УДК 519.2 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 3 (61). 2016. Вып. 4

О НЕРАВЕНСТВАХ ДЛЯ УСЛОВНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ОБЪЕДИНЕНИЙ СОБЫТИЙ И УСЛОВНОЙ ЛЕММЕ БОРЕЛЯ—КАНТЕЛЛИ

А. Н. Фролов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Получены новые точные неравенства для условных вероятностей объединений событий и обобщения условной леммы Бореля— Кантелли. Использование усреднения позволяет получить новые оценки для вероятностей объединений событий и варианты леммы Бореля—Кантелли. Библиогр. 11 назв.

Ключевые слова: неравенства Бонферрони, вероятности объединений событий, условная лемма Бореля—Кантелли, лемма Бореля—Кантелли.

1. Введение. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство и $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность событий. Положим $U_n = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ для всех $n \geqslant 2$.

Неравенства для $\mathbf{P}(U_n)$ широко применяются в теории вероятностей и ее различных приложениях. Отысканию таких неравенств посвящено значительное число работ, в которых использованы разнообразные методы их получения. Один из таких методов был предложен автором в статьях [1–4], в которых можно также найти подробную библиографию по этому вопросу.

В настоящей работе мы сначала получим новые неравенства для условной вероятности $\mathbf{P}(U_n|\mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ — σ-алгебра событий такая, что $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$. В силу того что $\mathbf{P}(\cdot|\mathcal{A})(\omega)$ при фиксированном ω, вообще говоря, не может рассматриваться как обычная вероятность, эти неравенства не являются прямыми следствиями известных оценок безусловных вероятностей объединений. Тем не менее соответствующие методы могут быть адаптированы для условных вероятностей. Мы приспособим наш метод из [3, 4]. Отметим, что оценки для $\mathbf{P}(U_n|\mathcal{A})$ полезны сами по себе. Так как $\mathbf{P}(U_n) = \mathbf{E}\mathbf{P}(U_n|\mathcal{A})$, мы придем к новым оценкам для $\mathbf{P}(U_n)$. При этом условия на события, при которых неравенства обращаются в равенства, будут формулироваться в терминах условных вероятностей. В частности, это означает, что получаемые обобщения условной леммы Бореля—Кантелли будут оптимальными при условиях, отличающихся от условий обычной леммы Бореля—Кантелли. Под условной леммой Бореля—Кантелли мы понимаем результаты, содержащие оценки сверху и снизу для

$$\mathbf{P}(\limsup A_n|\mathcal{A}),$$

выполняющиеся для почти всех (п. в.) $\omega \in A$, где A — некоторое событие. Подобные оценки можно использовать следующим образом. Пусть, например, выполняется неравенство $\mathbf{P}(\limsup A_n|\mathcal{A}) \geqslant \alpha$ для п. в. $\omega \in A$. Тогда справедливо

$$\mathbf{P}(\limsup A_n) = \mathbf{E}\mathbf{P}(\limsup A_n|\mathcal{A}) \geqslant \int_A \alpha d\mathbf{P}.$$

Если дополнительно $\alpha \geqslant c$ для п. в. $\omega \in A$, где c — положительная постоянная, то будем иметь

$$\mathbf{P}(\limsup A_n) \geqslant c\mathbf{P}(A) > 0.$$

Аналогично можно получить оценки сверху для $\mathbf{P}(\limsup A_n)$. При этом условия в таких результатах будут накладываться на условные вероятности исходных событий. Это приводит к обобщениям леммы Бореля—Кантелли, известные варианты которой будут следствиями в случае тривиальной σ-алгебры $\mathcal{A}$.

Различные варианты условной леммы Бореля—Кантелли получены в работах Пракаса Рао [5, 6], Лиу и Пракаса Рао [7], Кима [8] и в работах из их библиографий. Отметим, что в статье Пракаса Рао [5] излагается общий подход к понятиям условной независимости, условного перемешивания и условной ассоциированности событий и случайных величин. Там же обсуждаются соответствующие предельные теоремы и, в частности, усиленный закон больших чисел и центральная предельная теорема. Обобщения леммы Бореля—Кантелли—Леви, также называемые условной леммой Бореля—Кантелли, можно найти, например, в книге Чандры [9].

Опираясь на наши оценки условных вероятностей объединений событий, мы получим новые обобщения условной леммы Бореля—Кантелли.

2. Неравенства для условных вероятностей объединений событий. В этом параграфе мы рассмотрим конечное число событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, $n \geqslant 2$. Оценки вероятностей $\mathbf{P}(U_n)$ в терминах моментов случайной величины

$$\xi_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{A_i},$$

где $\mathbb{I}_B$ — индикатор события B, занимают важное место в теории вероятностей и ее приложениях (см., например, книги Феллера [10] и Галамбоша и Симонелли [11]). В работах автора [1–3] подобные оценки были основаны на моментах ξ_n произвольного нецелого порядка, использование которых позволяет доказать более точные неравенства. Кроме того, метод из упомянутых работ позволяет также оценивать $\mathbf{P}(U_n)$, используя нестепенные моменты ξ_n. Опираясь на данный метод, в этом параграфе мы построим оценки условной вероятности $\mathbf{P}(U_n|\mathcal{A})$ снизу и сверху в терминах сумм условных моментов случайных величин

$$\xi_{nj} = \xi_n \mathbb{I}_{A_{j_1} A_{j_2} \ldots A_{j_m}},$$

где $j = (j_1, \ldots, j_m)$, $1 \leqslant j_k \leqslant n$ для всех $1 \leqslant k \leqslant m$, а m — фиксированное целое неотрицательное число, $m \leqslant n$. Нам удобно также считать, что $\xi_{nj} = \xi_n$ при $m = 0$.

Положим $J_0 = \{0\}$, $J_m = \{j = (j_1, \ldots, j_m) : \ j_k \in \mathbb{N}$ и $1 \leqslant j_k \leqslant n$ при всех $1 \leqslant k \leqslant m\}$ для всех $m \geqslant 1$. Здесь $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. Отметим, что различные компоненты вектора j могут быть одинаковыми.

Нам потребуется следующий результат.

