УДК 517.925 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 3 (61). 2016. Вып. 3

О НАХОЖДЕНИИ ОБОБЩЕННЫХ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ СИСТЕМ С ГАМИЛЬТОНОВОЙ НЕВОЗМУЩЕННОЙ ЧАСТЬЮ МЕТОДОМ БЕЛИЦКОГО

А. С. Ваганян

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Данная работа является продолжением совместной с В. В. Басовым статьи, посвященной нахождению структур обобщенных нормальных форм двумерных автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с гамильтоновой невозмущенной частью и негамильтоновым возмущением. В предлагаемой статье рассматривается случай систем четырех и более уравнений с гамильтоновой квазиоднородной невозмущенной частью, порожденной гамильтонианом вида $H = \sum_{i=1}^{n} H_i(x_i, y_i)$. При помощи специального разбиения возмущения, аналогичного разбиению А. Байдера и Я. Сандерса на гамильтоновы и негамильтоновы составляющие в двумерном случае, мы сводим задачу о нахождении обобщенной нормальной формы такой системы к вопросу о нормальной форме степенных рядов. Нормализация степенного ряда была ранее подробно изучена Г. Р. Белицким. Мы используем метод Г. Р. Белицкого и развиваем его идеи, вводя определения гамильтоновых резонансного и усеченного резонансного наборов, и в этих терминах формулируем теорему о нормализации. Как следствие теоремы мы приводим обобщение на случай произвольного количества жордановых клеток результата Такенса о нормальной форме системы с нильпотентной линейной частью. В частности, для $n = 2$ мы получаем в явном виде одну из обобщенных нормальных форм по В. В. Басову для системы четырех уравнений с невозмущенной частью $(y_1, 0, y_2, 0)$. Библиогр. 7 назв.

Ключевые слова: нормальные формы, метод Белицкого, нормальная форма Такенса.

1. Введение. В настоящей работе продолжено исследование вопросов локальной классификации систем обыкновенных дифференциальных уравнений с гамильтоновой невозмущенной частью в окрестности неэлементарной особой точки, начатое автором в совместной с Басовым статье [1]. В терминологии, принятой в работах Басова (см., напр., [2]), объекты этой классификации, т. е. наиболее простые в некотором смысле системы, к которым можно прийти при помощи группы обратимых формальных преобразований, называются обобщенными нормальными формами.

Речь пойдет об автономных системах $2n$ уравнений вида

$$\dot{x}_i = -\frac{\partial H}{\partial y_i} + X_i, \qquad \dot{y}_i = \frac{\partial H}{\partial x_i} + Y_i, \tag{1}$$

где гамильтониан невозмущенной системы представляет собой квазиоднородный полином обобщенной степени χ с весом γ вида

$$H = \sum_{i=1}^{n} H_i(x_i, y_i), \tag{2}$$

возмущение начинается с членов более высоких обобщенных степеней. От γ, в свою очередь, потребуем, чтобы выполнялось

$$\gamma_1 + \gamma_{n+1} = \dots = \gamma_n + \gamma_{2n} = \sigma \le \chi.$$

 DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.303

Данное условие означает, что скобка Пуассона квазиоднородных полиномов квазиоднородна, а следовательно квазиоднороден и оператор $\widehat{H} = \{H, \cdot\}$.

Как показывают исследования Басова и др., обобщенные нормальные формы таких систем выделяются из общей классификации. В то же время они представляют большой практический интерес.

2. Резонансное уравнение и резонансные наборы. Обозначим для удобства $z_i = x_i$ и $z_{n+i} = y_i$.

Следуя Белицкому (см. [3]), определим на $\mathbb{R}[z]$ скалярное произведение

$$\langle P, Q\rangle = P(\partial)Q(z)|_{z=0}, \qquad \partial = \Big(\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_{2n}}\Big),$$

и рассмотрим уравнение

$$\widehat{H}^*(P) = 0, \quad \widehat{H}^* = \sum_{i=1}^n y_i\Big(\frac{\partial H}{\partial x_i}\Big)(\partial) - x_i\Big(\frac{\partial H}{\partial y_i}\Big)(\partial),$$

которое будем называть *резонансным уравнением* для квазиоднородного гамильтониана H, а его полиномиальные решения — *резонансными полиномами*.

