УДК 517.537 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 3 (61). 2016. Вып. 4

ПРИБЛИЖЕНИЕ ЦЕЛЫМИ ФУНКЦИЯМИ НА СЧЕТНОМ ОБЪЕДИНЕНИИ ОТРЕЗКОВ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ. 1. ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

О. В. Сильванович[1], *Н. А. Широков*[2]

[1] Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики,
Российская Федерация, 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49
[2] Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Вопрос о приближении функций, непрерывных на подмножествах вещественной оси целыми функциями имеет долгую историю, начиная с теоремы Джексона—Бернштейна о приближении 2π-периодических функций тригонометрическими полиномами, которые естественно трактовать как целые функции экспоненциального типа. В настоящей статье мы занимаемся задачей, относящейся к концепции этой теоремы, описывающей классы функциональных пространств скоростью их возможного приближения целыми функциями. В качестве ключевых примеров укажем теорему С. Н. Бернштейна об описании класса ограниченных функций из классов Гёльдера на всей оси функциями экспоненциального типа. Принципиальным моментом является то, что скорость приближения в окрестности концов отрезков оказывается выше в той шкале, которая впервые появилась в теории приближения полиномами функций из классов Гёльдера на отрезке и позволила согласовать так называемые «прямые» и «обратные» теоремы для этого случая, т. е. восстанавливать гёльдеровскую гладкость по скорости приближения полиномами в этой шкале. В данной статье мы представим формулировку «прямой» теоремы о возможности приближения функций из классов Гёльдера на счетном объединении отрезков целыми функциями с определенной скоростью. Ранее такие приближения не рассматривались. Также мы дадим общие определения и приведем важнейшие леммы, используемые для дальнейшего построения приближающих функций. Во второй части работы мы представим доказательство «прямой» теоремы. В последующих работах, для получения конструктивного описания класса гладкости с помощью скорости приближения, мы сформулируем и докажем «обратную» теорему для этого случая. При выводе таких утверждений требуется, как правило, факт, аналогичный теореме С. Н. Бернштейна об оценке нормы производной целой функции через норму самой функции. В нашем случае будет необходимо утверждение, аналогичное теореме Н. И. Ахиезера и Б. Я. Левина об оценке целой функции на всей оси через ее значение на подмножестве оси. Библиогр. 4 назв.

Ключевые слова: классы Гёльдера, целые функции экспоненциального типа, аппроксимация на подмножестве вещественной оси.

1. Дадим определения и формулировки. Для $\rho > 1$ через $E_\rho([-1,1])$ обозначим образ окружности $\xi : |\xi| = \rho$ при отображении функцией Жуковского:

$$E_\rho = \left\{ z : z = \frac{1}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right), |\xi| = \rho \right\}, \tag{1}$$

для $a < b$ положим

$$E_\rho([a,b]) = \frac{a+b}{2} + \left(\frac{b-a}{2}\right) E_\rho, \tag{2}$$

при $z \in \mathbb{C}$ обозначим

$$d_\rho(z; [a,b]) = \operatorname{dist}\left(z, E_\rho([a,b])\right). \tag{3}$$

 DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.414

Определим теперь промежутки I_n, составляющие множество $E: I_n = [a_n, b_n], n \in \mathbb{Z}$, $b_n < a_{n+1}$, $E = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} I_n$. Далее, пусть $J_n = [b_n, a_{n+1}]$. Предположим, что существуют числа $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1$ такие, что выполняются неравенства

$$0 < \alpha_0 \leqslant \frac{|I_n|}{|I_m|} \leqslant \beta_0, \quad n, m \in \mathbb{Z}, \tag{4}$$

$$0 < \alpha_1 \leqslant \frac{|J_n|}{|J_m|} \leqslant \beta_1, \quad n, m \in \mathbb{Z}, \tag{5}$$

и пусть

$$\frac{|J_0|}{|I_0|} = \gamma.$$

Для $z \in \mathbb{C}, \rho > 1$ обозначим

$$d_\rho(z, E) = \min_{n\in\mathbb{Z}} d_\rho(z, [a_n, b_n]). \tag{6}$$

Пусть ω — модуль непрерывности. Тогда через $\Lambda^{r+\omega}([a,b])$ обозначим множество комплекснозначных функций f, заданных на $[a,b]$, таких, что для $x_1, x_2 \in [a,b]$ выполнена оценка

$$|f^{(r)}(x_2) - f^{(r)}(x_1)| \leqslant c_f \omega(|x_2 - x_1|) \tag{7}$$

с нормой

$$\|f\|_{\Lambda^{r+\omega}([a,b])} = \left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| + \ldots + \left|f^{(r)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| + \sup_{x_1,x_2\in[a,b],\ x_1\neq x_2} \frac{|f^{(r)}(x_2) - f^{(r)}(x_1)|}{\omega(|x_2 - x_1|)}. \tag{8}$$

