

УСЛОВИЯ NP-ПОЛНОТЫ ПРОВЕРКИ СОВМЕСТИСТИ НЕСКОЛЬКИХ ВИДОВ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИОФАНТОВЫХ ДИЗУРАВНЕНИЙ

Н. К. Косовский, Т. М. Косовская, Н. Н. Косовский

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

В статье предлагаются три серии теоретико-числовых задач с явно выделенными параметрами, касающиеся систем диофантовых дизуравнений с решениями из заданной области. Доказываются ограничения на параметры, при выполнении которых любая задача каждой серии NP-полна.

Доказывается, что при любых m и m' ($m < m'$) задача проверки совместности на отрезке $[m, m']$ системы линейных диофантовых дизуравнений, каждое из которых содержит ровно 3 переменные (даже если коэффициенты при них из $\{-1, 1\}$), NP-полна. Эта задача допускает также и простую геометрическую интерпретацию о NP-полноте задачи проверки наличия внутри многомерного куба целочисленной точки, не покрытой заданными гиперплоскостями, высекающими на произвольных трёх осях равные отрезки и параллельными всем остальным осям.

Если в системе линейных диофантовых дизуравнений каждое дизуравнение содержит ровно 2 переменные, задача остаётся NP-полной при условии, что справедливо неравенство $m' - m > 2$.

Также доказывается, что если решение системы линейных диофантовых дизуравнений, каждое из которых содержит ровно 3 переменные, ищется на области, заданной системой полиномиальных неравенств, содержащей n -мерный куб и содержащейся в n -мерном параллелепипеде, симметричном относительно начала координат, то задача проверки её совместности NP-полна. Библиогр. 15 назв.

Ключевые слова: система линейных диофантовых дизуравнений, принадлежность целочисленной точки из ограниченной области пересечению гиперплоскостей, NP-полнота.

Введение. Настоящая статья является продолжением статей [1, 2], опубликованных в предыдущих выпусках журнала и посвящённых условиям NP-полноты проверки совместности систем линейных диофантовых дизуравнений, сравнений и уравнений. Ниже предлагаются серии теоретико-числовых задач, связанных с системами линейных диофантовых дизуравнений, с явно выделенными параметрами, и доказываются условия на параметры, при выполнении которых каждая задача серии NP-полна.

Термин «дизуравнение» используется ниже для линейных соотношений, в которых левая часть не равна правой, в отличие от термина «неравенство», который традиционно предполагает в соотношениях знаки $<$, $>$, $\leq$ или $\geq$. Это понятие тесно связано с понятием «уравнение» и в значительной степени является двойственным к нему.

Рассматриваемые задачи тесно связаны с задачами из [3–10].

1. Системы линейных дизуравнений. Пусть заданы целые числа m и m' такие, что выполняется $m < m'$. Сформулируем серию задач.

Система линейных 3-дизуравнений на отрезке целых чисел $[m, m']$

УСЛОВИЕ. Задана система, состоящая из попарно различных линейных дизуравнений вида $L_j(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}) \neq 0$, в которой каждое дизуравнение содержит ровно

3 различные переменные и все коэффициенты при переменных в уравнениях принадлежат $\{-1, 1\}$.

ВОПРОС. Совместна ли система в целых числах из отрезка $[m, m']$?

Теорема 1. *Каковы бы ни были различные целые числа m и m' ($m < m'$), сужение задачи Система линейных 3-дизуравнений на отрезке целых чисел $[m, m']$ на случай, когда все коэффициенты при переменных принадлежат множеству $\{-1, 1\}$, является NP-полным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Принадлежность задачи классу **NP** очевидна, так как длина записи «претендента» на решение не превосходит полинома от длины записи системы, так же как и число шагов, требуемое на проверку того, действительно ли «претендент» является решением.

Сведём задачу 3-ВЫП из [10] к рассматриваемой задаче. Действительно, истинность ровно одного литерала в дизъюнкции $x_1 \vee x_2 \vee x_3$ (где x_1, x_2, x_3 — переменные или их отрицания) может быть записана с помощью дизуравнения $x_1 + x_2 + x_3 \neq 3m$ при $m > 2$. Константа *ложь* кодируется числом m , константа *истина* кодируется числом $m + 1$. При этом вместо $\neg u_i$ подставляем $2m + 1 - u_i$.

