугольником.*

Для доказательства теоремы 1 нам понадобятся следующие утверждения.

Лемма 1. *Пусть C — бесконечный прямой цилиндр с выпуклой фигурой F в качестве основания. Через любую точку цилиндра проходит плоское сечение цилиндра со вписанным правильным шестиугольником.*

Доказательство. Фигура F есть сечение C перпендикулярной образующим цилиндра плоскостью. Согласно [1] в F вписан аффинный образ правильного шестиугольника. Обозначим через a и b длины соответственно большой и малой осей эллипса, вписанного в указанный шестиугольник. Проведем через большую ось эллипса плоское сечение C под углом $\arccos(b/a)$ к плоскости F. Спроектируем вдоль образующих цилиндра C вышеописанный аффинно-правильный шестиугольник в построенное сечение. В результате получим вписанный в сечение аффинно-правильный шестиугольник со вписанным кругом, то есть правильный шестиугольник. Сдвигая в направлении образующих цилиндра построенное сечение, мы покроем весь цилиндр C. Лемма доказана.

Под *шириной фигуры в направлении прямой* понимаем расстояние между параллельными данной прямой опорными прямыми к фигуре.

Лемма 2. *Если в выпуклую фигуру вписан правильный шестиугольник, то отношение ширины фигуры в любых двух направлениях не превосходит 2.*

 DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.411

Доказательство. Если в выпуклую фигуру вписан правильный шестиугольник, фигура содержится в правильной шестиугольной звезде, ограниченной продолжениями сторон шестиугольника. Максимальная ширина звезды вдвое больше минимальной ширины шестиугольника. Лемма доказана.

Докажем теорему 1. Продолжив неограниченно образующие цилиндра C, получим бесконечный прямой цилиндр C_1 с основанием F. Проведем через указанную в теореме точку сечение C_1 со вписанным правильным шестиугольником. Докажем от противного, что это сечение не пересекает оснований цилиндра C. Если это не так, ширина сечения в направлении большой оси эллипса больше $2d$. В то же время ширина основания F и рассматриваемого сечения равны в перпендикулярных большой оси эллипса направлениях и не превосходят d, что противоречит лемме 2. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть C — прямой цилиндр с выпуклой центрально-симметричной фигурой F диаметра d в качестве основания. Если высота цилиндра не менее $d\sqrt{2}$, через центр симметрии цилиндра проходит плоское сечение цилиндра со вписанным правильным восьмиугольником.*

Доказательство. В любую центрально-симметричную выпуклую фигуру вписан аффинный образ правильного восьмиугольника с центром в центре фигуры [2, 3]. Поэтому совершенно аналогично леммам 1 и 2 доказываются нижеследующие леммы.

Лемма 3. *Пусть C — бесконечный прямой цилиндр с центрально-симметричной выпуклой фигурой F в качестве основания. Через любую точку цилиндра проходит плоское сечение цилиндра с центром симметрии на оси симметрии цилиндра со вписанным правильным восьмиугольником.*

Лемма 4. *Если в центрально-симметричную выпуклую фигуру вписан правильный восьмиугольник, то отношение ширины фигуры в любых двух направлениях не превосходит $\sqrt{2}$.*

Оставшаяся часть доказательства также аналогична проведенной в теореме 1.

Замечание. Верны аналогичные теоремы о существовании сечений с описанными правильными шестиугольниками и восьмиугольниками, так как в плоском случае известны аналоги использованных выше результатов [1–3] об аффинно-правильных шести- и восьмиугольниках для описанных в [4, с. 23].

Литература

1. *Besicovitch A. S.* Measure of asymmetry of convex curves // J. London. Math. Soc. 1945. Vol. 23. P. 237–240.

2. *Böhme W.* Ein Satzüber ebene konvexe Figuren // Math. Phys. Semesterber. 1958. Vol. 6. P. 153–156.

3. *Grünbaum B.* Affine-Regular polygons Inscribed in Plane Convex Sets // Riveon Lematimatika. 1959. Vol. 13. P. 20–24.

4. *Грюнбаум Б.* Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел. М.: Наука, 1971.

Статья поступила в редакцию 8 мая 2016 г.

Сведения об авторе

Макеев Владимир Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор; mvv57@inbox.ru

PLANAR SECTIONS OF 3-DIMENSIONAL CYLINDERS

Vladimir V. Makeev

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; mvv57@inbox.ru

Is it true, that through every interior point of 3-dimensional convex body comes planar section with inscribed regular hexagon, and through the center of 3-dimensional centrally-symmetric convex body comes planar section with inscribed regular octagon? In paper this is proved for cylinders of special type. Refs 4.

Keywords: cylinder, section, regular hexagon and octagon.

References

1. Besicovitch A. S., “Measure of asymmetry of convex curves”, *J. London. Math. Soc.* **23**, 237–240 (1945).

2. Böhme W., “Ein Satzüber ebene konvexe Figuren”, *Math. Phys. Semesterber.* **6**, 153–156 (1958) [in German].

3. Grünbaum B., “Affine-Regular polygons Inscribed in Plane Convex Sets”, *Riveon Lematimatika* **13**, 20–24 (1959).

4. Gryunbaum B., *Essay of combinatorial geometry and theory of convex solids* (Nauka, Moscow, 1971) [in Russian].

Для цитирования: Макеев В. В. Плоские сечения трехмерных цилиндров // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2016. Т. 3 (61). Вып. 4. С. 624–626. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.411

For citation: Makeev V. V. Planar sections of 3-dimensional cylinders. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2016, vol. 3 (61), issue 4, pp. 624–626. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.411