Пусть $\Lambda_M^{r+\omega}(E)$ — множество комплекснозначных функций f, заданных на E, таких, что $|f(x)| \leqslant M$ при $x \in E$, $f \in \Lambda^{r+\omega}([a_n, b_n])$ для $n \in \mathbb{Z}$ и

$$\|f\|_{\Lambda^{r+\omega}(E)} = \sup_n \|f\|_{\Lambda^{r+\omega}([a_n,b_n])} < \infty. \tag{9}$$

Обозначим через T_σ множество целых функций F экспоненциального типа $\leqslant \sigma$, ограниченных на вещественной оси, т. е. для $F \in T_\sigma$ существует постоянная $C_F \geqslant 0$, такая что при $z = x + iy$ справедливо неравенство $|F(z)| \leqslant C_F \exp \sigma|y|$.

Сформулируем основной результат данной работы. Пусть $0 < \alpha < 1$, $\omega_\alpha(t) = t^\alpha$ и

$$H_M^\alpha(E) = \Lambda_M^{\omega_\alpha(t)}(E). \tag{10}$$

Теорема. *Пусть $f \in H_M^\alpha(E)$, где множество E удовлетворяет условиям* (3) *и* (4), *$d_\rho(z, E)$ определено в* (6). *Тогда для $\sigma \geqslant 1$ найдется функция $F_\sigma \in T_\sigma$ такая, что при $x \in E$ справедлива оценка*

$$|f(x) - F_\sigma(x)| \leqslant c \cdot d^\alpha_{1+1/\sigma}(x, E), \tag{11}$$

где постоянная c зависит лишь от $\|f\|_{H_M^\alpha(E)}$ и чисел $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \gamma$.

Нам понадобятся вспомогательные геометрические построения.

Пусть $l = |I_0| = b_0 - a_0$, положим $a'_n = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n$, $b'_n = \frac{1}{4}a_n + \frac{3}{4}b_n$, $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{gathered} I'_n = \left\{ x : a'_n - \frac{1}{8}|I_n| \leqslant x \leqslant a'_n + \frac{1}{8}|I_n| \right\}, \\ I''_n = \left\{ x : b'_n - \frac{1}{8}|I_n| \leqslant x \leqslant b'_n + \frac{1}{8}|I_n| \right\}, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{gathered} \tag{12}$$

Для $x''_n \in I''_n$, $x'_n \in I'_n$ обозначим через $s(x''_{n-1}, x'_n)$ объединение отрезков $\tau(x''_{n-1})$, $\tau(x'_n)$ и $t(x''_{n-1}, x'_n)$, где

$$\tau(x) = [x, x - il], \quad t(x_1, x_2) = [x_1 - il, x_2 - il].$$

Выберем теперь произвольно точки $x'_n \in I'_n$, $x''_n \in I''_n$, $n \in \mathbb{Z}$ и положим $X' = \{x'_n\}$, $X'' = \{x''_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$,

$$\Gamma(X', X'') = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} s(x''_{n-1}, x'_n) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [x'_n, x''_n]. \tag{13}$$

Обозначим далее через D_+ область, для которой $\partial D_+ = \Gamma(X', X'')$ и $i \in D_+$, и пусть $D_- = \mathbb{C} \setminus \bar{D}_+$.