Для каждого литерала x записываем систему 3-дизуравнений вида

$$\begin{cases} x + w + w' \neq 3m + 2, \\ x + w + w' \neq 3m + 3, \\ \vdots \\ x + w + w' \neq 3m', \end{cases}$$

а также условие того, что все вспомогательные переменные удовлетворяют $w = w' = w'' = 3m$:

$$\begin{cases} w + w' + w'' \neq 3m + 1, \\ w + w' + w'' \neq 3m + 2, \\ \vdots \\ w + w' + w'' \neq 3m'. \end{cases}$$

■

Следствие теоремы 1. *Каковы бы ни были различные целые числа m и m' ($m < m'$), задача Система линейных 3-дизуравнений на отрезке целых чисел $[m, m']$ является NP-полной.*

Теорему 1 можно интерпретировать и геометрическим образом, имеющим непосредственное отношение к задачам комбинаторной геометрии, связанным с покрытиями одного множества другими. А именно, можно сформулировать следующее утверждение.

Утверждение. *Пусть заданы различные целые числа m и m' , многомерный куб, каждая координата вершин которого принадлежит множеству $\{m, m'\}$, и гиперплоскости, высекающие на произвольных трех осях равные отрезки и параллельные всем остальным осям. Тогда задача проверки наличия внутри многомерного куба целочисленной точки, не покрытой этими гиперплоскостями, NP-полна.*

Система линейных 2-дизуравнений на отрезке целых чисел $[m, m']$

УСЛОВИЕ. Задана система попарно различных линейных дизуравнений

$$\begin{cases} L_1(x_{i_1^1}, x_{i_1^2}) \neq 0, \\ \vdots \\ L_k(x_{i_k^1}, x_{i_k^2}) \neq 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $L_1(x_{i_1^1}, x_{i_1^2}), \dots, L_k(x_{i_k^1}, x_{i_k^2})$ — линейные комбинации двух различных переменных.

ВОПРОС. Совместна ли в целых числах из отрезка $[m, m']$ система (1)?

Лемма 1. *Каковы бы ни были числа m, m' ($m' - m > 2$), любое двухместное отношение $P(x, y)$ на целых числах отрезка $[m, m']$ может быть задано системой линейных 2-дизуравнений, все коэффициенты в которых принадлежат множеству $\{1, 2\}$.*

Для доказательства достаточно использовать систему всех дизуравнений вида $x + 2y \neq c$, где выполняется $c = a + 2b$ для всех пар (a, b) с элементами из множества $\{0, 1, \dots, m - 1\}$, не удовлетворяющих заданному отношению.

Теорема 2. *Каковы бы ни были числа m, m' ($m' - m > 2$), задача Система линейных 2-дизуравнений на отрезке целых чисел $[m, m']$, все коэффициенты в которой принадлежат множеству $\{1, 2\}$, является NP-полной.*

Доказательство этой теоремы совершенно аналогично доказательству теоремы 2 из [1] с заменой знака $\neq$ на знак $=$.

Следствие теоремы 2. *Каковы бы ни были числа m, m' ($m' - m > 2$), задача Система линейных 2-дизуравнений на отрезке целых чисел $[m, m']$ является NP-полной.*

Если справедливо $P \neq NP$, в теореме 2 и её следствии термин «2-дизуравнение» не может быть заменён на термин «1-дизуравнение», поскольку при этом она может быть решена с помощью алгоритма Гаусса исключения неизвестных.

Можно проверить, что следствие теоремы 2 по существу усиливает следствие теоремы 1 при $m' - m \neq 2$.

Это следствие дополняет теорему, доказанную в [11] и опубликованную также в [12], о NP-полноте задачи проверки совместности в целых числах системы нестрогих неравенств, каждое из которых имеет ровно две переменные.

Авторам не известно, справедливо ли утверждение теоремы 2 и её следствия при $m' - m = 2$.

Теорема 1 может быть обобщена с многомерного куба на ограниченную многомерную область, содержащую заданный куб той же размерности.

Система линейных 3-дизуравнений на ограниченной области с параметрами $n, m_1, \dots, m_n, m, m'$

УСЛОВИЕ. Задана система, состоящая из попарно различных линейных 3-дизуравнений с n переменными вида $L_j(x_{i_1^1}, x_{i_1^2}, x_{i_1^3}) \neq 0$, в которой каждое дизуравнение содержит ровно 3 различные переменные.