Лемма 1. *Пусть B_i — событие, состоящее в том, что происходит ровно i событий из $A_1, A_2, \ldots, A_n$, где $0 \leqslant i \leqslant n$. Пусть m — фиксированное целое число такое, что $0 \leqslant m \leqslant n$. Положим $p_{i,j}^{\mathcal{A}} = \mathbf{P}(B_i A_{j_1} \ldots A_{j_m}|\mathcal{A})$ для всех $j \in J_m$ при $m \geqslant 1$ и $p_{i,j}^{\mathcal{A}} = \mathbf{P}(B_i|\mathcal{A})$ для $j \in J_0$ при $m = 0$.*

Тогда

$$\mathbf{P}(U_n|\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \in J_m} \frac{1}{i^m} p_{i,j}^{\mathcal{A}} \quad \text{п. н.} \tag{1}$$

В соотношении (1) и всюду далее п. н. обозначает «почти наверное».

Доказательство. Ясно, что

$$\mathbb{I}_{U_n} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{B_i}.$$

При $m = 0$ соотношение (1) превращается в очевидное равенство

$$\mathbf{P}(U_n|\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(B_i|\mathcal{A}) \quad \text{п. н.}$$

Пусть $m > 0$. Так как $\xi_n \mathbb{I}_{B_i} = i\, \mathbb{I}_{B_i}$ при всех $0 \leqslant i \leqslant n$, мы имеем

$$\mathbb{I}_{U_n} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{B_i} = \sum_{i=1}^{n} i^{-m}\, \mathbb{I}_{B_i} \xi_n^m = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j_1=1}^{n} \dots \sum_{j_m=1}^{n} i^{-m}\, \mathbb{I}_{B_i} \mathbb{I}_{A_{j_1}} \dots \mathbb{I}_{A_{j_m}} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j_1=1}^{n} \dots \sum_{j_m=1}^{n} i^{-m}\, \mathbb{I}_{B_i A_{j_1} \dots A_{j_m}}.$$

Переходя к условному математическому ожиданию, мы получим

$$\mathbf{P}(U_n|\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j_1=1}^{n} \dots \sum_{j_m=1}^{n} i^{-m}\, \mathbf{E}\left(\mathbb{I}_{B_i A_{j_1} \dots A_{j_m}} \middle| \mathcal{A} \right) \quad \text{п. н.}$$

Соотношение (1) доказано. □

Взяв математическое ожидание от обеих частей равенства (1), мы придем к лемме 1 из [4]. Это также соответствует случаю тривиальной σ-алгебры $\mathcal{A}$.

Теперь мы выберем условные моменты, которые будут участвовать в наших оценках. Положительные вещественные числа a и ϱ будут задавать порядок условных моментов, а натуральное число ℓ, $2 \leqslant \ell \leqslant n$, будет определять их количество.

Для всех $m \geqslant 0$, всех $j \in J_m$ и всех $k \in \mathbb{N}$ положим

$$\bar{s}_k^{\mathcal{A}}(j) = \sum_{i=1}^{n} i^{a+(k-1)\varrho-m} p_{i,j}^{\mathcal{A}}, \tag{2}$$

$$s_k^{\mathcal{A}}(j) = \sum_{i=1}^{n} i^{k-m} p_{i,j}^{\mathcal{A}}. \tag{3}$$

Так как $\xi_{nj} \mathbb{I}_{B_i} = i \mathbb{I}_{B_i A_{j_1} \dots A_{j_m}}$, мы имеем

$$\bar{s}_k^{\mathcal{A}}(j) = \mathbf{E}\left(\xi_{nj}^{a+(k-1)\varrho-m} | \mathcal{A} \right) \quad \text{п. н.}$$

для всех k таких, что $a + (k-1)\varrho - m \geqslant 0$. (Здесь и всюду далее мы считаем, что $0^0 = 0$ и, следовательно, $\mathbb{I}_B^0 = \mathbb{I}_B$ для любого события B.) Для отрицательных степеней нужно домножить случайную величину под знаком условного математического ожидания на индикатор $\mathbb{I}_{\{\xi_{nj} > 0\}}$. Отметим, что при этом порядок условного момента может быть нецелым.

Для некоторых m, a и ϱ формулы для $\bar{s}_k^{\mathcal{A}}(j)$ и $s_k^{\mathcal{A}}(j)$ упрощаются. Например, если $a = \varrho = 1$, то $\bar{s}_k^{\mathcal{A}}(j) = s_k^{\mathcal{A}}(j)$ для всех k. Если, дополнительно, $m = 0$, то для всех k

$$s_k^{\mathcal{A}}(j) = \sum_{i_1=1}^{n} \ldots \sum_{i_k=1}^{n} \mathbf{P}(A_{i_1} \ldots A_{i_k} | \mathcal{A}) \quad \text{п. н.} \tag{4}$$

При $a = m$ и $\varrho = 1$ с вероятностью 1 выполняются соотношения

$$s_1^{\mathcal{A}}(j) = \mathbf{P}(A_{j_1} \ldots A_{j_m} | \mathcal{A}),$$
$$s_k^{\mathcal{A}}(j) = \sum_{i_1=1}^{n} \ldots \sum_{i_{k-1}=1}^{n} \mathbf{P}(A_{i_1} \ldots A_{i_{k-1}} A_{j_1} \ldots A_{j_m} | \mathcal{A}), \quad k \geqslant 2.$$

Положив

$$R^{\mathcal{A}}(j) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^m} p_{i,j}^{\mathcal{A}}$$

для всех $j \in J_m$, $m \geqslant 0$, запишем соотношение (1) в виде

$$\mathbf{P}(U_n | \mathcal{A}) = \sum_{j \in J_m} R^{\mathcal{A}}(j) \quad \text{п. н.}$$

Теперь нам достаточно оценить $R^{\mathcal{A}}(j)$ сверху и снизу. Для этого мы используем результаты из работы автора [3]. Применяя их, можно построить оценки для $R^{\mathcal{A}}(j)$ с любым числом моментов ℓ. Далее мы ограничимся наиболее простыми и интересными случаями $\ell = 2$ и $\ell = 3$.

Пусть сначала $\ell = 2$. Тогда неравенства для $R^{\mathcal{A}}(j)$ будут включать только $\bar{s}_1^{\mathcal{A}}(j)$ и $\bar{s}_2^{\mathcal{A}}(j)$.

