МАТЕМАТИКА

УДК 519.2

О СЕМЕЙСТВАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ, ХАРАКТЕРИЗУЕМЫХ НЕКОТОРЫМИ СВОЙСТВАМИ УПОРЯДОЧЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

С. М. Ананьевский, В. Б. Невзоров

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Получены новые характеризации некоторых вероятностных распределений соотношениями, в которых участвуют различные упорядоченные случайные величины. К такого рода величинам относятся порядковые статистики, последовательные максимумы и рекорды. Рассмотрены соотношения, в которых присутствуют не только верхние, но и нижние рекордные величины. Представленные упорядоченные объекты построены по последовательностям независимых случайных величин, имеющих общую непрерывную функцию распределения. Исследуются равенства по распределению последовательных максимумов, подвергнутых различным случайным сдвигам. Эти сдвиги (односторонние или двусторонние) имеют экспоненциальные распределения. В некоторых теоремах и следствиях к ним представлены соответствующие характеризации распределений подобного рода соотношениями. Также в работе рассматриваются экспоненциально сдвинутые порядковые статистики, простые соотношения между которыми также характеризуют определенные вероятностные распределения.

Все представленные результаты дают множество характеризаций различных распределений. В качестве частных случаев даны соотношения, характеризующие семейства классических экспоненциальных и логистических распределений. Библиогр. 7 назв.

Ключевые слова: порядковые статистики, последовательные максимумы, рекордные величины, характеризации вероятностных распределений, экспоненциальное распределение, логистическое распределение.

Введение. Рассмотрим последовательность независимых случайных величин (с. в.) X_1, $X_2, \ldots$ с общей функцией распределения (ф. р.) $F(x)$ и плотностью распределения $f(x)$. Свяжем с этой последовательностью следующие три типа упорядоченных случайных величин:

1) последовательные максимумы $M(1) \le M(2) \le \cdots \le M(n) \le \cdots$, где

$$M(n) = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}, \qquad n = 1, 2, \ldots;$$

2) порядковые статистики $X_{1,n} \le X_{2,n} \le \cdots \le X_{n,n}$, $n = 1, 2, \ldots$;

3) рекордные моменты $L(n)$ и рекордные величины $X(1) < X(2) < \cdots < X(n) < \cdots$,

DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.301

где
$$L(1)=1,\quad L(n)=\min\{j>L(n-1):X_j>M(n-1)\},\quad n=2,3,\dots,$$
и
$$X(n)=X_{L(n)},\quad n=1,2,\dots.$$

Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые (в том числе и от X) случайные величины, имеющие экспоненциальное $E(1)$-распределение с функцией распределения вида $H(x)=\max\{0,1-\exp(-x)\}$.

Имеется достаточно большое число работ (см., например, [1–7]), в которых приведены различные характеризации вероятностных распределений свойствами указанных упорядоченных случайных величин. Ниже будут рассмотрены некоторые обобщения полученных ранее результатов.

1. Характеризации распределений свойствами последовательных максимумов, подвергнутых экспоненциальным сдвигам. В работе [7] были получены следующие результаты.

Теорема 1. *Для того чтобы при некотором $n=2,3,\dots$ выполнялось соотношение*
$$M(1)+\xi_1\stackrel{d}{=}M(n),\tag{1}$$
необходимо и достаточно, чтобы ф. р. $F(x)$ имела следующий вид:
$$F(x)=\left(1-\exp\left(-\frac{(n-1)(x-C)}{n}\right)\right)^{1/(n-1)},\quad x\geq C,\tag{2}$$
и
$$F(x)=0,\quad x<C,$$
где в качестве C можно взять произвольную константу.

Теорема 2. *Для того чтобы при некотором $n=2,3,\dots$ выполнялось соотношение*
$$M(1)\stackrel{d}{=}M(n)-\xi_2,\tag{3}$$
необходимо и достаточно, чтобы ф. р. $F(x)$ имела следующий вид:
$$F(x)=\frac{1}{\left(1+\exp\left(-(n-1)(x-C)\right)\right)^{1/(n-1)}},\quad -\infty<x<\infty.\tag{4}$$

Выделим следующие важные частные случаи теорем 1 и 2.

