УДК 517.938 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 3 (61). 2016. Вып. 3

# РАСШИРЕННЫЙ КЛАСС СТАБИЛИЗИРУЕМЫХ НЕОПРЕДЕЛЁННЫХ СИСТЕМ*

*И. Е. Зубер, Т. В. Волошинова, А. Х. Гелиг*

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Рассматривается система уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(\cdot)x + B(\cdot)u,$$
$$u = S^*(\cdot)x,$$

где $A(\cdot) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B(\cdot) \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $S(\cdot) \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Элементы матриц $A(\cdot)$, $B(\cdot)$, $S(\cdot)$ равномерно ограничены и являются функционалами произвольной природы. Предполагается, что выше главной диагонали матрицы $A(\cdot)$ имеется $k$ знакоопределённых элементов $\alpha_{i_l j_l}(\cdot)$ ($l \in \overline{1,k}$), каждый из которых является единственным значимым элементом в своей строке и своём столбце. Остальные элементы, стоящие выше главной диагонали, достаточно малы. Предполагается, что выполняется $m = n - k$, и элементы $\beta_{ij}(\cdot)$ матрицы $B(\cdot)$ обладают свойством

$$\inf_{(\cdot)} |\beta_{i_s s}(\cdot)| = \beta_0 > 0 \text{ при } i_s \in \overline{1,n} \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}.$$

Остальные элементы матрицы $B(\cdot)$ нулевые.

Строится положительно определённая матрица $H = \{h_{ij}\}$ следующего вида. На главной диагонали стоят положительные числа $h_{ii} = h_i$, $h_{i_l j_l} = h_{j_l i_l} = -0,5\sqrt{h_{i_l} h_{j_l}}\, \operatorname{sign} \alpha_{i_l j_l}(\cdot)$. Остальные элементы матрицы $H$ — нулевые. С помощью анализа производной от функции Ляпунова $V(x) = x^* H^{-1} x$ определяются такие $h_i$ ($i \in \overline{1,n}$) и $\lambda_i \leqslant 0$ ($i \in \overline{1,n}$), что при

$$S(\cdot) = H^{-1}\Lambda B(\cdot), \quad \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

система рассматриваемых уравнений становится глобально экспоненциально устойчивой. Управление $u$ робастно по отношению к элементам матрицы $A(\cdot)$. Библиогр. 4 назв.

*Ключевые слова*: неопределённые системы, стабилизация, глобальная экспоненциальная устойчивость.

**1. Введение.** В большинстве работ по стабилизации неопределённых систем предполагается, что неопределёнными являются вариации известных элементов матрицы объекта управления. В работах [1–4] неопределёнными считаются сами элементы. При этом в [1–3] предполагается, что элементы первой наддиагонали являются знакоопределёнными. В [4] знакоопределёнными допускаются элементы, расположенные на верхней части любой наддиагонали. В предлагаемой работе знакоопределённые элементы разбросаны хаотично выше главной диагонали.

**2. Формулировка результата.** Рассматривается система

$$\frac{dx}{dt} = A(\cdot)x + B(\cdot)u, \tag{1}$$

$$u = S^*(\cdot)x, \tag{2}$$

где $A(\cdot) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B(\cdot) \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $S(\cdot) \in \mathbb{R}^{n\times m}$, * — знак транспонирования (все величины вещественные). Решается задача построения матрицы $S(\cdot)$, при которой эта система глобально экспоненциально устойчива. Элементы матриц $A(\cdot)$, $B(\cdot)$, $S(\cdot)$ являются неупреждающими функционалами произвольной природы. Например, они могут

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-01-00107) и СПбГУ (тема 6.38.230.2015).



 DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.307

быть функциями от $t$, $x(t)$, $x(t-\tau)$, $\int_0^t |x(\lambda)|^2 d\lambda$ и т. п. Элементы $\alpha_{ij}(\cdot)$ матрицы $A(\cdot)$, стоящие на главной диагонали и ниже неё, равномерно ограничены:

$$\sup_{(\cdot)} |\alpha_{ij}(\cdot)| = \alpha_+ < \infty, \quad i \in \overline{1,n}; \quad j \in \overline{1,i}. \tag{3}$$