Задана система полиномиальных неравенств с целыми коэффициентами, определяющая область в n -мерном ($n \geq 3$) пространстве, содержащая n -мерный куб $[m, m']^n$, и содержащаяся в n -мерном параллелепипеде $[-m_1, m_1] \times \dots \times [-m_n, m_n]$.

ВОПРОС. Совместна ли система в целочисленных точках области?

Теорема 3. *Каковы бы ни были целые положительные числа $n, m_1, \dots, m_n, m, m'$ ($m < m'$), сужение задачи Система линейных 3-дизуравнений на ограниченной области с параметрами $n, m_1, \dots, m_n, m, m'$ на случай, когда все коэффициенты при переменных принадлежат множеству $\{-1, 1\}$, является NP-полным.*

Доказательство. То, что задача принадлежит классу **NP**, очевидно, поскольку можно проверить все точки из параллелепипеда с целочисленными координатами.

Рассмотрим её сужение на системы, содержащие 3-дизуравнения:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i + v + w \neq m_i + 2m, \\ x_i + v + w \neq m_i - 1 + 2m, \\ \vdots \\ x_i + v + w \neq m' + 1 + 2m, \\ x_i + v + w \neq -m_i + 2m, \\ x_i + v + w \neq -m_i + 1 + 2m, \\ \vdots \\ x_i + v + w \neq 3m - 1 \end{array} \right.$$

для каждой переменной $x_1, \dots, x_n$, а также 3-дизуравнения

$$\left\{ \begin{array}{l} u + v + w \neq 3m + 1, \\ u + v + w \neq 3m + 2, \\ \vdots \\ u + v + w \neq 3m'. \end{array} \right.$$

Это сужение превратило её в задачу Система линейных 3-дизуравнений на отрезке целых чисел $[m, m']$ с коэффициентами при переменных из $\{-1, 1\}$. ■

Следствие теоремы 3. *Каковы бы ни были положительные целые числа $n, m_1, \dots, m_n, m, m'$ ($m < m'$), задача Система линейных 3-дизуравнений на ограниченной области с параметрами $n, m_1, \dots, m_n, m, m'$ является NP-полной.*

Заключение. Граница между полиномиальными (по числу шагов при реализации на машине Тьюринга) и сверхполиномиальными оценками в настоящее время является точкой роста доказательства новых математических теорем. Такие теоремы представляют непосредственный практический интерес для разработчиков программ, реализующих разнообразные математические алгоритмы.

Полученные результаты дополняют результаты, полученные в [13].

Сформулированная в следствии теоремы 3 NP-полная задача является одной из наиболее простых теоретико-числовых NP-полных задач, поскольку исключение из неё всех сравнений по модулю 2 (или всех сравнений по модулю 3) обеспечивает её решение полиномиальным по времени алгоритмом (методом исключения неизвестных). Речь идёт об одной и той же системе, проверяемой на наличие общего решения как по модулю 2, так и по модулю 3.

Отметим, что NP-полнота каждой задачи серии задач Система линейных 3-дизуравнений $[m, m']$ (при $m' > m$) имеет практическое значение. Поскольку множество значений переменной компьютерного типа *integer* может рассматриваться как целочисленные значения отрезка, теорема 3 доказывает неполиномиальность

любого алгоритма решения таких систем в множестве чисел типа *integer*, если справедливо $P \neq NP$. Тем не менее, если средства программирования имеют встроенные операции со сколь угодно длинными целыми числами, имеется полиномиальный алгоритм решения рассматриваемых систем в таких целых числах. Подобными средствами обладают все диалекты языка рефал (см., например, [14]). Таким образом, можно сформулировать следующую рекомендацию разработчикам программного продукта: не надеяться на приемлемое время нахождения точного решения системы из описанных множеств систем линейных уравнений при решении их в числах типа *integer*, а использовать представления сколь угодно длинных натуральных чисел или языки, в которых встроены операции с такими числами (при этом, естественно, время, затрачиваемое на выполнение одной арифметической операции увеличивается полиномиально от длины записи аргументов).