Наш первый результат позволяет оценивать $\mathbf{P}(U_n | \mathcal{A})$ снизу.

Теорема 1. *Для всех $j \in J_m$, $m \geqslant 0$, определим случайные величины*

$$\bar{\delta}^{\mathcal{A}}(j) = \left(\frac{\bar{s}_2^{\mathcal{A}}(j)}{\bar{s}_1^{\mathcal{A}}(j)} \right)^{1/\varrho}, \quad \theta^{\mathcal{A}}(j) = \bar{\delta}^{\mathcal{A}}(j) - [\bar{\delta}^{\mathcal{A}}(j)],$$
$$\bar{\theta}^{\mathcal{A}}(j) = \frac{(\bar{\delta}^{\mathcal{A}}(j))^{\varrho} - (\bar{\delta}^{\mathcal{A}}(j) - \theta^{\mathcal{A}}(j))^{\rho}}{(\bar{\delta}^{\mathcal{A}}(j) + 1 - \theta^{\mathcal{A}}(j))^{\varrho} - (\bar{\delta}^{\mathcal{A}}(j) - \theta^{\mathcal{A}}(j))^{\rho}},$$

где $[\cdot]$ — целая часть числа в скобках. Мы полагаем, что $0/0 = 0$. При этом имеем $\bar{\theta}^{\mathcal{A}}(j) \in [0, 1)$ п. н. для всех $j \in J_m$.

Тогда выполняется неравенство

$$\mathbf{P}(U_n | \mathcal{A}) \geqslant \sum_{j \in J_m} \underline{R}^{\mathcal{A}}(j) \quad \textit{п. н.},$$

где

$$\underline{R}^{\mathcal{A}}(j) = \frac{\bar{\theta}^{\mathcal{A}}(j) (\bar{s}_1^{\mathcal{A}}(j))^{(a+\varrho)/\varrho}}{\left((\bar{s}_2^{\mathcal{A}}(j))^{1/\varrho} + (1 - \theta^{\mathcal{A}}(j))(\bar{s}_1^{\mathcal{A}}(j))^{1/\varrho}\right)^a} + \frac{(1 - \bar{\theta}^{\mathcal{A}}(j))(\bar{s}_1^{\mathcal{A}}(j))^{(a+\varrho)/\varrho}}{\left((\bar{s}_2^{\mathcal{A}}(j))^{1/\varrho} - \theta^{\mathcal{A}}(j)(\bar{s}_1^{\mathcal{A}}(j))^{1/\varrho}\right)^a}. \tag{5}$$

Доказательство. Нам понадобится следующий результат.

Теорема A (теорема 2 из [3]). *Пусть* $\{r_i\}_{i=1}^n$ *— неотрицательные вещественные числа и* $\bar{s}_k = \sum\limits_{i=1}^n i^{a+(k-1)\varrho} r_i$ *при* $k = 1, 2$. *Положим* $\bar{\delta} = (\bar{s}_2/\bar{s}_1)^{1/\varrho}$, $\theta = \bar{\delta} - [\bar{\delta}]$ *и* $\bar{\theta} = (\bar{\delta}^\varrho - (\bar{\delta}-\theta)^\varrho)/((\bar{\delta}+1-\theta)^\varrho - (\bar{\delta}-\theta)^\varrho) \in [0,1)$.

Тогда справедливо неравенство

$$R = \sum_{i=1}^n r_i \geqslant \frac{\bar{\theta}\bar{s}_1^{(a+\varrho)/\varrho}}{\left(\bar{s}_2^{1/\varrho} + (1-\theta)\bar{s}_1^{1/\varrho}\right)^a} + \frac{(1-\bar{\theta})\bar{s}_1^{(a+\varrho)/\varrho}}{\left(\bar{s}_2^{1/\varrho} - \theta\bar{s}_1^{1/\varrho}\right)^a}.$$

Выберем и зафиксируем варианты условных вероятностей $p_{i,j}^{\mathcal{A}}$ для всех i и j. Тем самым зафиксируются все случайные величины, определяемые через них. Пусть $\mathcal{N} = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j\in J_m} \{\omega \in \Omega : p_{i,j}^{\mathcal{A}}(\omega) \notin [0,1]\}$. По свойствам условных вероятностей $\mathbf{P}(p_{i,j}^{\mathcal{A}} \in [0,1]) = 1$ для всех i и j. Поэтому $\mathbf{P}(\mathcal{N}) = 0$. Выберем теперь произвольное $\omega \in \overline{\mathcal{N}}$ и зафиксируем его. При этом, в частности, окажется, что $\bar{\theta}^{\mathcal{A}}(j)(\omega) \in [0,1)$. Для любого фиксированного $j \in J_m$ по теореме A с $r_i = i^{-m} p_{i,j}^{\mathcal{A}}(\omega)$ мы получим $R^{\mathcal{A}}(j)(\omega) \geqslant \underline{R}^{\mathcal{A}}(j)(\omega)$. Отсюда следует заключение теоремы. □

При $m = 0$ теорема 1 обобщает теорему 2 из [1], при $m = 1$ — теорему 6 из [3], а при $m \geqslant 2$ — теорему 1 из [4]. Упомянутые результаты из работ автора [1, 3, 4] получаются из теоремы 1 в случае тривиальной $\mathcal{A}$.

Использование в доказательстве теоремы 1 вместо теоремы 2 из [3], следствий 2 и 3 из этой же работы позволяет получить более простые неравенства. Например, по следствию 3 при $a = \varrho = 1$ и $m = 0$ мы получим

$$\underline{R}^{\mathcal{A}}(j) \geqslant \frac{(s_1^{\mathcal{A}}(j))^2}{s_2^{\mathcal{A}}(j)} \quad \text{п. н.},$$

из чего вытекает условный аналог неравенства Чжуна—Эрдёша. Под условным аналогом или вариантом соответствующего результата мы здесь и далее понимаем результат, в котором обычные вероятности заменяются на условные вероятности относительно $\mathcal{A}$.

Перейдем к оценке сверху.