Знакоопределённый элемент будем называть *изолированным*, если в строке и столбце, на пересечении которых он расположен, нет других знакоопределённых элементов. Предполагается, что выше главной диагонали матрицы $A(\cdot)$ имеется $k$ изолированных знакоопределённых равномерно ограниченных элементов $\alpha_{i_l j_l}(\cdot)$, удовлетворяющих условию

$$\inf_{(\cdot)} |\alpha_{i_l j_l}(\cdot)| = \alpha_- > 0 \quad (l \in \overline{1,k}). \tag{4}$$

Назовём набор изолированных знакоопределённых элементов *полным*, если к нему невозможно добавить ещё один изолированный знакоопределённый элемент. Обозначим через $k$ количество изолированных знакоопределённых элементов, входящих в полный набор. Очевидно, что максимальное значение $k$ равно $n-1$, когда вся первая наддиагональ состоит из знакоопределённых элементов, т. е. имеет место аналог матрицы Фробениуса. Можно показать, что минимальный полный набор состоит из элементов, заполняющих верхнюю часть второй диагонали. При этом $k = [n/2]$. Как будет показано ниже, число стабилизирующих управлений $m$ равно $n-k$, где $k$ — количество изолированных знакоопределённых элементов. Поэтому, если в системе число изолированных знакоопределённых элементов меньше $[n/2]$, можно уменьшить количество стабилизирующих управлений, добавив изолированные знакоопределённые элементы.

Обозначим через $G_k$ множество имеющихся в системе изолированных знакоопределённых элементов. Предполагается, что остальные элементы, стоящие выше главной диагонали, достаточно малы:

$$\sup_{(\cdot)} |\alpha_{ij}(\cdot)| < \delta \quad \text{при} \quad \alpha_{ij}(\cdot) \notin G_k, \quad i \in \overline{1,n}; \quad j \in \overline{i+1,n}. \tag{5}$$

Предполагается также, что $m = n-k$ и элементы $\beta_{ij}(\cdot)$ матрицы $B(\cdot)$ обладают свойством

$$\inf_{(\cdot)} |\beta_{i_s,s}(\cdot)| = \beta_0 > 0 \tag{6}$$

при $i_s \in \overline{1,n} \backslash \{i_1, \cdot, i_k\}$, остальные элементы матрицы $B(\cdot)$ нулевые.

Синтез стабилизирующего управления основан на построении функции Ляпунова

$$V(x) = x^* H^{-1} x \tag{7}$$

с положительно определённой матрицей $H$ следующей структуры. На главной диагонали стоят положительные числа $h_1, \ldots, h_n$. Элементы матрицы $H$, индексы которых совпадают с индексами элементов из множества $G_k$, а также симметричные им по отношению к главной диагонали, имеют вид

$$h_{i_l j_l} = h_{j_l i_l} = -0,5\sqrt{h_{i_l} h_{j_l}}\, \operatorname{sign} \alpha_{i_l j_l}(\cdot). \tag{8}$$

Остальные элементы матрицы $H$ равны нулю.

Задача заключается в определении элементов $h_i$ $(i \in \overline{1,n})$ и матрицы $S(\cdot)$, при которых производная по времени от функции (7), взятая в силу системы (1), (2), обладает свойством

$$\frac{dV}{dt} < -\alpha x^* H^{-2} x \quad \text{при} \quad x \neq 0, \quad \alpha > 0, \tag{9}$$

откуда следует глобальная экспоненциальная устойчивость рассматриваемой системы.

Неравенство (9) равносильно матричному неравенству

$$A^*(\cdot)H^{-1} + H^{-1}A(\cdot) + S(\cdot)B^*(\cdot)H^{-1} + H^{-1}B(\cdot)S^*(\cdot) + \alpha H^{-2} < 0,$$

которое после умножения слева и справа на $H$ принимает вид

$$HA^*(\cdot) + A(\cdot)H + HS(\cdot)B^* + B(\cdot)S^*(\cdot)H + \alpha I < 0,$$

где $I$ — единичная матрица $n \times n$. Полагая в нём

$$S(\cdot) = H^{-1}\Lambda B(\cdot), \tag{10}$$

где $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, приходим к неравенству

$$HA^*(\cdot) + A(\cdot)H + \Lambda B(\cdot)B^*(\cdot) + B(\cdot)B^*(\cdot)\Lambda + \alpha I < 0. \tag{11}$$