Каждая задача серий как Система линейных 3-дизуравнений на отрезке целых чисел $[m, m']$, так и 2-дизуравнений (при $m' > m + 2$) имеет простую теоретико-числовую формулировку, позволяющую её использовать для доказательства NP-полноты почти всех NP-полных задач.

Если справедливо $P \neq NP$, формулировки теорем 1–3 не могут быть изменены путём замены терминов «2-дизуравнение» и «3-дизуравнение» на термины «1-дизуравнение» и «2-дизуравнение» соответственно.

Теоремы 1 и 3 анонсированы в [15].

Литература

1. Косовский Н. К., Косовская Т. М., Косовский Н. Н. Условия NP-полноты проверки совместности нескольких видов систем линейных дизсравнений // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2016. Т. 3(61). Вып. 1. С. 25–31.
2. Косовский Н. К., Косовская Т. М., Косовский Н. Н. Условия NP-полноты проверки совместности нескольких видов систем линейных диофантовых сравнений и уравнений // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2016. Т. 3(61). Вып. 2. С. 196–201.
3. Clausen M., Fortenbacher A. Efficient Solution of Linear Diophantine Equations // J. Symbolic Computation. 1989. Vol. 8, issue 1–2. P. 201–216.
4. Вялый М. Н. Сложность вычислительных задач // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 4. С. 81–114.
5. Aardal K., Hurkens C. A. J., Lenstra A. K. Solving a system of linear Diophantine equations with lower and upper bounds of the variables // Mathematics of operations research. 2000. Vol. 25, N 3. P. 427–442.
6. Шарая И. А. Строение допустимого множества решений интервальной линейной системы // Вычислительные технологии. 2005. Т. 10, № 5. С. 103–119.
7. Шарая И. А. Метод граничных интервалов для визуализации полиэдральных множеств решений // Вычислительные технологии. 2015. Т. 20, № 1. С. 75–103.
8. Lechner A., Ouaknine J., Worrell J. On the Complexity of Linear Arithmetic with Divisibility // Proceedings of the 30th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS). 2015. P. 667–676.
9. Кривий С. Л. Лінійні діофантові обмеження та їх застосування. Київ: Видавничий дім «Букрек», 2015. 224 с.
10. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
11. Lagarias J. C. The computational complexity of simultaneous Diophantine approximation problems // SIAM Journal on Computing. 1985. Vol. 14. P. 196–209.
12. Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования. Т. 2. М.: Мир, 1991.
13. Косовская Т. М., Косовский Н. К. О числе шагов получения булевого решения у полиномиальных сравнений и у систем из них // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2007. Вып. 3. С. 82–90.
14. Турчин В. Ф. Рефал-5. Руководство по программированию и справочник. URL: http://www.refal.net/rf5_frm.htm (дата обращения: 05.06.2016).

15. Косовский Н. К., Косовский Н. Н. NP-полнота задачи проверки совместности в отрезке целых чисел системы целочисленных линейных уравнений и дизуравнений // Дискретные модели в теории управляющих систем: IX Международная конференция, Москва и Подмоскowie, 20–22 мая 2015 г.: Труды / отв. ред. В. Б. Алексеев, Д. С. Романов, Б. Р. Данилов. М.: МАКС-Пресс, 2015. С. 123–125.

Статья поступила в редколлегия 13 июля 2015 г.

Сведения об авторах

Косовский Николай Кириллович — доктор физико-математических наук, профессор;
kosov@nk1022.spb.edu

Косовская Татьяна Матвеевна — доктор физико-математических наук, доцент; kosovtm@gmail.com

Косовский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук; kosovnn@pdmi.ras.ru

NP-COMPLETENESS CONDITIONS FOR SOME TYPES OF SYSTEMS OF LINEAR DIOPHANTINE DIS-EQUATIONS CONSISTENCY CHECKING

Nikolai K. Kosovskii, Tatiana M. Kosovskaya, Nikolai N. Kosovskii

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation;
kosov@nk1022.spb.edu, kosovtm@gmail.com, kosovnn@pdmi.ras.ru

Three series of number-theoretic problems concerning systems of Diophantine linear dis-equations with explicitly pointed out parameters are proposed in this part of the paper. Conditions upon the parameters implying that every problem of a series is an NP-complete one are proved.