Теорема 2. *Выполняется неравенство*

$$\mathbf{P}(U_n|\mathcal{A}) \leqslant \sum_{j\in J_m} \overline{R}^{\mathcal{A}}(j) \quad \textit{п. н.},$$

где

$$\overline{R}^{\mathcal{A}}(j) = \frac{n^{a+\varrho}-1}{n^{a+\varrho}-n^a}\bar{s}_1^{\mathcal{A}}(j) - \frac{n^a-1}{n^{a+\varrho}-n^a}\bar{s}_2^{\mathcal{A}}(j). \tag{6}$$

Доказательство. Как и в предыдущей теореме мы зафиксируем варианты условных вероятностей $p_{i,j}^{\mathcal{A}}$ для всех i и j. Тогда зафиксируются все случайные величины, определяемые через них. Определим событие $\mathcal{N}$ так же, как в доказательстве теоремы 1. Возьмем теперь произвольное $\omega \in \overline{\mathcal{N}}$ и зафиксируем его. По теореме 3 из [3] мы получим $R(j)(\omega) \leqslant \overline{R}(j)(\omega)$ для всех j. Отсюда следует доказываемое неравенство. □

При $m=0$ теорема 2 обобщает теорему 3 из [2], а при $m \geqslant 1$ — теорему 2 из [4]. Соответствующие неравенства из [2] и [4] получаются из теоремы 2 в случае тривиальной σ-алгебры $\mathcal{A}$.

Сравнивая соотношения (5) и (6), мы видим, что второе соотношение проще, но все же менее интересно, так как в нем отсутствуют величины $\bar{\theta}^{\mathcal{A}}(j)$. Этот эффект наблюдается только при $\ell = 2$. Он связан с тем, что в этом случае невозможна некоторая оптимизация в доказательстве теоремы 3 из [3]. За подробностями мы отсылаем читателя к работам [2, 3].

Перейдем к случаю $\ell = 3$. При оценивании сумм $R^{\mathcal{A}}(j)$ теперь будут использованы $\bar{s}_1^{\mathcal{A}}(j)$, $\bar{s}_2^{\mathcal{A}}(j)$ и $\bar{s}_3^{\mathcal{A}}(j)$.

Здесь мы также начнем с оценки снизу.

Теорема 3. *Для всех $j \in J_m$, $m \geqslant 0$, положим*

$$\bar{\delta}_1^{\mathcal{A}}(j) = n^{\varrho}\bar{s}_1^{\mathcal{A}}(j) - \bar{s}_2^{\mathcal{A}}(j), \quad \bar{\delta}_2^{\mathcal{A}}(j) = n^{\varrho}\bar{s}_2^{\mathcal{A}}(j) - \bar{s}_3^{\mathcal{A}}(j), \quad \bar{\delta}^{\mathcal{A}}(j) = \left(\frac{\bar{\delta}_2^{\mathcal{A}}(j)}{\bar{\delta}_1^{\mathcal{A}}(j)}\right)^{1/\varrho},$$

$$\theta^{\mathcal{A}}(j) = \bar{\delta}^{\mathcal{A}}(j) - [\bar{\delta}^{\mathcal{A}}(j)], \quad \bar{\theta}^{\mathcal{A}}(j) = \frac{(\bar{\delta}^{\mathcal{A}}(j))^{\varrho} - (\bar{\delta}^{\mathcal{A}}(j) - \theta^{\mathcal{A}}(j))^{\rho}}{(\bar{\delta}^{\mathcal{A}}(j) + 1 - \theta^{\mathcal{A}}(j))^{\varrho} - (\bar{\delta}^{\mathcal{A}}(j) - \theta^{\mathcal{A}}(j))^{\rho}}.$$

При этом $\bar{\theta}^{\mathcal{A}}(j) \in [0,1)$ п. н. для всех $j \in J_m$.

Тогда выполняется неравенство

$$\mathbf{P}(U_n|\mathcal{A}) \geqslant \sum_{j \in J_m} \underline{R}_1^{\mathcal{A}}(j) \quad \text{п. н.},$$

где

$$\underline{R}_1^{\mathcal{A}}(j) = \frac{\bar{\delta}_1^{\mathcal{A}}(j)\big(1 - \bar{\theta}^{\mathcal{A}}(j)\big)\big(n^a - (\bar{\delta}^{\mathcal{A}}(j) - \theta^{\mathcal{A}}(j))^a\big)}{n^a\big(\bar{\delta}^{\mathcal{A}}(j) - \theta^{\mathcal{A}}(j)\big)^a\big(n^{\varrho} - (\bar{\delta}^{\mathcal{A}}(j) - \theta^{\mathcal{A}}(j))^{\varrho}\big)} + \\ + \frac{\bar{\delta}_1^{\mathcal{A}}(j)\bar{\theta}^{\mathcal{A}}(j)\big(n^a - (\bar{\delta}^{\mathcal{A}}(j) - \theta^{\mathcal{A}}(j) + 1)^a\big)}{n^a\big(\bar{\delta}^{\mathcal{A}}(j) - \theta^{\mathcal{A}}(j) + 1\big)^a\big(n^{\varrho} - (\bar{\delta}^{\mathcal{A}}(j) - \theta^{\mathcal{A}}(j) + 1)^{\varrho}\big)} + \frac{\bar{s}_1^{\mathcal{A}}(j)}{n^a}. \quad (7)$$

Отметим, что $\bar{\theta}^{\mathcal{A}}(j)$ и $\theta^{\mathcal{A}}(j)$ определяются через $\bar{\delta}^{\mathcal{A}}(j)$ в теоремах 1 и 3 (т. е. при $\ell = 2$ и $\ell = 3$) одинаково, но $\bar{\delta}^{\mathcal{A}}(j)$ различны.

Доказательство этой теоремы не отличается от доказательства двух предыдущих теорем. Нужно лишь вместо теорем 2 и 3 из [3] применить теорему 4 оттуда же. Поэтому мы его опускаем.

При $m = 0$ теорема 3 обобщает теорему 3 из [1], при $m = 1$ — теорему 7 из [3], а при $m \geqslant 2$ — теорему 3 из [4]. Используя следствия 5 и 6 из работы [3], можно получить более простые неравенства.

Найдем теперь оценки сверху для $\mathbf{P}(U_n|\mathcal{A})$.

