УДК 517.925 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 3 (61). 2016. Вып. 3

СИСТЕМЫ, ПОРОЖДАЮЩИЕ РЕШЕНИЯ С МАЛЫМ ПЕРИОДОМ*

С. Ю. Пилюгин, А. А. Родионова

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Пусть $(j_1, \dots, j_n)$ — перестановка набора $(1, \dots, n)$. Рассматривается система дифференциальных уравнений $\dot{x}_i = f_i(x_{j_i})$, $i = 1, \dots, n$, в которой каждая из функций f_i непрерывна на $\mathbb{R}$. Эта система обладает свойством порождения решений с малым периодом, если для любого числа $M > 0$ найдется такое число $\omega_0 = \omega_0(M) > 0$, что если выполняется $0 < \omega \le \omega_0$ и $h_i(t, x_1, \dots, x_n)$ — непрерывные на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, ω-периодические по t функции, удовлетворяющие неравенствам $|h_i| \le M$, система $\dot{x}_i = f_i(x_{j_i}) + h_i(t, x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, n$, обладает ω-периодическим решением.

Показано, что система обладает свойством порождения решения с малым периодом тогда и только тогда, когда выполнены равенства $f_i(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$.

Показано также, что условие малости периода возмущения существенно. Библиогр. 5 назв.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений, периодическое решение.

1. Введение. Задача о существовании периодических решений — одна из традиционных задач качественной теории дифференциальных уравнений. В данной заметке выделяется весьма естественный, на наш взгляд, класс систем дифференциальных уравнений, для которого условия существования периодических решений имеют предельно простую структуру. В частности, этот класс включает системы, соответствующие периодически возмущенным уравнениям колебаний без трения:

$$\ddot{x} + f(x) = h(t);$$

для таких систем похожая задача интенсивно изучалась (см. ниже).

2. Основной результат. Пусть $(j_1, \dots, j_n)$ — перестановка набора $(1, \dots, n)$. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = f_i(x_{j_i}), \quad i = 1, \dots, n, \tag{1}$$

в которой каждая из функций f_i непрерывна на $\mathbb{R}$.

Будем говорить, что система (1) обладает свойством порождения решений с малым периодом, если для любого числа $M > 0$ найдется такое число $\omega_0 = \omega_0(M) > 0$, что если выполняется $0 < \omega \le \omega_0$ и $h_i(t, x_1, \dots, x_n)$ — непрерывные на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, ω-периодические по t функции, удовлетворяющие неравенствам

$$|h_i| \le M, \tag{2}$$

система

$$\dot{x}_i = f_i(x_{j_i}) + h_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n, \tag{3}$$

обладает ω-периодическим решением.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 15-01-03797а) и программы СПбГУ (шифр ИАС 6.38.223.2014).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2016

 DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.310

Отметим, что достаточные условия (весьма ограничительные), при которых плоская система вида

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = f(x_1)$$

обладает свойством, близким к введенному выше, получили Г. Зейферт [1] и З. Опяль [2] (см. также [3]).

Основным результатом данной заметки является следующее утверждение.

Теорема. *Система (1) обладает свойством порождения решения с малым периодом тогда и только тогда, когда выполнены равенства*

$$f_i(\mathbb{R}) = \mathbb{R}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Доказательство. 1. Необходимость. Предположим, что справедливо $f_i(\mathbb{R}) \neq \mathbb{R}$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, n\}$. Тогда существует такое N, что выполняется либо $f_i(x) < N$, либо $f_i(x) > N$ для $x \in \mathbb{R}$. Из неравенств $f_i(x) - N < 0$ (в первом случае) и $f_i(x) - N > 0$ (во втором случае) следует, что система вида (3) с $h_i(t, x_1, \ldots, x_n) \equiv -N$ не имеет периодических решений.

2. Достаточность. Фиксируем $M > 0$. Из условий (4) следует, что для любого индекса i найдутся такие числа y_i^- и y_i^+, что имеют место равенства

$$f_i(y_i^-) = -2M \quad \text{и} \quad f_i(y_i^+) = 2M.$$

Введем следующие обозначения. Пусть имеем $y_i = x_{j_i}$ для $i = 1, \ldots, n$. Положим $I_i = [y_i^-, y_i^+]$, если выполняется $y_i^- < y_i^+$, и $I_i = [y_i^+, y_i^-]$ в противном случае.

Рассмотрим множества

$$\Sigma = \{x : \ y_i \in I_i, \ i = 1, \ldots, n\}$$

и

$$\Sigma_i^{\pm}(\Delta) = \{x : |y_i - y_i^{\pm}| \leq \Delta\}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

где для числа Δ справедливо неравенство $\Delta \geq 0$.

Пусть имеем $\Theta = \partial\Sigma$ и $\Theta_i^{\pm} = \Theta \cap \Sigma_i^{\pm}(0)$. Выберем число Δ таким образом, чтобы выполнялись неравенства

$$f_i(y_i) > \frac{3M}{2}, \quad |y_i - y_i^+| \leq \Delta,$$

$$f_i(y_i) < -\frac{3M}{2}, \quad |y_i - y_i^-| \leq \Delta.$$

Фиксируем набор $h = \{h_1(t, x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_n(t, x_1, \ldots, x_n)\}$, состоящий из непрерывных функций, и будем обозначать через $x(t, \tau, \xi, h)$ любое решение задачи Коши с начальными данными (τ, ξ) для системы (3), в которой функции h_i взяты из набора h.