Обозначим линейное пространство резонансных полиномов через $\mathfrak{R}$. Из квазиоднородности гамильтониана H следует, что $\mathfrak{R}$ разбивается в прямую сумму ортогональных подпространств $\mathfrak{R}_\gamma^{[k]}$ квазиоднородных резонансных полиномов обобщенной степени k.

Определение 1. Будем говорить, что множество квазиоднородных полиномов $S_{\gamma,j}^{[k]}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $j = 1, \dots, \dim \mathfrak{R}_\gamma^{[k]}$, образует *гамильтонов резонансный набор*, если для каждого k и произвольного базиса $R_{\gamma,i}^{[k]}$ пространства $\mathfrak{R}_\gamma^{[k]}$ матрица скалярных произведений $\langle R_{\gamma,i}^{[k]}, S_{\gamma,j}^{[k]}\rangle$ невырождена.

Обозначим через $\mathfrak{H}$ алгебру рядов, порожденную полиномиальными корнями из H_i, и положим

$$\mathfrak{R}_l = \begin{cases} \mathfrak{R}, & \text{если } \chi = \sigma, \\ \{P \in \mathfrak{R}: \ \langle P, Q\rangle = 0, \ \forall Q \in H_l\mathfrak{H}\}, & \text{если } \chi > \sigma. \end{cases}$$

Линейные пространства $\mathfrak{R}_l$, как и $\mathfrak{R}$, разбиваются в прямую сумму ортогональных линейных подпространств $\mathfrak{R}_{\gamma,l}^{[k]} \subset \mathbb{R}_\gamma^{[k]}[z]$.

Определение 2. Будем говорить, что множество квазиоднородных полиномов $S_{\gamma,l,j}^{[k]}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $j = 1, \dots, \dim \mathfrak{R}_{\gamma,l}^{[k]}$, образует *$l$-й усеченный гамильтонов резонансный набор*, если для каждого k и произвольного базиса $R_{\gamma,l,i}^{[k]}$ пространства $\mathfrak{R}_{\gamma,l}^{[k]}$ матрица скалярных произведений $\langle R_{\gamma,l,i}^{[k]}, S_{\gamma,l,j}^{[k]}\rangle$ невырождена.

Лемма [4, лемма 1]**.** *Произвольный векторный ряд $\mathcal{Z} = \sum_{i=1}^n X_i\partial/\partial x_i + Y_i\partial/\partial y_i$ может быть единственным образом представлен в виде*

$$\mathcal{Z} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_i} - \frac{\partial F_i}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial x_i} + G_i\mathcal{E}_{\gamma,i}, \quad \mathcal{E}_{\gamma,i} = \gamma_i x_i\frac{\partial}{\partial x_i} + \gamma_{n+i}y_i\frac{\partial}{\partial y_i}.$$

Теорема [4, теорема 1]. *Пусть* $\mathfrak{S}_i$ *и* $\mathfrak{T}_i$, $i = 1, \ldots, n$, *— произвольно выбранные гамильтоновы мономиальные резонансные и* i*-е усеченные резонансные наборы для* H*. Тогда существует формальное почти тождественное преобразование, приводящее возмущение системы* (1) *к виду*

$$\widetilde{\mathcal{Z}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \widetilde{F}_i}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_i} - \frac{\partial \widetilde{F}_i}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial x_i} + \widetilde{G}_i \mathcal{E}_{\gamma,i},$$

в котором каждое квазиоднородное слагаемое ряда $\widetilde{F}_i$ *является линейной комбинацией элементов* $\mathfrak{T}_i$*, а каждое квазиоднородное слагаемое ряда* $\widetilde{G}_i$ *является линейной комбинацией элементов* $\mathfrak{S}_i$*.*

Доказательства этих утверждений можно найти в работе [4]. Отметим, что условие (2) на гамильтониан H существенно. Оно и позволяет применить для нормализации разложение из леммы. В теории нормальных форм подобное разбиение было впервые применено Байдером и Сандерсом в работе [5] для классификации систем двух уравнений с нильпотентной невозмущенной частью.