Теорема 4. *Для всех $j \in J_m$, $m \geqslant 0$, положим*

$$\bar{\delta}_1^{\mathcal{A}}(j) = \bar{s}_2^{\mathcal{A}}(j) - \bar{s}_1^{\mathcal{A}}(j), \quad \bar{\delta}_2^{\mathcal{A}}(j) = \bar{s}_3^{\mathcal{A}}(j) - \bar{s}_2^{\mathcal{A}}(j), \quad \bar{\delta}^{\mathcal{A}}(j) = \left(\frac{\bar{\delta}_2^{\mathcal{A}}(j)}{\bar{\delta}_1^{\mathcal{A}}(j)}\right)^{1/\varrho},$$

$$\theta^{\mathcal{A}}(j) = \bar{\delta}^{\mathcal{A}}(j) - [\bar{\delta}^{\mathcal{A}}(j)], \quad \bar{\theta}^{\mathcal{A}}(j) = \frac{(\bar{\delta}^{\mathcal{A}}(j))^{\varrho} - (\bar{\delta}^{\mathcal{A}}(j) - \theta^{\mathcal{A}}(j))^{\rho}}{(\bar{\delta}^{\mathcal{A}}(j) + 1 - \theta^{\mathcal{A}}(j))^{\varrho} - (\bar{\delta}^{\mathcal{A}}(j) - \theta^{\mathcal{A}}(j))^{\rho}}.$$

При этом $\bar{\theta}^{\mathcal{A}}(j) \in [0,1)$ п. н. для всех $j \in J_m$.

Выполняется неравенство

$$\mathbf{P}(U_n|\mathcal{A}) \leqslant \sum_{j\in J_m} \overline{R}_1^{\mathcal{A}}(j) \quad \textit{п. н.},$$

где

$$\overline{R}_1^{\mathcal{A}}(j) = \bar{s}_1^{\mathcal{A}}(j) - \frac{\bar{\delta}_1^{\mathcal{A}}(j)\big(1-\bar{\theta}^{\mathcal{A}}(j)\big)\big((\bar{\delta}^{\mathcal{A}}(j)-\theta^{\mathcal{A}}(j))^a-1\big)}{\big(\bar{\delta}^{\mathcal{A}}(j)-\theta^{\mathcal{A}}(j)\big)^a\big((\bar{\delta}^{\mathcal{A}}(j)-\theta^{\mathcal{A}}(j))^{\varrho}-1\big)} - \\ - \frac{\bar{\delta}_1^{\mathcal{A}}(j)\bar{\theta}^{\mathcal{A}}(j)\big((\bar{\delta}^{\mathcal{A}}(j)-\theta^{\mathcal{A}}(j)+1)^a-1\big)}{\big(\bar{\delta}^{\mathcal{A}}(j)-\theta^{\mathcal{A}}(j)+1\big)^a\big((\bar{\delta}^{\mathcal{A}}(j)-\theta^{\mathcal{A}}(j)+1)^{\varrho}-1\big)}. \qquad (8)$$

Отметим, что $\bar{\theta}^{\mathcal{A}}(j)$ и $\theta^{\mathcal{A}}(j)$ определяются через $\bar{\delta}^{\mathcal{A}}(j)$ для оценок снизу (теорема 3) и сверху (теорема 4) одинаково, но $\bar{\delta}^{\mathcal{A}}(j)$ различны. Кроме того, для верхних и нижних оценок различны также $\bar{\delta}_1^{\mathcal{A}}(j)$ и $\bar{\delta}_2^{\mathcal{A}}(j)$.

Доказательство теоремы 4 мы опускаем, так как оно не отличается от доказательства первых двух теорем. Нужно лишь применить теорему 5 из [3] вместо результатов, использованных выше.

Теорема 4 является условным аналогом теоремы 4 из [4], обобщающей теорему 8 из [3] на случай $m \geqslant 2$. Здесь также возможно получение более простых неравенств. Для этого нужно воспользоваться следствиями 7 и 8 из [3].

Приведем пример, показывающий, что оценки вероятностей объединений с помощью условных моментов с последующим усреднением могут быть лучше, чем оценки через обычные моменты.

Предположим, что случайный вектор (ζ, η) имеет следующее распределение:

$$\mathbf{P}(\zeta = i, \eta = 1) = \frac{1}{6} \quad \text{при} \quad i = 1,2,3, \quad \mathbf{P}(\zeta = i, \eta = 1) = 0 \quad \text{при} \quad i = 4,5,6,$$
$$\mathbf{P}(\zeta = i, \eta = 2) = 0 \quad \text{при} \quad i = 1,2,3, \quad \mathbf{P}(\zeta = i, \eta = 2) = \frac{1}{6} \quad \text{при} \quad i = 4,5,6.$$

Пусть

$$A_1 = \{\zeta \in \{1,2,5\}\}, \quad A_2 = \{\zeta \in \{1,2,3,6\}\}, \quad A_3 = \{\zeta \in \{1,3,4\}\}, \quad A_4 = \{\zeta \in \{1,4\}\}.$$

Оценим вероятность U_4 с помощью теоремы 1 при $m = 0$, $a = \varrho = 1$ и $\ell = 2$. Отметим, что $\mathbf{P}(U_4) = 1$.

Пусть $\mathcal{A} = \sigma(\eta)$. В силу того что случайная величина η дискретна, σ-алгебра $\mathcal{A}$ порождена разбиением $\{\eta = 1\}$, $\{\eta = 2\}$. Поэтому для любого события B выполняется соотношение

$$\mathbf{P}(B|\mathcal{A}) = \mathbf{P}(B|\eta = 1)\mathbb{I}_{\{\eta=1\}} + \mathbf{P}(B|\eta = 2)\mathbb{I}_{\{\eta=2\}} \quad \text{п. н.}$$

Несложно проверить, что

$$\mathbf{P}(A_1|\eta = 1) = \frac{2}{3}, \quad \mathbf{P}(A_2|\eta = 1) = 1, \quad \mathbf{P}(A_3|\eta = 1) = \frac{2}{3}, \quad \mathbf{P}(A_4|\eta = 1) = \frac{1}{3},$$
$$\mathbf{P}(A_1|\eta = 2) = \frac{1}{3}, \quad \mathbf{P}(A_2|\eta = 2) = \frac{1}{3}, \quad \mathbf{P}(A_3|\eta = 2) = \frac{1}{3}, \quad \mathbf{P}(A_4|\eta = 2) = \frac{1}{3}.$$