Следствие 1. *Соотношение*
$$M(1)+\xi_1\stackrel{d}{=}M(2)\tag{5}$$
характеризует экспоненциальное распределение с ф. р.
$$F(x)=\max\{0,1-\exp(-(x-C))\},\tag{6}$$
где C — произвольная константа.

Следствие 2. *Соотношение*
$$M(1)\stackrel{d}{=}M(2)-\xi_2\tag{7}$$

характеризует логистическое распределение с ф. р.

$$F(x) = \frac{C}{C + \exp(-x)}, \quad -\infty < x < \infty, \tag{8}$$

где C — произвольная положительная константа.

Для того чтобы описать семейство распределений, включающее в себя оба множества классических функций распределения (6) и (8), рассмотрим более общее соотношение

$$M(1) + a\xi_1 \overset{d}{=} M(2) - b\xi_2, \tag{9}$$

в котором справедливы неравенства $a \geq 0,\ b \geq 0$ и $a + b > 0$.

Пусть $Q(x),\ 0 < x < 1$, обозначает функцию, обратную функции распределения $F(x)$, и в этом случае имеет место соотношение

$$Q(F(x)) = x, \quad -\infty < x < \infty. \tag{10}$$

Справедлива следующая теорема, результат которой обобщает результаты двух предыдущих теорем.

Теорема 3. *Пусть X_1 и X_2 — независимые одинаково распределенные с. в., имеющие ф. р. $F(x)$ и плотность распределения $f(x)$. Тогда соотношение (9), где справедливы $a \geq 0,\ b \geq 0$ и $a + b > 0$, выполняется тогда и только тогда, когда функция $Q(x)$, обратная ф. р. $F(x)$, имеет следующий вид:*

$$Q(x) = C + b \log x - (2a + b) \log(1 - x), \quad 0 < x < 1, \tag{11}$$

где C — произвольная константа.

Следствие 3. *В случае, когда имеем $a = 1$ и $b = 0$, получаем*

$$Q(x) = C - 2 \log(1 - x), \quad 0 < x < 1,$$

и

$$F(x) = 1 - \exp\left\{-\frac{x - C}{2}\right\}, \quad x \geq C,$$

что соответствует равенству (2) при $n = 2$.

Следствие 4. *Если возьмем $a = 0$ и $b = 1$, из (11) получим равенство*

$$Q(x) = C + \log x - \log(1 - x), \quad 0 < x < 1,$$

которое приводит к функции распределения

$$F(x) = \frac{1}{1 + \exp(-(x - C))}, \quad -\infty < x < \infty,$$

где C — произвольная константа.

Этот результат вполне соответствует результату, приведенному в следствии 2.

2. Характеризации распределений свойствами порядковых статистик, подвергнутых случайным экспоненциальным сдвигам. Рассмотрим равенство, несколько отличающееся от соотношения (9). Вместо случайных величин $M(1) = X_1$

и $M(2) = \max\{X_1, X_2\}$ будем иметь дело с двумя порядковыми статистиками $X_{1,2} = \min\{X_1, X_2\}$ и $X_{2,2} = \max\{X_1, X_2\}$. Справедлив следующий результат.

Теорема 4. *Пусть X_1 и X_2 — независимые одинаково распределенные с. в., имеющие ф. р. $F(x)$ и плотность распределения $f(x)$. Тогда соотношение*

$$X_{1,2} + a\xi_1 \stackrel{d}{=} X_{2,2} - b\xi_2, \tag{12}$$

в котором справедливы неравенства $a \geq 0$, $b \geq 0$ и $a + b > 0$, выполняется тогда и только тогда, когда функция $Q(x)$ (обратная ф. р. $F(x)$) имеет вид

$$Q(x) = C + b\log x - a\log(1 - x), \quad 0 < x < 1, \tag{13}$$

где в качестве C можно взять произвольную константу.

Следствие 5. *Если возьмем $a = 1$ и $b = 0$, т. е. рассмотрим соотношение*

$$X_{1,2} + \xi_1 \stackrel{d}{=} X_{2,2}, \tag{14}$$

из (13) получим

$$Q(x) = C - \log(1 - x), \quad 0 < x < 1,$$

и

$$F(x) = 1 - \exp\{-(x - C)\}, \quad x \geq C.$$

В этом случае равенство (14) характеризует (с точностью до произвольного сдвигового параметра C) экспоненциальное распределение.