Представим матрицу $A(\cdot)$ в виде $A(\cdot) = A_1(\cdot) + A_2(\cdot)$, где $A_1(\cdot)$ получается из $A(\cdot)$ обнулением всех элементов, стоящих правее главной диагонали и не принадлежащих множеству $G_k$. Неравенство (11) принимает следующий вид:

$$Q_1(\cdot) + Q_2(\cdot) < 0,$$

где использованы обозначения

$$Q_1(\cdot) = HA_1^*(\cdot) + A_1(\cdot)H + \Lambda B(\cdot)B^*(\cdot) + B(\cdot)B^*(\cdot)\Lambda + 2\alpha I,$$

$$Q_2(\cdot) = HA_2^*(\cdot) + A_2(\cdot)H - \alpha I.$$

Определим элементы матрицы $H$ и числа $\lambda_i$ $(i \in \overline{1,n})$ таким образом, чтобы выполнялось свойство

$$Q_1(\cdot) < 0. \tag{12}$$

Желая воспользоваться критерием Сильвестра, рассмотрим последовательно главные диагональные миноры $\Delta_i(\cdot)$ $(i \in \overline{1,n})$ матрицы $Q_1(\cdot)$, отсчитываемые сверху. Если в первой строке матрицы $Q_1(\cdot)$ нет элементов из множества $G_k$, будем иметь

$$\Delta_1(\cdot) = 2\left(h_1\alpha_{11}(\cdot) + \lambda_1\beta_{11}^2(\cdot) + \alpha\right).$$

Ввиду свойств (3) и (6) получим неравенство $\Delta_1(\cdot) < 0$, если выполняется $\lambda_1 < -(h_1\alpha_+ + \alpha)/\beta_0^2$. Если в первой строке есть элемент $\alpha_{1s}(\cdot) \in G_k$, будем иметь

$$\Delta_1(\cdot) = 2\left(h_1\alpha_{11}(\cdot) + h_{1s}\alpha_{1s}(\cdot) + \alpha\right).$$

Ввиду свойств (4) и (8) получим $\Delta_1(\cdot) < 0$, если справедливо неравенство $\sqrt{h_s} > (h_1\alpha_+ + \alpha)/0{,}5\sqrt{h_1}\alpha_-$. Предположим, что выполняется $\operatorname{sign}\Delta_s(\cdot) = (-1)^s$ при $s \leqslant p$. Представим $\Delta_{p+1}(\cdot)$ в следующем виде:

$$\Delta_{p+1}(\cdot) = \begin{vmatrix} M_p(\cdot) & q_p(\cdot) \\ q_p^*(\cdot) & æ_p(\cdot) \end{vmatrix},$$

где $M_p(\cdot)$ — матрица минора $\Delta_p(\cdot)$. Предположим, что в $(p+1)$-й строке матрицы $A_1(\cdot)$ нет элементов из $G_k$. Тогда $æ_p(\cdot)$ имеет следующий вид:

$$æ_p(\cdot) = 2\lambda_{p+1}\beta^2_{p+1,p+1}(\cdot) + \widetilde{æ}_p(\cdot),$$

где $\widetilde{æ}_p(\cdot)$, $q_p(\cdot)$, $M_p(\cdot)$ не зависят от $\lambda_{p+1}$. По лемме Шура имеем

$$\Delta_{p+1}(\cdot) = \Delta_p(\cdot)\Big(2\lambda_{p+1}\beta^2_{p+1,p+1}(\cdot) + \widetilde{æ}_p(\cdot) - q_1^*(\cdot)M_p^{-1}(\cdot)q_p(\cdot)\Big).$$

В силу свойства (4) найдётся такое $\lambda_{p+1} < 0$, что выражение, стоящее в круглых скобках, отрицательно и, следовательно, выполняется $\Delta_{p+1}(\cdot)\Delta_p(\cdot) < 0$.

Пусть теперь в $(p+1)$-й строке матрицы $A_1(\cdot)$ есть элемент $\alpha_{p+1,s}(\cdot) \in G_k$. Тогда справедливо представление

$$æ_p(\cdot) = 2\alpha_{p+1,s}(\cdot)h_{p+1,s} + \widetilde{\widetilde{æ}}_p(\cdot),$$

в котором $\widetilde{\widetilde{æ}}_p(\cdot)$ не зависит от $\alpha_{p+1,s}(\cdot)$ и $h_{p+1,s}$. В силу (8) получаем

$$h_{p+1,s} = -0,5\sqrt{h_{p+1}h_s}\operatorname{sign}\alpha_{p+1,s}(\cdot),$$

и поэтому справедливо $æ_p(\cdot) < 0$ при достаточно большом $h_s$. По лемме Шура имеем $\Delta_{p+1}(\cdot)\Delta_p(\cdot) < 0$. Таким образом, неравенство (12) установлено.