Следовательно, с учетом (4), получим

$$s_1^{\mathcal{A}}(0) = \sum_{i=1}^{4} \mathbf{P}(A_i|\mathcal{A}) = \frac{8}{3}\,\mathbb{I}_{\{\eta=1\}} + \frac{4}{3}\,\mathbb{I}_{\{\eta=2\}} \quad \text{п. н.}$$

Далее,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(A_1A_2|\eta=1) = \frac{2}{3}, \quad \mathbf{P}(A_1A_3|\eta=1) = \frac{1}{3}, \quad \mathbf{P}(A_1A_4|\eta=1) = \frac{1}{3},\\
&\mathbf{P}(A_2A_3|\eta=1) = \frac{2}{3}, \quad \mathbf{P}(A_2A_4|\eta=1) = \frac{1}{3}, \quad \mathbf{P}(A_3A_4|\eta=1) = \frac{1}{3},\\
&\mathbf{P}(A_1A_2|\eta=2) = 0, \quad \mathbf{P}(A_1A_3|\eta=2) = 0, \quad \mathbf{P}(A_1A_4|\eta=2) = 0,\\
&\mathbf{P}(A_2A_3|\eta=2) = 0, \quad \mathbf{P}(A_2A_4|\eta=2) = 0, \quad \mathbf{P}(A_3A_4|\eta=2) = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Используя (4), мы имеем

$$s_2^{\mathcal{A}}(0) = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} \mathbf{P}(A_iA_j|\mathcal{A}) = s_1^{\mathcal{A}}(0) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} \mathbf{P}(A_iA_j|\mathcal{A}) = 8\,\mathbb{I}_{\{\eta=1\}} + 2\,\mathbb{I}_{\{\eta=2\}} \quad \text{п. н.}$$

Таким образом, выполняются равенства

$$\bar{\delta}^{\mathcal{A}}(0) = \frac{s_2^{\mathcal{A}}(0)}{s_2^{\mathcal{A}}(0)} = 3\,\mathbb{I}_{\{\eta=1\}} + \frac{3}{2}\,\mathbb{I}_{\{\eta=2\}} \quad \text{п. н.}, \quad \bar{\theta}^{\mathcal{A}}(0) = \theta^{\mathcal{A}}(0) = \frac{1}{2}\,\mathbb{I}_{\{\eta=2\}} \quad \text{п. н.}$$

Подставляя найденные величины в соотношение (5), получим

$$\mathbf{P}(U_4|\mathcal{A}) \geqslant \underline{R}^{\mathcal{A}}(0) = \frac{8}{9}\,\mathbb{I}_{\{\eta=1\}} + \mathbb{I}_{\{\eta=2\}} \quad \text{п. н.}$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{P}(U_4) = \mathbf{E}\mathbf{P}(U_4|\mathcal{A}) \geqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{8}{9} + \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{17}{18}.$$

Аналогичные вычисления можно провести для тривиальной $\mathcal{A}$. При этом мы можем считать, что имеем дело с обычными вероятностями и числами. Действительно, относительно тривиальной σ-алгебры измеримы только вырожденные случайные величины. В этом случае мы получим

$$\mathbf{P}(A_1) = \frac{3}{6}, \quad \mathbf{P}(A_2) = \frac{4}{6}, \quad \mathbf{P}(A_3) = \frac{3}{6}, \quad \mathbf{P}(A_4) = \frac{2}{6}, \quad s_1^{\mathcal{A}}(0) = \sum_{i=1}^{4}\mathbf{P}(A_i) = 2.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(A_1A_2) = \frac{2}{6}, \quad \mathbf{P}(A_1A_3) = \frac{3}{6}, \quad \mathbf{P}(A_1A_4) = \frac{1}{6},\\
&\mathbf{P}(A_2A_3) = \frac{2}{6}, \quad \mathbf{P}(A_2A_4) = \frac{1}{6}, \quad \mathbf{P}(A_3A_4) = \frac{2}{6}.
\end{aligned}$$

Поэтому справедливо равенство

$$s_2^{\mathcal{A}}(0) = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\mathbf{P}(A_iA_j) = 5.$$

Отсюда следует, что $\bar{\delta}^{\mathcal{A}}(0) = 5/2$, $\bar{\theta}^{\mathcal{A}}(0) = 1/2$ и $\mathbf{P}(U_4) \geqslant \underline{R}^{\mathcal{A}}(0) = 5/6$. Эта оценка хуже полученной выше.

3. Условная лемма Бореля—Кантелли. Для последовательности событий $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ событие $\limsup A_n$ определяется соотношением

$$\limsup A_n = \bigcap_{t=1}^{\infty} \bigcup_{k=t}^{\infty} A_k.$$

Для всех $n, t \in \mathbb{N}$ таких, что $t \leqslant n$, положим

$$U_t^{\infty} = \bigcup_{k=t}^{\infty} A_k, \quad U_t^n = \bigcup_{k=t}^{n} A_k.$$

Так как $\mathbb{I}_{U_t^{\infty}} \to \mathbb{I}_{\limsup A_n}$ (при $t \to \infty$) п. н., по теореме о сходимости под знаком условных математических ожиданий мы имеем

$$\mathbf{P}(\limsup A_n|\mathcal{A}) = \lim_{t\to\infty} \mathbf{P}(U_t^{\infty}|\mathcal{A}) \quad \text{п. н.}$$

Учитывая, что для любого фиксированного t имеет место $\mathbb{I}_{U_t^n} \to \mathbb{I}_{U_t^{\infty}}$ (при $n \to \infty$) п. н., по теореме о сходимости под знаком условных математических ожиданий мы получим

$$\mathbf{P}(U_t^{\infty}|\mathcal{A}) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(U_t^n|\mathcal{A}) \quad \text{п. н.}$$

При этом можно считать, что событие, на котором последнее равенство не выполнено, одно и то же для всех t. Действительно, мы можем просто объединить все подобные события для всех фиксированных t. Полученное событие будет иметь нулевую вероятность.