Следствие 6. *Если возьмем $a = 0$ и $b = 1$ в равенстве (12), т. е. рассмотрим*

$$X_{1,2} \stackrel{d}{=} X_{2,2} - \xi_2, \tag{15}$$

из (13) получим соотношение

$$Q(x) = C + \log x, \quad 0 < x < 1,$$

которое приводит к функции распределения

$$F(x) = \min\{1, \exp(x - C)\}, \tag{16}$$

где C — произвольная константа. В этом случае имеем дело с отрицательным экспоненциальным распределением.

Следствие 7. *Если возьмем в равенстве (12) $a = b = 1$, т. е. рассмотрим соотношение*

$$X_{1,2} + \xi_1 \stackrel{d}{=} X_{2,2} - \xi_2, \tag{17}$$

дело сведется к функции

$$Q(x) = C + \log x - \log(1 - x), \quad 0 < x < 1, \tag{18}$$

которая соответствует исходной ф. р. $F(x)$, имеющей вид

$$F(x) = \frac{1}{1 + \exp\{-(x - C)\}}, \quad -\infty < x < \infty, \tag{19}$$

где C — произвольная константа. Таким образом, соотношение (17) характеризует (с точностью до произвольного параметра сдвига C) логистическое распределение.

3. Характеризации распределений свойствами рекордных величин, подвергнутых экспоненциальным сдвигам. Приведем для сравнения с характеризациями распределений, представленными в теоремах 3 и 4, следующий результат, полученный в статье [3]. В этой работе рассматривалось соотношение

$$X(1) + a\xi_1 \overset{d}{=} X(2) - b\xi_2, \tag{20}$$

в котором $X(1) = X_1$ и $X(2)$ — первая и вторая верхние рекордные величины.

Теорема 5 (см. [3]). *Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, имеющих общую ф. р. $F(x)$ и плотность распределения $f(x)$. Тогда соотношение (20), в котором справедливы $a \geq 0$, $b \geq 0$ и $a + b > 0$, выполняется тогда и только тогда, когда функция $Q(x)$ (обратная ф. р. $F(x)$) имеет следующий вид:*

$$Q(x) = C + b\log(-\log(1-x)) - a\log(1-x), \quad 0 < x < 1, \tag{21}$$

где C — произвольная константа.

Следствие 8. *Если возьмем $a = 1$ и $b = 0$ в равенстве (20), т. е. рассмотрим соотношение*

$$X(1) + \xi_1 \overset{d}{=} X(2), \tag{22}$$

получим

$$Q(x) = C - \log(1-x), \quad 0 < x < 1,$$

и

$$F(x) = 1 - \exp\{-(x - C)\}, \quad x \geq C. \tag{23}$$

Значит, равенство (22) характеризует экспоненциальное (с точностью до параметра сдвига C) распределение.

Следствие 9. *Если же возьмем $a = 0$ и $b = 1$ в соотношении (20), т. е. рассмотрим равенство*

$$X_1 \overset{d}{=} X(2) - \xi_2, \tag{24}$$

получим

$$Q(x) = \log(-\log(1-x)) + C, \quad 0 < x < 1,$$

и

$$F(x) = 1 - \exp(-\exp(x - C)), \quad -\infty < x < \infty, \tag{25}$$

где C — произвольная константа. Видим, что соотношение (24) характеризует предельный для минимальных порядковых статистик тип распределений.

Замечание. Кроме верхних рекордов $X_1 = X(1) < X(2) < \cdots$, построенных по последовательности с. в. $X_1, X_2, \ldots$, можно также рассмотреть соответствующие нижние рекордные величины $X_1 = x(1) > x(2) > \cdots$. Стандартные приемы, когда от величин $X_1, X_2, \ldots$ можно перейти к величинам $Y_k = -X_k$, $k = 1, 2, \ldots$, и результаты для верхних рекордов после небольших изменений можно легко переформулировать для нижних рекордных величин, позволяют приведенные выше характеризации распределений перенести на случай соответствующих соотношений для нижних рекордов.

Теорема 6. *Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, имеющих общую ф. р. $F(x)$ и плотность распределения $f(x)$. Тогда соотношение*

$$x(1) - a\xi_1 \stackrel{d}{=} x(2) + b\xi_2 \tag{26}$$

для нижних рекордов $x(1) = X_1$ и $x(2)$, в котором справедливы $a \geq 0$, $b \geq 0$ и $a + b > 0$, выполняется тогда и только тогда, когда функция $Q(x)$ (обратная ф. р. $F(x)$) имеет следующий вид:

$$Q(x) = C - b\log(-\log x) + a\log(x), \quad 0 < x < 1, \tag{27}$$

где C — произвольная константа.