Теперь выберем и зафиксируем $\rho_0 = \rho_0(\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, \gamma)$ так, чтобы внутренние области эллипсов $E_{\rho_0}([a_n, b_n])$ не пересекались и выполнялось неравенство

$$\operatorname{dist}\left(E_{\rho_0}([a_n, b_n]), E_{\rho_0}([a_{n+1}, b_{n+1}])\right) \geqslant \frac{1}{2}(a_{n+1} - b_n) = \frac{1}{2}|J_n|, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

2. Нам понадобится специальное продолжение заданной на множестве E функции f на внутренние области всех эллипсов $E_{\rho_0}([a_n, b_n])$, которые будем обозначать через $\operatorname{int}E_{\rho_0}([a_n, b_n])$. Прежде всего продолжим функцию f на внутренние области всех эллипсов $E_{\rho_0/2}(I_n) = E_{\rho_0/2}([a_n, b_n])$ по методу Е. М. Дынькина [1, 2] так, чтобы выполнялись следующие условия:

$$f_0 \in C\left(\operatorname{int}E_{\rho_0/2}(I_n)\right), \quad f_0|_{I_n} = f, \tag{14}$$

$$f_0 \in C^1\left(\operatorname{int}E_{\rho_0/2}(I_n) \setminus I_n\right), \tag{15}$$

$$|f'_{0\bar{z}}| \leqslant c \operatorname{dist}^{r-1}(z, I_n)\omega(\operatorname{dist}(z, I_n)), \tag{16}$$

$$f_0(z) = 0, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \operatorname{int}E_{\rho_0/2}(I_n). \tag{17}$$

При применении метода Е. М. Дынькина [1, 2] постоянная c в соотношении (16) зависит от f, I_n, ρ_0. Предположения (4) и (5) влекут зависимость c лишь от f, α_i, β_i, γ.

Далее, продолжение f_0 таково, что справедливо неравенство

$$\int\limits_{\operatorname{int}E_{\rho_0/2}(I_n)} |f'_{0\bar{z}}|\, dm_2 \leqslant c_1|I_n| \leqslant c_1\alpha_1|I_0|, \tag{18}$$

где c_1 также зависит лишь от $f, \alpha_i, \beta_i, \gamma$.

Определим теперь функцию $\varphi_n(z)$, $z \in \mathbb{C}$ следующим образом:

$$\varphi \in C^1(\mathbb{C}), \quad \mathrm{supp}\varphi_n \subset \mathrm{int}E_{\rho_0}(I_n) \setminus \mathrm{int}E_{\rho_0/2}(I_n), \quad 0 \leqslant \varphi_n(z) \leqslant 1.$$

Тогда с некоторыми постоянными $c_2 > 0$, $c_3 > 0$, зависящими лишь от α_i, β_i, γ, выполняется

$$c_2 \leqslant \left| \int\limits_{\mathrm{int}E_{\rho_0}(I_n)} \varphi'_{n\bar{z}} dm_2 \right| \leqslant \int\limits_{\mathrm{int}E_{\rho_0}(I_n)} |\varphi'_{n\bar{z}}|\, dm_2 \leqslant c_3. \tag{19}$$

Определим $\varkappa_n$ соотношениями

$$\int\limits_{\partial E_{\rho_0}(I_n)} f'_{0\bar{z}} dm_2 + \varkappa_n \int\limits_{\partial E_{\rho_0}(I_n)} \varphi'_{n\bar{z}} dm_2 = 0. \tag{20}$$

Если сопоставить (18) и (19), получится $|\varkappa_n| \leq c_1\alpha_1|I_n|/c_2 = c_4$. Теперь положим

$$f_1(z) = \begin{cases} f_0(z), & z \in E_{\rho_0/2}(I_n), \\ \varkappa_n \varphi_n(z), & z \in E_{\rho_0}(I_n) \setminus E_{\rho_0/2}(I_n), \\ 0, & z \in \mathbb{C} \setminus \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} E_{\rho_0}(I_n). \end{cases} \tag{21}$$

Из (2) и (21) следует

$$\int\limits_{E_{\rho_0}(I_n)} f'_{1\bar{z}} dm_2 = 0, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{22}$$

Получим теперь интегральное представление, а именно формулу Грина для $f(x)$, $x \in I_{n_0}$. Обозначим через $Q(m, A)$ прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат:

$$[\beta_{-m} - iA, \beta_{-m} + iA], [\beta_{-m} + iA, \beta_m + iA], [\beta_m - iA, \beta_m + iA], [\beta_{-m} - iA, \beta_m - iA],$$

где $A > \sup|\mathrm{Im} z|$ при $z \in E_\rho(I_n)$, $n \in \mathbb{Z}$, β_{-m} — середина промежутка $\mathbb{R}$ между $E_{\rho_0}(I_{n_0-m})$ и $E_{\rho_0}(I_{n_0-m-1})$, β_m — середина промежутка $\mathbb{R}$ между $E_{\rho_0}(I_{n_0+m})$ и $E_{\rho_0}(I_{n_0+m+1})$.