В результате мы приходим к соотношению

$$\mathbf{P}(\limsup A_n|\mathcal{A}) = \lim_{t\to\infty} \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(U_t^n|\mathcal{A}\right) \quad \text{п. н.}$$

Поэтому оценки из предыдущего параграфа дают нам возможность получать условные варианты леммы Бореля—Кантелли. Оценки снизу позволяют получить новые формулировки второй части условной леммы Бореля—Кантелли, а оценки сверху — первой. Кроме того, усреднение даст нам оценку сверху или снизу вероятности $\mathbf{P}(\limsup A_n)$.

Рассмотрим некоторые примеры подобных результатов. При этом мы ограничимся второй частью условной леммы Бореля—Кантелли, так как обобщения первой части получаются аналогично.

Теорема 5. *Выполняется неравенство*

$$\mathbf{P}(\limsup A_n|\mathcal{A}) \geqslant \limsup_{t\to\infty} \limsup_{n\to\infty} R(t,n) \quad \textit{п. н.},$$

где $R(t,n)$ — оценка снизу для $\mathbf{P}\left(U_t^n|\mathcal{A}\right)$ из теорем 1 или 3.

Выведем некоторые следствия из теоремы 5, используя теоремы 1 и 3 при $a = \varrho = 1$ и $m = 0$.

Пусть $\ell = 2$. Учитывая (4) и (5), возьмем

$$R(t,n) = \frac{\left(\sum\limits_{k=t}^{n} \mathbf{P}\left(A_k|\mathcal{A}\right)\right)^2}{\sum\limits_{k,j=t}^{n} \mathbf{P}\left(A_k A_j|\mathcal{A}\right)}.$$

Так как $R(t,n) \leqslant \sum\limits_{k=t}^{n} \mathbf{P}\left(A_k|\mathcal{A}\right)$ п. н., мы имеем

$$\limsup_{t\to\infty} \limsup_{n\to\infty} R(t,n) = 0 \quad \text{для п. в.} \quad \omega \in C = \left\{\omega : \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(A_k|\mathcal{A}\right) < \infty\right\}.$$

Поэтому оценка для $\mathbf{P}(\limsup A_n|\mathcal{A})$ будет нетривиальной только для $\omega \in D = \left\{\omega : \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(A_k|\mathcal{A}\right) = \infty\right\}$.

Для п. в. $\omega \in D$ выполняется неравенство

$$R(t,n) \geqslant \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{t-1} \mathbf{P}\left(A_k|\mathcal{A}\right)\right)^2 + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{P}\left(A_k|\mathcal{A}\right)\right)^2 - 2\left(\sum\limits_{k=1}^{t-1} \mathbf{P}\left(A_k|\mathcal{A}\right)\right)\left(\sum\limits_{j=1}^{n} \mathbf{P}\left(A_j|\mathcal{A}\right)\right)}{\sum\limits_{k,j=1}^{n} \mathbf{P}\left(A_k A_j|\mathcal{A}\right)}.$$

Ясно, что для п. в. $\omega \in D$ и любого фиксированного t числитель последней дроби равен $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{P}\left(A_k|\mathcal{A}\right)\right)^2 (1 + o(1))$ при $n \to \infty$. Таким образом, мы приходим к следующему результату из работы Пракаса Рао [5].

Следствие 1. *Для п. в. $\omega \in D$ выполняется неравенство*

$$\mathbf{P}(\limsup A_n|\mathcal{A}) \geqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{P}\left(A_k|\mathcal{A}\right)\right)^2}{\sum\limits_{k,j=1}^{n} \mathbf{P}\left(A_k A_j|\mathcal{A}\right)}.$$

Следствие 1 представляет собой условный вариант известного обобщения леммы Бореля—Кантелли, принадлежащего Эрдёшу и Реньи. Несложно проверить, что для условно попарно независимых событий, т. е. таких, что $\mathbf{P}\left(A_k A_j|\mathcal{A}\right) = \mathbf{P}\left(A_k|\mathcal{A}\right) \mathbf{P}\left(A_j|\mathcal{A}\right)$ п. н. для всех натуральных $k \neq j$, неравенство

$$\mathbf{P}(\limsup A_n|\mathcal{A}) \geqslant 1$$

выполнено для п. в. $\omega \in D$. Отметим, что понятия условной и обычной независимостей отличаются. За примерами мы отсылаем читателя к работе [5]. Последний результат вытекает также из такого следствия нашей теоремы 5.

Следствие 2. *Пусть имеем $\mathbf{P}\left(A_k A_j|\mathcal{A}\right) \leqslant \zeta_n \mathbf{P}\left(A_k|\mathcal{A}\right) \mathbf{P}\left(A_j|\mathcal{A}\right)$ для п. в. $\omega \in D$ и всех $k \neq j$, $1 \leqslant k, j \leqslant n$, где $\{\zeta_n\}$ — последовательность случайных величин таких, что $\zeta_n \geqslant 1$ для п. в. $\omega \in D$ и всех n.*

Тогда
$$\mathbf{P}(\limsup A_n|\mathcal{A}) \geqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\zeta_n}$$
для п. в. $\omega \in D$.

Доказательство. Заметим, что для п. в. $\omega \in D$ выполняется неравенство
$$\sum_{k,j=t}^{n} \mathbf{P}\left(A_k A_j|\mathcal{A}\right) \leqslant \zeta_n \left(\sum_{k=t}^{n} \mathbf{P}\left(A_k|\mathcal{A}\right)\right)^2 + \sum_{k=t}^{n} \mathbf{P}\left(A_k|\mathcal{A}\right).$$
Следовательно,
$$R(t,n) \geqslant \frac{1}{\zeta_n + \left(\sum\limits_{k=t}^{n} \mathbf{P}\left(A_k|\mathcal{A}\right)\right)^{-1}}$$
для п. в. $\omega \in D$. Отсюда и из теоремы 5 вытекает следствие 2. □

При $\zeta_n = c$ для всех n результат следствия 2 получен Кимом [8].

Мы заканчиваем этот параграф одним результатом, вытекающим из теорем 5 и 3 при $\ell = 3$.