Убедимся теперь, что при достаточно малом $\delta$ имеет место свойство

$$Q_2(\cdot) < 0. \tag{13}$$

Согласно неравенству Рэлея для выполнения неравенства (13) достаточно, чтобы собственные числа матрицы $M(\cdot)$ удовлетворяли оценке

$$\max_i \lambda_i(M(\cdot)) < \alpha, \tag{14}$$

где $M(\cdot) = HA_2^*(\cdot) + A_2(\cdot)H$. Ввиду симметрии матрицы $M(\cdot)$ имеем

$$\max_i \lambda_i(M(\cdot)) = \|M(\cdot)\|,$$

где $\|M(\cdot)\|$ — спектральная норма матрицы $M(\cdot)$. Поскольку справедливы соотношения

$$\|M(\cdot)\| \leqslant 2\|H\|\|A_2(\cdot)\| \leqslant 2\lambda_{\max}|A_2(\cdot)| = 2\lambda_{\max}\delta\sqrt{0,5(n-1)^2 - k},$$

где $\lambda_{\max}$ — максимальное собственное число матрицы $H$, неравенство (14) выполняется при

$$\delta < \frac{\alpha}{2\lambda_{\max}\sqrt{0,5(n-1)^2-k}}. \tag{15}$$

Сформулируем полученный результат.

**Теорема.** *Если выполнены условия (3)–(6), (15), существуют такие числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, что система (1), (2), (10) глобально экспоненциально устойчива.*

**Замечание.** Если коэффициенты зависят от фазовых координат и оценки (3)–(6), (15) выполняются лишь при $|x| < R$, из этой теоремы и неравенства Рэлея следует, что система (1), (2), (10) будет экспоненциально устойчива «в большом», т. е. при начальных условиях, удовлетворяющих неравенству

$$x^*(t_0)H^{-1}x(t_0) < \lambda_{\max}R^2,$$

траектории при $t \to +\infty$ будут экспоненциально стремиться к устойчивому по Ляпунову состоянию равновесия $x = 0$.

**Пример.** Рассмотрим следующую матрицу объекта управления с четырьмя изолированными знакоопределенными элементами:

$$A(\cdot) = \begin{Vmatrix} \alpha_{11}(\cdot) & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21}(\cdot) & \alpha_{22}(\cdot) & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha_{31}(\cdot) & \alpha_{32}(\cdot) & \alpha_{33}(\cdot) & 1 & 0 & 0 \\ \alpha_{41}(\cdot) & \alpha_{42}(\cdot) & \alpha_{43}(\cdot) & \alpha_{44}(\cdot) & 0 & 1 \\ \alpha_{51}(\cdot) & \alpha_{52}(\cdot) & \alpha_{53}(\cdot) & \alpha_{54}(\cdot) & \alpha_{55}(\cdot) & 0 \\ \alpha_{61}(\cdot) & \alpha_{62}(\cdot) & \alpha_{63}(\cdot) & \alpha_{64}(\cdot) & \alpha_{65}(\cdot) & \alpha_{66}(\cdot) \end{Vmatrix}.$$

Согласно теореме, для стабилизации системы с такой матрицей объекта матрица $B(\cdot)$ должна иметь следующий вид:

$$B(\cdot) = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \beta_{51}(\cdot) & 0 \\ 0 & \beta_{62}(\cdot) \end{Vmatrix},$$

при этом должны выполняться соотношения

$$\lambda_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad \lambda_5 \ll -1, \quad \lambda_6 \ll -1.$$

### Литература

1. *Li J., Qian Ch., Ding Sh.* Global finite-time stabilization by output feedback for a class of uncertain nonlinear systems // International Journal of Control. 2010. Vol. 83, N 11. P. 2241–2252.

2. *Liu L., Huang J.* Global robust output regulation of output feedback systems with unknown high-frequence gain sign // IEEE Trans. Autom. Control. 2006. Vol. 51, N 4. P. 625–631.