С точки зрения определения, предложенного Басовым в работе [2], структура возмущения, описанная в теореме, еще не является обобщенной нормальной формой, т. к. определена не в стандартном базисе пространства вектор-полиномов. Тем не менее возмущение в теореме приводится к ней при помощи несложных преобразований. В частности, для всех i всегда можно обнулить любую из двух ненулевых компонент вектора $\mathcal{E}_{\gamma,i}$. Для случая двух уравнений алгоритм такой «донормализации» подробно описан в работе [1].

3. Многомерная нормальная форма Такенса. Рассмотрим систему $2n$ уравнений вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= y_i + X_i, \\ \dot{y}_i &= Y_i \end{aligned} \tag{3}$$

с невозмущенной частью, порожденной гамильтонианом $H = -y^2/2$.

Соответствующая алгебра $\mathfrak{H} = \mathbb{R}[[y]]$ состоит из нерезонансных полиномов. Таким образом, линейные пространства $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}_i$ совпадают вне зависимости от того, считаем ли мы гамильтониан H однородным или квазиоднородным, и имеют вид

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_i = \mathbb{R}[x, M], \quad M = \{M_{ij} = x_i y_j - x_j y_i : \ 1 \le i < j \le n\}.$$

Согласно [7, теорема 9], полиномы вида $x^\alpha M^\beta$, не содержащие произведений $x_i M_{jk}$ с $i < j < k$ и $M_{ij} M_{kl}$ с $i < j < k < l$, образуют базис пространства $\mathfrak{R}$. Следовательно, в условиях теоремы наборы $\mathfrak{S}_i$ и $\mathfrak{T}_i$ можно выбрать не зависящими от y_i.

Следствие [4, теорема 2]. *Система* (3) *формально эквивалентна системе вида*

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= y_i, \\ \dot{y}_i &= f_i + y_i g_i, \end{aligned}$$

где ряды f_i, g_i *не зависят от* y_i*.*

Формула из следствия естественным образом обобщает нормальную форму Такенса (см. [6, proposition 2.2]) и совпадает с ней, если $n = 1$.

Пример. Пусть $n = 2$. В этом случае гамильтоновы резонансные наборы $\mathfrak{S}_i$ и $\mathfrak{T}_i$ определяются условиями из формулировки следствия однозначно и состоят из мономов $x_1^{p_1} x_2^{p_2} y_2^{q_2}$, $p_1 \geq q_2$, для $i = 1$ и $x_1^{p_1} x_2^{p_2} y_1^{q_1}$, $p_2 \geq q_1$, для $i = 2$. Соответствующая обобщенная нормальная форма имеет вид

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= y_1, \\
\dot{y}_1 &= \sum_{p_1+1 \geq q_2} Y_1^{(p_1,p_2,0,q_2)} x_1^{p_1} x_2^{p_2} y_2^{q_2} + y_1 \sum_{p_1 \geq q_2} Y_1^{(p_1,p_2,1,q_2)} x_1^{p_1} x_2^{p_2} y_2^{q_2}, \\
\dot{x}_2 &= y_2, \\
\dot{y}_2 &= \sum_{p_2+1 \geq q_1} Y_2^{(p_1,p_2,q_1,0)} x_1^{p_1} x_2^{p_2} y_1^{q_1} + y_2 \sum_{p_2 \geq q_1} Y_2^{(p_1,p_2,q_1,1)} x_1^{p_1} x_2^{p_2} y_1^{q_1}.
\end{aligned}$$

Литература

1. *Басов В. В., Ваганян А. С.* Обобщенные нормальные формы двумерных систем с гамильтоновой невозмущенной частью // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. Сер. 1. 2014. Т. 1(59), вып. 3. С. 351–359.

2. *Басов В. В.* Обобщенная нормальная форма и формальная эквивалентность систем дифференциальных уравнений с нулевыми характеристическими числами // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 2. С. 154–170.

3. *Белицкий Г. Р.* Инвариантные нормальные формы формальных рядов // Функциональный анализ и его приложения. 1979. Т. 13, № 1. С. 59–60.