По построению $f_1(z) = 0$ при $z \in \partial Q(m, A)$, поэтому справедливо соотношение

$$f(x) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{Q(m,A)} \frac{f'_{1\bar{z}}(z)}{z - x} dm_2(z) = -\sum_{\nu=-m}^{m} \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathrm{int}E_{\rho_0}(I_{n_0+\nu})} \frac{f'_{1\bar{z}}(z)}{z - x} dm_2(z). \tag{23}$$

В силу (22) при $\nu \neq 0$ имеем

$$\int\limits_{\mathrm{int}E_{\rho_0}(I_{n_0+\nu})} \frac{f'_{1\bar{z}}(z)}{x_{n_0+\nu} - x} dm_2(z) = 0, \tag{24}$$

если $x_n = (a_n + b_n)/2$. Поэтому, с учетом (5), (18) и (24), получим

$$\left|-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathrm{int}E_{\rho_0}(I_{n_0+\nu})}\frac{f'_{1\bar z}(z)}{z-x}dm_2(z)\right|=\left|-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathrm{int}E_{\rho_0}(I_{n_0+\nu})}f'_{1\bar z}(z)\left(\frac{1}{z-x}-\frac{1}{x_{n_0+\nu}-x}\right)dm_2(z)\right|=$$

$$=\left|-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathrm{int}E_{\rho_0}(I_{n_0+\nu})}f'_{1\bar z}(z)\cdot\frac{x_{n_0+\nu}-z}{(z-x)(x_{n_0+\nu}-x)}dm_2(z)\right|\leqslant c_5\cdot\frac{1}{\nu^2}. \quad (25)$$

Тогда из (23) и (25) находим

$$f(x)=-\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathrm{int}E\rho_0(I_n)}\frac{f'_{1\bar z}(z)}{z-x}dm_2(z). \quad (26)$$

3. Определим конформные отображения, которые будем использовать при построении приближения.

Пусть функция $\psi_+(\xi)$ отображает верхнюю полуплоскость $\mathbb{C}_+=\{\xi:\mathrm{Im}\xi>0\}$ на область D_+ так, что выполняются условия

$$\psi_+(\infty)=\infty, \quad \frac{\psi_+(i\xi)}{i\xi}\xrightarrow[\xi\to+\infty]{}1,$$

а функция ψ_- отображает нижнюю полуплоскость $\mathbb{C}_-=\{\xi:\mathrm{Im}\xi<0\}$ на область D_- так, что выполняются условия

$$\psi_-(\infty)=\infty, \quad \frac{\psi_-(i\xi)}{i\xi}\xrightarrow[\xi\to-\infty]{}1,$$

и пусть $\varphi_+(z)$ — обратное к ψ_+ отображение, $\varphi_-(z)$ — обратное к ψ_-.

Наконец, определим для $s\in\mathbb{R}$ и $\xi>0$ отображения

$$z^+_{\xi,s}=z^+_{\xi,s}(z)=\psi_+\left(\varphi_+(z)+s+i\xi\right), \quad z\in D_+, \quad (27)$$

$$z^-_{\xi,s}=z^-_{\xi,s}(z)=\psi_-\left(\varphi_-(z)+s-i\xi\right), \quad z\in D_-. \quad (28)$$

Приведем важное свойство функций $z^\pm_{\xi,s}$, которое аналогично леммам 4 и 6 из [3] и доказывается переписыванием леммы 4 из [3] для полуплоскости вместо внешней области единичного круга.

Лемма 1. *Существует абсолютная постоянная c_0 такая, что при $x_+\in\partial D_+$, $z_+\in D_+$ или при $x_-\in\partial D_-, z_-\in D_-$ справедливы оценки*

$$\left|z^+_{\xi,s}(z_+)-x_+\right|\le c_0\left(\frac{|s|}{\xi}+1\right)^4|z^+_{\xi,0}(z_+)-x_+|, \quad (29)$$

$$\left|z^-_{\xi,s}(z_-)-x_-\right|\le c_0\left(\frac{|s|}{\xi}+1\right)^4|z^-_{\xi,0}(z_-)-x_-|. \quad (30)$$