Следствие 10. *Если возьмем $a = 1$ и $b = 0$ в равенстве (26), т. е. рассмотрим соотношение*

$$X_1 - \xi_1 \stackrel{d}{=} x(2), \tag{28}$$

из (27) получим

$$Q(x) = C + \log(x), \quad 0 < x < 1,$$

и

$$F(x) = \exp(x - C), \quad x \leq C. \tag{29}$$

В этом случае равенство (28) характеризует отрицательное экспоненциальное (с точностью до параметра сдвига) распределение.

Следствие 11. *Если же возьмем $a = 0$ и $b = 1$ в соотношении (26), т. е. рассмотрим равенство*

$$X_1 \stackrel{d}{=} x(2) + \xi_2, \tag{30}$$

получим

$$Q(x) = C - \log(-\log(x)), \quad 0 < x < 1,$$

и

$$F(x) = \exp(-\exp\{-(x - C)\}), \quad -\infty < x < \infty. \tag{31}$$

В этой ситуации будем иметь двойное экспоненциальное (log-Weibull) распределение — один из трех классических типов асимптотических распределений максимальных порядковых статистик.

4. Доказательство теорем 3 и 4. Докажем справедливость утверждения теоремы 3. Напишем функции распределения случайных величин, фигурирующих в равенстве (9). Видим, что выполняется

$$P(M(1) + a\xi_1 < x) = P(X_1 + a\xi_1 < x) =$$
$$= \frac{1}{a}\int\limits_0^\infty F(x-u)\exp\left\{-\frac{u}{a}\right\}du = \frac{1}{a}\exp\left\{-\frac{x}{a}\right\}\int\limits_{-\infty}^{x} F(v)\exp\left\{\frac{v}{a}\right\}dv \tag{32}$$

и

$$P(M(2) - b\xi_2 < x) = \frac{1}{b}\int\limits_0^\infty F^2(x+u)\exp\left\{-\frac{u}{b}\right\}du =$$
$$= \frac{1}{b}\exp\left\{\frac{x}{b}\right\}\int\limits_x^\infty F^2(v)\exp\left\{-\frac{v}{b}\right\}dv. \tag{33}$$

Таким образом, соотношение (9) выполняется, если справедливо

$$\frac{b}{a}\exp\left\{-x\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right\}\int\limits_{-\infty}^{x}F(v)\exp\left\{\frac{v}{a}\right\}dv=\int\limits_{x}^{\infty}F^2(v)\exp\left\{-\frac{v}{b}\right\}dv. \tag{34}$$

Дифференцируя обе части равенства (34), получаем

$$-\frac{b}{a}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\exp\left\{-x\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right\}\int\limits_{-\infty}^{x}F(v)\exp\left\{\frac{v}{a}\right\}dv+$$
$$+\frac{b}{a}\exp\left\{-x\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right\}F(x)\exp\left\{\frac{x}{a}\right\}=-F^2(x)\exp\left\{-\frac{x}{b}\right\}. \tag{35}$$

Сравнивая соотношения (34) и (35), приходим к равенству

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\int\limits_{x}^{\infty}F^2(v)\exp\left\{-\frac{v}{b}\right\}dv=\frac{b}{a}\exp\left\{-x\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right\}F(x)\exp\left\{\frac{x}{a}\right\}+F^2(x)\exp\left\{-\frac{x}{b}\right\}.$$

После еще одного дифференцирования и упрощения полученных соотношений в итоге имеем

$$F(x)-F^2(x)=f(x)(2aF(x)+b). \tag{36}$$

В ходе этого доказательства требовалось добавочное ограничение на коэффициенты a и b, состоящее в выполнении неравенств $a>0$ и $b>0$. Рассматривая по отдельности более простые исходные равенства при $a=0$, $b>0$ и $b=0$, $a>0$ и проведя соответствующие выкладки, нетрудно убедиться в том, что и в этих ситуациях равенство (36) остается справедливым. Подставляя в (36) вместо x функцию $Q(x)$, получаем, воспользовавшись соотношениями