4. *Ваганян А. С.* Обобщенные нормальные формы систем с гамильтоновой невозмущенной частью // Дифференц. уравнения и процессы управления (Эл. журнал). 2015. № 4. С. 66–83. URL: http://www.math.spbu.ru/diffjournal/pdf/vaganyan.pdf (дата обращения: 05.06.2016).

5. *Baider A., Sanders J.* Further reduction of the Takens—Bogdanov normal form // Journal of Differential Equations. 1992. Vol. 99, N 2. P. 205–244.

6. *Takens F.* Singularities of vector fields // IHES. 1974. Vol. 43, N 2. P. 47–100.

7. *Malonza D.* Normal forms for coupled Takens—Bogdanov systems // Journal of Nonlinear Mathematical Physics. 2004. Vol. 11, N 3. P. 376–398.

Статья поступила в редколлегию 22 декабря 2015 г.

Сведения об авторе

Ваганян Артур Суренович — аспирант; armay@yandex.ru

ON FINDING GENERALIZED NORMAL FORMS OF SYSTEMS WITH A HAMILTONIAN UNPERTURBED PART USING THE BELITSKII METHOD

Artur S. Vaganyan

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; armay@yandex.ru

This work continues an article written in collaboration with V. V. Basov about finding the structures of generalized normal forms of two-dimensional autonomous systems of ordinary differential equations with a Hamiltonian unperturbed part and non-Hamiltonian perturbation. In this article we consider the case of systems of four and more equations with a Hamiltonian quasi-homogeneous unperturbed part generated by the Hamiltonian of the form $H = \sum_{i=1}^{n} H_i(x_i, y_i)$. By means of a special decomposition of the perturbation similar to splitting into Hamiltonian and non-Hamiltonian components that was used by A. Baider and J. Sanders in two-dimensional case, we reduce the problem of finding the generalized normal form for such a system to the question about the normal form of power series. Normalization of a power series was studied earlier by G. R. Belitskii. We use the method of G. R. Belitskii and develop his ideas by introducing the notions of Hamiltonian resonant and reduced resonant sets, and in these terms formulate the normalization theorem. As a consequence of the theorem we give a generalization of the result due to

Takens on the normal form of a system with a nilpotent linear part to the case of an arbitrary number of Jordan blocks. In particular, for $n = 2$ we find explicitly one of the generalized normal forms in the sense of V. V. Basov for a system of four equations with an unperturbed part $(y_1, 0, y_2, 0)$. Refs 7.

Keywords: normal forms, Belitskii method, Takens normal form.

References

1. Basov V. V., Vaganyan A. S., "Generalized normal forms of two-dimensional autonomous systems with a Hamiltonian unperturbed part", *Vestnik of St. Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **1(59)**, issue 3, 351–359 (2014) [in Russian].

2. Basov V. V., "A generalized normal form and formal equivalence of systems of differential equations with zero characteristic numbers", *Differentsial'nye uravneniya* **39**(2), 154–170 (2003) [in Russian].

3. Belitskii G. R., "Invariant normal forms of formal series", *Funktsional'nyi Analiz i Ego Prilozheniya* **13**(1), 59–60 (1979) [in Russian].

4. Vaganyan A. S., "Generalized normal forms of systems with a Hamiltonian unperturbed part", *Differencial'nie uravnenia i processy upravlenia* (4), 66–83 (2015) [in Russian]. Available at: http://www.math.spbu.ru/diffjournal/pdf/vaganyan.pdf (accessed 05.06.2016).

5. Baider A., Sanders J., "Further reduction of the Takens—Bogdanov normal form", *Journal of Differential Equations* **99**(2), 205–244 (1992).

6. Takens F., "Singularities of vector fields", *IHES* **43**(2), 47–100 (1974).

7. Malonza D., "Normal forms for coupled Takens—Bogdanov systems", *Journal of Nonlinear Mathematical Physics* **11**(3), 376–398 (2004).

Для цитирования: Ваганян А. С. О нахождении обобщенных нормальных форм систем с гамильтоновой невозмущенной частью методом Белицкого // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2016. Т. 3 (61). Вып. 3. С. 372–376. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.303

For citation: Vaganyan A. S. On finding generalized normal forms of systems with a Hamiltonian unperturbed part using the Belitskii method. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2016, vol. 3 (61), issue 3, pp. 372–376. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.303