Далее, через $A_0,\ A_1,\ldots$ будем обозначать постоянные, которые зависят лишь от $\alpha_0,\beta_0,\alpha_1,\beta_1,\gamma$. Из леммы 1 можно получить, что для любых $\xi_1,\xi_2\in\mathbb{R}$ таких, что $|\xi_2-\xi_1|=I_0$, выполнены соотношения

$$A_0\,|I_0|\le|\psi_+(\xi_2)-\psi_+(\xi_1)|\le A_1|I_0|, \quad (31)$$

$$A_2\,|I_0|\le|\psi_-(\xi_2)-\psi_-(\xi_1)|\le A_3|I_0|. \quad (32)$$

Поскольку внутренние по отношению к областям D_+ и D_- углы равны $\pi/2$, $3/2\pi$, или 2π, то, подобно тому, как в работе [4] для отображения внешней области единичного круга, для отображений ψ_+ и ψ_- справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. *Существуют такие постоянные A_4 и A_5, что для $z'_+, z''_+ \in D_+$, $\xi > 0$ имеем*

$$\left|z^+_{\xi,0}(z''_+) - z''_+\right| \le A_4 \left|z^+_{\xi,0}(z'_+) - z'_+\right|^{1/2} \left(|z''_+ - z'_+| + |z^+_{\xi,0}(z'_+) - z'_+|\right)^{1/2} \qquad (33)$$

и для $z'_-, z''_- \in D_-$, $\xi > 0$ имеем

$$\left|z^-_{\xi,0}(z''_-) - z''_-\right| \le A_5 \left|z^-_{\xi,0}(z'_-) - z'_-\right|^{1/2} \left(|z''_- - z'_-| + |z^-_{\xi,0}(z'_-) - z'_-|\right)^{1/2}. \qquad (34)$$

Подобным образом соотношения (31) и (32) вместе с тем обстоятельством, что $\tau(x'_n)$, $\tau(x''_n)$ перпендикулярны I_n, при $|z - x'_n| < \frac{1}{16}|I_n|$ или при $|z - x''_n| < \frac{1}{16}|I_n|$ влекут справедливость следующей леммы.

Лемма 3. *Если $z \in D_+, \mathrm{Im} z < 0$ или $z \in D_-$, то при $0 < \xi < A_6|I_0|$ имеем*

$$\left|z^+_{\xi,0}(z) - z\right| \le A_7 \frac{\xi}{|z - x'_n| + \sqrt{\xi}}, \qquad (35)$$

соответственно

$$\left|z^-_{\xi,0}(z) - z\right| \le A_8 \frac{\xi}{|z - x'_n| + \sqrt{\xi}}, \qquad (36)$$

и аналогичные неравенства с A_9, A_{10} справедливы в окрестности x''_n при тех же ограничениях на ξ и z:

$$\left|z^+_{\xi,0}(z) - z\right| \le A_9 \frac{\xi}{|z - x''_n| + \sqrt{\xi}}, \qquad (37)$$

соответственно

$$\left|z^-_{\xi,0}(z) - z\right| \le A_{10} \frac{\xi}{|z - x''_n| + \sqrt{\xi}}. \qquad (38)$$

Важно отметить, что все постоянные в оценках (33)–(38) не зависят от выбора последовательностей $\{x'_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $x'_n \in I'_n$ и $\{x''_n\}_{n\in\mathbb{Z}}, x_n \in \mathbb{Z}$.

Для $z \in \mathbb{R}$ при $|z - x'_n| \ge |I_n|/16$ и при $|z - x''_n| \ge 1/16$ для любого $n \in \mathbb{Z}$, при $0 < \xi < A_6|I_n|$, если при этом также $z \in (x'_{n_0}, x''_{n_0})$ при некотором $n_0 \in \mathbb{Z}$, то справедливо соотношение

$$\left|z^\pm_{\xi,0}(z) - z\right| \le A_{11}\xi. \qquad (39)$$

А если в неравенстве (38) при некотором n_1 выполнено $z \in (x''_{n_1}, x'_{n_1})$, то $z \in \bar{D}_+$ и при $0 < \xi < A_6|I_0|$ имеем оценку

$$\left|z^+_{\xi,0}(z) - z\right| \le A_{12}\xi \left(\xi^2 + \min\left(|z - b_{n_1}|, |z - a_{n_1+1}|\right)^2\right)^{1/2}. \qquad (40)$$

Литература

1. *Dyn'kin E. M.* Pseudoanalytic extension of smooth functions. The uniform scale // Amer. Math. Soc. Transl. 1980. Vol. 115, N 2. P. 33–58.