It is proved that for every m and m' ($m < m'$) the consistency problem for a system of Diophantine linear dis-equations every of which contains exactly 3 variables (even if every coefficient belongs to $\{-1, 1\}$) is NP-complete. This problem also admits a simple geometrical interpretation concerning NP-completeness of the checking whether inside a many-dimensional cube there exists an integer-valued point which does not belong to any of the given hyperplanes which cut off equal segments of three axes and are parallel to the other ones.

If every dis-equation of a system of Diophantine linear dis-equations contains exactly 2 variables then the problem remains an NP-complete one under the condition that $m' - m > 2$.

It is also proved that if a solution of a system of Diophantine linear dis-equations every of which contains exactly 3 variables must belong to a domain, which is defined by a system of polynomial inequalities, contains an n -dimensional cube and is contained in an n -dimensional parallelogram, then it is an NP-complete one. Refs 15.

Keywords: system of linear Diophantine dis-equations, belonging of a integer-valued point from a bounded domain to the intersection of hyperplanes, NP-completeness.

References

1. Kosovskii N. K., Kosovskaya T. M., Kosovskii N. N., “NP-completeness conditions for verifying the consistency of several kinds of systems of linear Diophantine discongruences”, *Vestnik St. Petersburg Univ.: Math.* **49**, Issue 1, 18–22 (2016).
2. Kosovskii N. K., Kosovskaya T. M., Kosovskii N. N., “NP-completeness conditions for verifying the consistency of several kinds of systems of linear Diophantine congruences and equations”, *Vestnik St. Petersburg Univ.: Math.* **49**, Issue 2, 111–114 (2016).
3. Clausen M., Fortenbacher A., “Efficient Solution of Linear Diophantine Equations”, *J. Symbolic Computation* **8**, Issue 1–2, 201–216 (1989).
4. Vialyi M. N., “Complexity of computational problems”, *Mathematical education. Ser. 3* Issue 4, 81–114 [in Russian].
5. Aardal K., Hurkens C. A. J., Lenstra A. K., “Solving a system of linear Diophantine equations with lower and upper bounds of the variables”, *Mathematics of operations research* **25**(3), 427–442 (2000).
6. Sharaia I. A., “Construction of admissible set for solutions to interval linear system”, *Computational technologies* **10**(5), 103–119 (2005) [in Russian].
7. Sharaia I. A., “Method of boundary intervals for polyhedral set of solutions viewing”, *Computational technologies* **20**(1), 75–103 (2005) [in Russian].

8. Lechner A., Ouaknine J., Worrell J., "On the Complexity of Linear Arithmetic with Divisibility", *Proceedings of the 30th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS)*, 667–676 (2015).
9. Kryvyi S.L., *Linear Diophantine Equations and Their Applications* (Bukrek, Kiev, 2015) [in Ukrainian].
10. Garey M.R., Johnson D.S., *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness* (Freeman, New York, 1979).
11. Lagaris J.C., "The computational complexity of simultaneous Diophantine approximation problems", *SIAM Journal on Computing* **14**, 196–209 (1985).
12. Schrijver A., *Theory of Linear and Integer Programming* (A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, New York, 1986).
13. Kossovsky N.K., Kossovskaya T.M., "About the number of steps for construction a boolean solution of a polynomial comparison and of a system of them", *Vestnik St. Petersburg Univ. Math.* **40**, Issue 3, 82–90 (2007).
14. Turchin V.F., *Refal-5. Guide-book for programming and reference book*. Available at: http://www.refal.net/rf5_frm.htm (accessed 05.06.2016).
15. Kosovskii N.K., Kosovskii N.N., "NP-completeness of the problem of consistency in integers from a closed interval checking for a system of linear equations and dis-equations", *Discrete models in the theory of control systems: IX International conference, Moscow and Moscow region, May 20–22 2015: Proceedings* (Moscow, MAKSPress, 123–125, 2015) [in Russian].

Для цитирования: Косовский Н. К., Косовская Т. М., Косовский Н. Н. Условия NP-полноты проверки совместности нескольких видов систем линейных диофантовых дизуравнений // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2016. Т. 3 (61). Вып. 3. С. 408–414. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.308

For citation: Kosovskii N.K., Kosovskaya T.M., Kosovskii N.N. NP-completeness conditions for some types of systems of linear diophantine dis-equations consistency checking. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2016, vol. 3 (61), issue 3, pp. 408–414. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.308