3. *Zhai J., Li W., Fei Sh.* Global output feedback stabilization for a class of uncertain non-linear systems // IET Control Theory Appl. 2013. Vol. 7. Issue 2. P. 305–313.

4. *Zakharenkov M., Zuber I., Gelig A.* Stabilization of a New Classes of Uncertain Systems // IFAC Proceedings Volumes (IFAC-Papers Online). 2015. Vol. 48, N 11. P. 1034–1037.

Статья поступила в редколлегию 21 января 2016 г.

Сведения об авторах

*Зубер Ирина Ефремовна* — ведущий научный сотрудник; zuber.yanikum@gmail.com

*Волошинова Татьяна Викторовна* — доцент; tvv1932@yandex.ru

*Гелиг Аркадий Хаимович* — профессор; agelig@yandex.ru

**AN EXTENDED CLASS OF STABILIZABLE UNCERTAIN SYSTEMS**

*Irina E. Zuber, Tatiana V. Voloshinova, Arkadii Kh. Gelig*

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; zuber.yanikum@gmail.com, tvv1932@yandex.ru, agelig@yandex.ru

The system

$$\frac{dx}{dt} = A(\cdot)x + B(\cdot)u,$$
$$u = S^*(\cdot)x,$$

where $A(\cdot) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B(\cdot) \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $S(\cdot) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ is considered. Elements of matrixes $A(\cdot)$, $B(\cdot)$, $S(\cdot)$ are uniformly bounded and they are functionals of arbitrary origin. It is supposed that among elements placed on right from principal diagonal $k$ elements $\alpha_{i_l j_l}(\cdot)$ $(l \in \overline{1,k})$ have constant sign and each of these elements is only one in his linene and his column. Other elements placed on right from principal diagonal are sufficiently small. It is also supposed that $m = n - k$ and elements $\beta_{ij}(\cdot)$ of matrix $B(\cdot)$ have the following property

$$\inf_{(\cdot)} |\beta_{i_s s}(\cdot)| = \beta_0 > 0 \text{ for } i_s \in \overline{1,n} \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}.$$

Other elements of matrix $B(\cdot)$ are zeroes.

Positive definite matrix $H = \{h_{ij}\}$ of a special form is constructed. Positive numbers $h_{ii} = h_i$ are placed on principal diagonal, $h_{i_l j_l} = h_{j_l i_l} = -0,5\sqrt{h_{i_l} h_{j_l}}\,\operatorname{sign} \alpha_{i_l j_l}(\cdot)$. Other elements of matrix $H$ are zeroes. Investigating the derivation of Lyapunov function $V(x) = x^* H^{-1} x$ we have such $h_i$ $(i \in \overline{1,n})$ and $\lambda_i \leqslant 0$ $(i \in \overline{1,n})$ that for

$$S(\cdot) = H^{-1}\Lambda B(\cdot), \quad \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

the system is globally exponentially stable. The control is robust in relation to elements of matrix $A(\cdot)$. Refs 4.

*Keywords*: uncertain systems stabilization, global exponential stability.

## References

1. Li J., Qian Ch., Ding Sh., “Global finite-time stabilization by output feedback for a class of uncertain nonlinear systems”, *International Journal of Control* **83**(11), 2241–2252 (2010).

2. Liu L., Huang J., “Global robust output regulation of output feedback systems with unknown high-frequence gain sign”, *IEEE Trans. Autom. Control* **51**(4), 625–631 (2006).

3. Zhai J., Li W., Fei Sh., “Global output feedback stabilization for a class of uncertain non-linear systems”, *IET Control Theory Appl.* **7**, Issue 2, 305–313 (2013).

4. Zakharenkov M., Zuber I., Gelig A., “Stabilization of a New Classes of Uncertain Systems”, *IFAC Proceedings Volumes (IFAC-Papers Online)* **48**(11), 1034–1037 (2015).

**Для цитирования:** Зубер И. Е., Волошинова Т. В., Гелиг А. Х. Расширенный класс стабилизируемых неопределенных систем // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2016. Т. 3 (61). Вып. 3. С. 402–407. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.307

**For citation:** Zuber I. E., Voloshinova T. V., Gelig A. Kh. An extended class of stabilizable uncertain systems. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2016, vol. 3 (61), issue 3, pp. 402–407. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.307