2. *Dyn'kin E. M.* The pseudoanalytic extensions // J. Anal. Math. 1993. Vol. 60. P. 45–70.

3. *Белый В. И.* Конформные отображения и приближение функций в областях с квазиконформной границей // Мат. сборник. 1977. Т. 102(144), № 3. С. 331–361.

4. *Лебедев Н. А., Широков Н. А.* О равномерном приближении функций на замкнутых множествах, имеющих конечное число угловых точек с ненулевыми внешними углами // Известия АН АрмССР. 1971. Т. 6, № 4. С. 311–341.

Статья поступила в редакцию 3 апреля 2016 г.

Сведения об авторах

Сильванович Ольга Васильевна — кандидат физико-математических наук; olamamik@gmail.com

Широков Николай Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор; nikolai.shirokov@gmail.com

APPROXIMATION BY ENTIRE FUNCTIONS ON A COUNTABLE UNION OF SEGMENTS ON THE REAL AXIS

Olga V. Silvanovich[1], *Nikolai A. Shirokov*[2]

[1] St. Petersburg National Research University of Information Tehnologies, Mechanics and Optics (ITMO University), Kronverkskii pr., 49, St. Petersburg, 197101, Russian Federation; olamamik@gmail.com

[2] St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; nikolai.shirokov@gmail.com

We state in the present paper a theorem about approximation of a function defined on a countable union of segments of the real line by means of entire functions of exponential type. The approximating function is supposed to belong to a Holder class α, $0 < \alpha < 1$, and the rate of approximation turns out to be better in a vicinity of ends of segments similary to the case of case of polynomial approximation of a function on one segment.

Now, we consider a set $E \subset \mathbb{R}$ consisting of disjonct segments $[a_n, b_n]$, $-\infty < n < +\infty$ such that $b_n - a_n \asymp b_k - a_k$ for any n and k and $a_{n+1} - b_n \asymp b_n - a_n$ for any n. The function f defined on E supposed to be bounded by a constant M on all of segments $[a_n, b_n]$ and satisfying the condition $|f(x) - f(y)| \le c_0|x - y|^\alpha$, $x, y \in [a_n, b_n]$, $0 < \alpha < 1$. For $\sigma \ge 1, \xi = \frac{1}{\sigma}, x \in [a_n, b_n]$ we define a scale of approximation $d_{1+\xi}(x, [a_n, b_n])$ such that $d_{1+\xi}(x, [a_n, b_n]) \asymp \xi(\xi^2 + \min(x - a_n)^2, (b_n - x)^2)^{\frac{1}{2}}$. Then the main theorem states that there exists a constant c_1 depending only on f and E such that we can find a function F_σ of exponential type $\le \sigma$ which approximate a function f in a following way:

$$|F_\sigma(x) - f(x)| \le c_1 d^\alpha_{1+\xi}(x, [a_n, b_n]),\ x \in [a_n, b_n].$$

Refs 4.

Keywords: Holder classe σ, entire function of exponential type, approximation on subsets of real line.

References

1. Dyn'kin E. M., "Pseudoanalytic extension of smooth functions. The uniform scale", *Amer. Math. Soc. Transl.* **115**(2), 33–58 (1980).

2. Dyn'kin E. M., "The pseudoanalytic extensions", *J. Anal. Math.* **60**, 45–70 (1993).

3. Belyi V. I., "Conformal mappings and approximation of functions in regions with quasiconform boundary", *Mathematics of the USSR-Sbornik* **31**(3), 289–317 (1977).

4. Lebedev N. A., Shirokov N. A., "Uniform approximation of functions on closed sets with finite number of corner points with non-zero exteriour angeles", *Izvestia AN ArmSSR* **6**(4), 311–341 (1971) [in Russian].

Для цитирования: Сильванович О. В., Широков Н. А. Приближение целыми функциями на счетном объединении отрезков вещественной оси. 1. Формулировка результатов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2016. Т. 3 (61). Вып. 4. С. 644–650. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.414

For citation: Silvanovich O. V., Shirokov N. A. Approximation by entire functions on a countable union of segments on the real axis. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2016, vol. 3 (61), issue 4, pp. 644–650. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.414