$$F(Q(x))=x \quad \text{и} \quad f(Q(x))=\frac{1}{Q'(x)},$$

равенство

$$x-x^2=\frac{2ax+b}{Q'(x)},$$

из которого следует

$$Q'(x)=\frac{2a+b}{1-x}+\frac{b}{x}, \quad 0<x<1. \tag{37}$$

Решая простое дифференциальное уравнение (37), приходим к утверждению теоремы 3.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 4. Нам потребуется следующее равенство, в котором

$$F_{1,2}(x)=F^2(x)+2F(x)(1-F(x))=2F(x)-F^2(x)$$

представляет функцию распределения порядковой статистики $X_{1,2}$:

$$P\{X_{1,2}+a\xi_1<x\}=\frac{1}{a}\int\limits_0^{\infty}F_{1,2}(x-u)\exp\left\{-\frac{u}{a}\right\}du=$$

$$=\frac{1}{a}\exp\left\{-\frac{x}{a}\right\}\int\limits_{-\infty}^{x}F(v)\exp\left\{\frac{v}{a}\right\}dv. \quad (38)$$

Приравняв правые части равенств (33) и (38), видим, что соотношение (17) выполняется, если справедливо равенство

$$\frac{b}{a}\exp\left\{-x\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right\}\int\limits_{-\infty}^{x}F_{1,2}(v)\exp\left\{\frac{v}{a}\right\}dv=\int\limits_{x}^{\infty}F^2(v)\exp\left\{-\frac{v}{b}\right\}dv. \quad (39)$$

Используя те же приемы, что и при доказательстве теоремы 3, где вместо ф. р.

$$F_{1,2}(x)=2F(x)-F^2(x)$$

фигурировала ф. р. $F(x)$, вместо соотношения (36) получаем равенство

$$\frac{a+b}{b}F^2(x)=\frac{1}{b}\left(2bF(x)+(a-b)F^2(x)\right)-2bf(x)-2(a-b)f(x)F(x). \quad (40)$$

Подставляя $Q(x)$ в (40) вместо x, приходим в итоге к соотношению

$$x-x^2=\frac{b+(a-b)x}{Q'(x)}.$$

Рассматривая теперь вместо (37) уравнение

$$Q'(x)=\frac{b+(a-b)x}{x-x^2}=\frac{a}{1-x}+\frac{b}{x}, \quad 0<x<1,$$

получаем

$$Q(x)=C+b\log x-a\log(1-x), \quad 0<x<1,$$

где C — произвольная константа. Утверждение теоремы 4 доказано.

Заключение. В работе приведены сравнения семейств распределений, характеризуемых соотношениями, в которых различного рода упорядоченные случайные величины (последовательные максимумы, порядковые статистики, верхние и нижние рекорды) подвергнуты экспоненциальным сдвигам. Используемые методы позволяют получить аналогичные результаты и в более общих ситуациях, когда рассматриваются характеризации распределений соотношениями, в которых участвуют максимальные и минимальные порядковые статистики $X_{1,n}$ и $X_{n,n}$, верхние рекордные величины $X(n)$ и нижние рекорды $x(n)$, не только, когда $n=2$, как в представленных выше теоремах, но и в случае, когда $n>2$. Видим, что даже в рассмотренных в статье простейших ситуациях описанные семейства распределений в большинстве своем выражаются достаточно сложным образом — через функции, обратные функциям распределений. В более общих ситуациях, когда $n>2$, соответствующие семейства распределений далеки от классических и получаемые результаты выглядят слишком экзотическими. Поэтому авторы в данной статье ограничились рассмотрением самых простых ситуаций, позволяющих тем не менее выяснить, каким образом описание семейств распределений, характеризуемых достаточно естественными соотношениями, связывающими порядковые статистики и рекорды, меняется при переходе от одних типов упорядоченных случайных величин к другим.

Литература

1. *Ahsanullah M., Berred A., Nevzorov V. B.* On characterizations of the exponential distributions // J. Applied Statistical Science. 2011. Vol. 19, N 1. P. 37–42.

2. *Ahsanullah M., Nevzorov V. B., Nevzorova L. N.* Characterizations of distributions via record values with random exponential shifts // J. Statistical Theory and Application. 2014. Vol. 13, N 4. P. 311–316.

