УДК 519.2 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 3 (61). 2016. Вып. 4

ОБ УСИЛЕННОМ ЗАКОНЕ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

В. В. Петров

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

С помощью общих теорем о применимости усиленного закона больших чисел к последовательности зависимых случайных величин, формулируемых в терминах оценок для моментов сумм этих величин, найдены новые условия применимости этого закона к стационарной в широком смысле последовательности случайных величин. Библиогр. 4 назв.

Ключевые слова: усиленный закон больших чисел, стационарные последовательности.

В [1–3] исследована применимость усиленного закона больших чисел к последовательностям случайных величин без условий независимости или каких-либо специальных условий зависимости (стационарность, марковское свойство и т. д.). При этом условия налагаются только на поведение моментов некоторого порядка сумм рассматриваемых случайных величин. Полученные теоремы могут приводить к новым результатам и для случайных последовательностей с известными типами зависимости.

Целью настоящей заметки является доказательство одной теоремы об усиленном законе больших чисел для стационарной последовательности с помощью следующего результата из [3, теорема 2], относящегося к произвольной последовательности случайных величин с конечными дисперсиями.

Лемма. *Пусть $X_1, X_2, \cdots$ — последовательность случайных величин с конечными дисперсиями, удовлетворяющая условию*

$$\mathrm{Var}(S_n - S_m) \leq C(n-m)^{2r-1} \tag{1}$$

для всех n, m таких, что $n > m$, где $r \geq 1$ и C — постоянная. Тогда выполняется

$$\frac{S_n - ES_n}{n^r} \to 0 \qquad \text{п. н.} \tag{2}$$

Здесь и в дальнейшем $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, п. н. обозначает «почти наверное», все предельные переходы совершаются при $n \to \infty$.

Эта лемма представляет собой следствие более общего результата, полученного в [3] для последовательности случайных величин с конечными абсолютными моментами порядка $p > 1$.

В случае $r = 1$, соответствующем классической нормировке в законах больших чисел, лемма сводится к следующему предложению: если $\{X_n\}$ — последовательность случайных величин с конечными дисперсиями, удовлетворяющая условию

$$\mathrm{Var}(S_n - S_m) \leq C(n-m)$$

для всех n, m таких, что $n > m$, то выполняется

$$\frac{S_n - ES_n}{n} \to 0 \quad \text{п. н.}$$

DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.413

Теорема. *Пусть* $X_1, X_2, \cdots$ — *стационарная в широком смысле последовательность случайных величин,* $EX_n = b$, ρ_{ij} — *коэффициент корреляции между случайными величинами* X_i *и* X_j.

Если выполнено условие

$$\sum_{m<i<j\le n} \rho_{ij} \le C(n-m)^{2r-1} \tag{3}$$

при некотором $r \ge 1$ *и при всех* n, m *таких, что* $n > m$, *где* C — *постоянная, то справедливо*

$$\frac{S_n - nb}{n^r} \to 0 \quad \text{п. н.} \tag{4}$$

Доказательство теоремы сводится к проверке выполнения (1) и применению леммы. Имеем

$$\mathrm{Var}\,(S_n - S_m) = \sum_{i=m+1}^{n} \mathrm{Var} X_i + 2 \sum_{m<i<j\le n} \mathrm{cov}(X_i, X_j) = (n-m)\sigma^2 + 2\sigma^2 T_{n,m},$$

где

$$\sigma^2 = \mathrm{Var} X_n, \quad T_{n,m} = \sum_{m<i<j\le n} \rho_{ij}.$$

Поскольку $r \ge 1$ в условии (3), имеет место неравенство (1), и применение леммы завершает доказательство.

Условие (3) выполнено при любом $r \ge 3/2$, так что усиленный закон больших чисел в форме (4) при $r = 3/2$ применим к любой стационарной последовательности.

Если коэффициенты корреляции между любыми случайными величинами с различными индексами неположительны, то сумма в левой части (3) неположительна, условие (3) выполнено при любом $r \ge 1/2$, и соотношение (4) имеет место при $r = 1$.

Условие

$$\rho_{ij} \to 0 \quad \text{при} \quad |i-j| \to \infty$$

влечет за собой применимость слабого закона больших чисел для стационарной последовательности в форме $S_n/n \to EX_1$ по вероятности (см., например, [4], теорема 5.3), что является известным результатом, восходящим к С. Н. Бернштейну.

Литература

1. *Петров В. В.* Об усиленном законе больших чисел для последовательности неотрицательных случайных величин // Теория вероятностей и ее применения. 2008. Т. 53. Вып. 2. С. 379–382.

2. *Петров В. В.* К усиленному закону больших чисел для последовательности неотрицательных случайных величин // Зап. науч. семин. ПОМИ. Т. 384. 2010. С. 182–184.

3. *Петров В. В.* Об усиленном законе больших чисел для последовательности зависимых случайных величин // Зап. науч. семин. ПОМИ. Т. 408. 2012. С. 285–288.

4. *Petrov V., Mordecki E.* Teoria de probabilidades. Moscu: Editorial URSS, 2003. 281 p.

Статья поступила в редакцию 21 марта 2016 г.

Сведения об авторе

Петров Валентин Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор; petrov2v@mail.ru

ON THE STRONG LAW OF LARGE NUMBERS FOR A STATIONARY SEQUENCE

Valentin V. Petrov

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; petrov2v@mail.ru

New conditions of applicability of the strong law of large numbers to a stationary sequence are found by means of recent general results formulated in terms of moments of sums of random variables. Refs 4.

Keywords: strong law of large numbers, stationary sequences.

References

1. Petrov V. V., "On the strong law of large numbers for nonnegative random variables", *Theory Probab. Appl.* **53**(2), 346–349 (2008).

2. Petrov V. V., "On the strong law of large numbers for a sequence of nonnegative random variables", *J. Math. Sci* **176**(2), 207–208 (2011).

3. Petrov V. V., "On the strong law of large numbers for a sequence of dependent random variables", *J. Math. Sci* **199**(2), 225–227 (2014).

4. Petrov V., Mordecki E., *Teoria de probabilidades* (Moscu, Editorial URSS, 2003, 281 p.) [in Spanish].

Для цитирования: Петров В. В. Об усиленном законе больших чисел для стационарной последовательности // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2016. Т. 3 (61). Вып. 4. С. 641–643. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.413

For citation: Petrov V. V. On the strong law of large numbers for a stationary sequence. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2016, vol. 3 (61), issue 4, pp. 641–643. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.413