Теорема 6. *Положим*
$$S_1^{\mathcal{A}}(n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}\left(A_i|\mathcal{A}\right), \quad S_2^{\mathcal{A}}(n) = 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathbf{P}\left(A_i A_j|\mathcal{A}\right), \quad S_3^{\mathcal{A}}(n) = 6 \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} \mathbf{P}\left(A_i A_j A_k|\mathcal{A}\right),$$
$\Delta_1^{\mathcal{A}}(n) = (n-1)S_1^{\mathcal{A}}(n) - S_2^{\mathcal{A}}(n)$, $\Delta_2^{\mathcal{A}}(n) = (n-2)S_2^{\mathcal{A}}(n) - S_3^{\mathcal{A}}(n)$. *Предположим, что для п. в.* $\omega \in D$ *выполняются соотношения* $\Delta_1^{\mathcal{A}}(n)/n \to \infty$ *и* $S_2^{\mathcal{A}}(n) = o(\Delta_1^{\mathcal{A}}(n) + \Delta_2^{\mathcal{A}}(n))$.

Тогда для п. в. $\omega \in D$ *выполняется неравенство*
$$\mathbf{P}(\limsup A_n|\mathcal{A}) \geqslant \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{(\Delta_1^{\mathcal{A}}(n))^2}{\Delta_1^{\mathcal{A}}(n) + \Delta_2^{\mathcal{A}}(n)} + \frac{S_1^{\mathcal{A}}(n)}{n}\right).$$

Теорема 6 представляет собой условный вариант теоремы 9 из работы автора [1]. Доказательство теоремы 6 сводится к оценке снизу $\mathbf{P}(U_t^n|\mathcal{A})$ для п. в. $\omega \in D$, которая проводится для всякого фиксированного ω так же, как в доказательстве теоремы 9 из [1]. Поэтому детали мы опускаем.

В заключение сделаем одно замечание о рассматривавшихся σ-алгебрах. Можно считать, что $\mathcal{F}$ является минимальной σ-алеброй, порожденной событиями из σ-алгебры $\mathcal{A}$ и последовательности $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Автор выражает благодарность рецензентам за полезные замечания, способствовавшие улучшению текста.

Литература

1. *Frolov A. N.* Bounds for probabilities of unions of events and the Borel—Cantelli lemma // Statist. Probab. Lett. 2012. Vol. 82. P. 2189–2197.

2. *Фролов А. Н.* О неравенствах для вероятностей объединений событий и лемме Бореля—Кантелли // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2014. Т. 1(59), вып. 2. С. 201–210.

3. *Frolov A. N.* On lower and upper bounds for probabilities of unions and the Borel—Cantelli lemma // Studia Sci. Math. Hungarica. 2015. Vol. 52, N 1. P. 102–128.

4. *Фролов А. Н.* Об оценивании вероятностей объединений событий с приложениями к лемме Бореля—Кантелли // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2015. Т. 2(60), вып. 3. С. 399–404.

5. *Prakasa Rao B. L. S.* Conditional independence, conditional mixing and conditional association // Ann. Inst. Statist. Math. 2009. Vol. 61. P. 441–460.

6. *Prakasa Rao B. L. S.* Upper and lower bounds in the conditional Borel—Cantelli lemma // Stoch. Anal. Appl. 2010. Vol. 28. P. 144–156.

7. *Liu J., Prakasa Rao B. L. S.* On conditional Borel—Cantelli lemmas for sequences of random variables // J. Math. Analisys and Appl. 2013. Vol. 399. P. 156–165.

8. *Kim H.-C.* On conditional Borel—Cantelli lemma under pairwise extended conditional negative quadrant dependence // Honam Math. J. 2014. Vol. 36, N 4. P. 767–775.

9. *Chandra T. K.* The Borel—Cantelli lemma. Springer, Heidelberg, 2012.

10. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1967.

11. *Galambos J., Simonelli I.* Bonferroni-type inequalities with applications. New York: Springer-Verlag, 1996.

Статья поступила в редакцию 11 января 2016 г.

Сведения об авторе

Фролов Андрей Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор; a.frolov@spbu.ru

ON INEQUALITIES FOR CONDITIONAL PROBABILITIES OF UNIONS OF EVENTS AND THE CONDITIONAL BOREL—CANTELLI LEMMA

Andrei N. Frolov

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; a.frolov@spbu.ru

We derive new upper and lower bounds for conditional (given σ-field $\mathcal{A}$) probabilities of unions of events. These bounds are sharp. Taking of expectations from left-hand and right-hand sides of such inequalities may yield better bounds than a direct estimation of probabilities of events. An example is given. We also derive new generalizations of the conditional Borel—Cantelli lemma. Taking of expectations, one can obtain new variants of the Borel—Cantelli lemma under conditions that differ from classical ones. Refs 11.

Keywords: Bonferroni inequalities, probabilities of unions of events, conditional Borel—Cantelli lemma, Borel—Cantelli lemma.

References

1. Frolov A. N., *Statist. Probab. Lett.* **82**, 2189–2197 (2012).

2. Frolov A. N., *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **1(59)**, Issue 2, 201–210 (2014) [in Russian].

3. Frolov A. N., *Studia Sci. Math. Hungar.* **52**(1), 102–128 (2015).

4. Frolov A. N., *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **2(60)**, Issue 3, 399–404 (2015) [in Russian].

5. Prakasa Rao B. L. S., *Ann. Inst. Statist. Math.* **61**, 441–460 (2009).

6. Prakasa Rao B. L. S., *Stoch. Anal. Appl.* **28**, 144–156 (2010).

7. Liu J., Prakasa Rao B. L. S., *J. Math. Analisys and Appl.* **399**, 156–165 (2013).

8. Kim H.-C., *Honam Math. J.* **36**(4), 767–775 (2014).

9. Chandra T. K., *The Borel—Cantelli lemma* (Springer, Heidelberg, 2012).

10. Feller W., *Introduction to the theory of probability and its applications* (Mir, Moscow, 1967) [in Russian].

11. Galambos J., Simonelli I., *Bonferroni-type inequalities with applications* (Springer-Verlag, New York, 1996).

Для цитирования: Фролов А. Н. О неравенствах для условных вероятностей объединений событий и условной лемме Бореля—Кантелли // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2016. Т. 3 (61). Вып. 4. С. 651–662. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.415

For citation: Frolov A. N. On inequalities for conditional probabilities of unions of events and the conditional Borel—Cantelli lemma. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2016, vol. 3 (61), issue 4, pp. 651–662. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.415