3. *Ahsanullah M., Nevzorov V. B., Nevzorova L. N.* Characterizations of distributions via record values with random exponential shifts. II // J. Applied Statistical Science. 2015. Vol. 21, N 2. P. 169–177.

4. *Ahsanullah M., Nevzorov V. B., Yanev G. P.* Characterizations of distributions via order statistics with random exponential shifts // J. Applied Statistical Science. 2011. Vol. 18, N 3. P. 1–8.

5. *George E. O., Mudholkar G. S.* Some relationships between the logistic and the exponential distributions // Statistical Distributions in Scientific Work / eds C. Tallie et al. Reidel, Dordrecht. 1981. Vol. 4. P. 401–409.

6. *Lin G. D., Hu C.-Y.* On characterizations of the logistic distribution // J. Statistical Planning and Inference. 2008. Vol. 138. P. 1147–1156.

7. *Зыков В. О., Невзоров В. Б.* О некоторых характеризациях семейств распределений, включающих логистическое или экспоненциальное, свойствами порядковых статистик // Записки научных семинаров ПОМИ. 2010. Т. 384. С. 176–181.

Статья поступила в редколлегию 13 декабря 2015 г.

Сведения об авторах

Ананьевский Сергей Михайлович — кандидат физико-математических наук, доцент; ananjevskii@mail.ru

Невзоров Валерий Борисович — доктор физико-математических наук, профессор; probabil@pisem.net

ON FAMILIES OF DISTRIBUTIONS WHICH ARE CHARACTERIZED BY SOME PROPERTIES OF ORDERED RANDOM VARIABLES

Sergey M. Ananjevskii, Valery B. Nevzorov

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; ananjevskii@mail.ru, probabil@pisem.net

New characterizations of some probability distributions by relations for different ordered random variables are obtained. Such variables include order statistics and sequential maxima. These relations also include upper record values as well as lower records. All ordered random objects are based on sequences of independent random variables having a common continuous distribution function. Equalities in distribution for sequential maxima exposed by different random shifts are investigated. These shifts (one-sided or two-sided) have exponential distributions. Some theorems and consequences are suggested in which the corresponding characterizations of distributions by such kind of relations are presented. The simple properties of exponentially shifted order statistics, which characterize certain probability distributions, also are under consideration.

All presented here results give a lot of characterizations of different distributions. As the partial cases of these results one can find relations, which characterize the families of the classical exponential and logistic distributions. Refs 7.

Keywords: order statistics, sequential maxima, record values, characterizations of probability distributions, exponential distribution, logistic distribution.

References

1. Ahsanullah M., Berred A., Nevzorov V. B., “On characterizations of the exponential distributions”, *J. Applied Statistical Science* **19**(1), 37–42 (2011).

2. Ahsanullah M., Nevzorov V. B., Nevzorova L. N., “Characterizations of distributions via record values with random exponential shifts”, *J. Statistical Theory and Application* **13**(4), 311–316 (2014).

3. Ahsanullah M., Nevzorov V. B., Nevzorova L. N., “Characterizations of distributions via record values with random exponential shifts. II”, *J. Applied Statistical Science* **21**(2), 169–177 (2015).

4. Ahsanullah M., Nevzorov V. B., Yanev G. P., “Characterizations of distributions via order statistics with random exponential shifts”, *J. Applied Statistical Science* **18**(3), 1–8 (2011).

5. George E. O., Mudholkar G. S., “Some relationships between the logistic and the exponential distributions”, *Statistical Distributions in Scientific Work* **4**, 401–409 (Eds C. Tallie et al., Reidel, Dordrecht, 1981).

6. Lin G. D., Hu C.-Y., “On characterizations of the logistic distribution”, *J. Statistical Planning and Inference* **138**, 1147–1156 (2008).

7. Zykov V. O., Nevzorov V. B., “On some characterizations of families of distributions, including logistic or exponential, by properties of order statistics”, *Notes of Sci. Semin. POMI* **384**, 176–181 (2010) [in Russian].

Для цитирования: Ананьевский С. М., Невзоров В. Б. О семействах распределений, характеризуемых некоторыми свойствами упорядоченных случайных величин // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2016. Т. 3 (61). Вып. 3. С. 345–354. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.301

For citation: Ananjevskii S. M., Nevzorov V. B. On families of distributions which are characterized by some properties of ordered random variables. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2016, vol. 3 (61), issue 3, pp. 345–354. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.301