Пусть Σ_0 — замкнутая 1-окрестность множества Σ. Определим число

$$K = \max_{1 \leq i \leq n} \max_{x \in \Sigma_0} |f_i(x)|,$$

считая, без ограничения общности, что выполняется $K \geq 1$.

Считая также, что справедливо неравенство $\Delta < 2$, введем число

$$\omega_0 = \frac{\Delta}{2(K + 2M)}.$$

Тогда, если имеем $0 < \omega \le \omega_0$ и $|h_i| \le 2M$, можем утверждать, что

(I.1) существует решение $x(t,0,\xi,h)$, продолжимое на $[0,\omega]$, для любого $\xi \in \Sigma$;

(I.2) если имеем $\xi \in \Sigma$, то для любого решения $x(t,0,\xi,h)$, продолжимого на $[0,\omega]$, выполнены неравенства

$$|x(t,0,\xi,h) - \xi| < \Delta, \quad t \in [0,\omega].$$

Покажем, что это ω_0 — искомое. Фиксируем $\omega \in (0,\omega_0]$ и набор

$$h = \{h_1(t,x_1,\dots,x_n),\dots,h_n(t,x_1,\dots,x_n)\},$$

состоящий из непрерывных, ω-периодических по t функций, удовлетворяющих неравенствам (2).

Определим класс $\mathcal{H}$, состоящий из наборов

$$H = \{H_1(t,x_1,\dots,x_n),\dots,H_n(t,x_1,\dots,x_n)\}$$

непрерывных, ω-периодических по t функций, обладающих следующими свойствами:

(II.1) функции $f_i(x_{j_i}) + H_i(t,x_1,\dots,x_n)$ непрерывно дифференцируемы по $x_1,\dots,x_n$;

(II.2) при всех t и x_i выполнены неравенства

$$|H_i(t,x_1,\dots,x_n) - h_i(t,x_1,\dots,x_n)| < \frac{M}{2}.$$

Покажем, что для любого набора $H \in \mathcal{H}$ система

$$\dot{x}_i = f_i(x_{j_i}) + H_i(t,x_1,\dots,x_n), \quad i = 1,\dots,n, \tag{5}$$

обладает ω-периодическим решением, график которого лежит в $\mathbb{R} \times \Sigma_1$, где Σ_1 — Δ-окрестность множества Σ.

Из свойства (II.2) вытекает, что выполнены неравенства

$$|H_i| < \frac{3M}{2} < 2M. \tag{6}$$

Из (I.1) и (II.1) следует, что на множестве Σ определен диффеоморфизм Пуанкаре $T(\xi) = x(\omega,0,\xi,H)$ системы (5).

Изучим поведение векторного поля $\Gamma(\xi) = T(\xi) - \xi$ на границе Θ множества Σ. Ясно, что выполняется

$$\Theta = \bigcup_i \Theta_i^{\pm}.$$

Пусть имеем $\xi \in \Theta_i^{+}$. Из (I.2) следует

$$|x(t,0,\xi,H) - \xi| < \Delta, \quad t \in [0,\omega],$$

поэтому можем записать

$$x(t,0,\xi,H) \in \Sigma_i^{+}(\Delta), \quad t \in [0,\omega].$$

Так как выполняется $f_i(y_i) > 3M/2$ при $|y_i - y_i^{+}| < \Delta$, из (6) вытекает

$$\dot{x}_i(t,0,\xi,H) > 0, \quad t \in [0,\omega].$$

Следовательно, получим

$$\Gamma_i(\xi) > 0,$$

где Γ_i — i-я компонента поля Γ.

Аналогичные рассуждения показывают, что для $\xi \in \Theta_i^-$ справедливо

$$\Gamma_i(\xi) < 0.$$

Граница Θ множества Σ симметрична относительно точки y^*, в которой

$$x_{j_i} = \frac{y_i^+ + y_i^-}{2}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Из доказанного выше следует, что в симметричных относительно y^* точках границы Θ множества Σ векторное поле Γ не направлено одинаково. Следовательно, это поле гомотопно нечетному полю на Θ (относительно симметрии с центром в y^*), а его вращение на Θ ненулевое (см. [4]). Поэтому существует точка $\xi_0(H) \in \Sigma$, в которой выполнены равенства

$$x(\omega, 0, \xi_0(H), H) - \xi_0(H) = \Gamma(\xi_0(H)) = 0.$$

Хорошо известно, что в этом случае $x(t, 0, \xi_0(H), H)$ — ω-периодическое решение системы (5). Из (I.2) следует, что график этого решения лежит в $\mathbb{R} \times \Sigma_1$.

Для завершения доказательства отметим, что существует такая последовательность наборов $H^{(m)} \in \mathcal{H}$, что

$$(H_1^{(m)}, \ldots, H_n^{(m)}) \to (h_1, \ldots, h_n), \quad m \to \infty,$$

равномерно по $(t, x_1, \ldots, x_n) \in [0, \omega] \times \Sigma_1$.

По лемме Арцела—Асколи из последовательности $x(t, 0, \xi_0(H^{(m)}), H^{(m)})$ можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность. Предел этой подпоследовательности и будет искомым периодическим решением системы (3). Теорема доказана.

Замечания

1. Для системы

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1$$

выполнено условие (4), однако при возмущении ее функциями $h_1 \equiv 0$, $h_2 = \sin t$ получающаяся система вида (3) периодических решений не имеет. Таким образом, из условия (4) не следует существование периодических решений без предположения о малости периода.

2. Условие вида (4) использовано в работе В. Е. Слюсарчука [5] при изучении вопроса о существовании ограниченных решений скалярного уравнения.

Литература

1. *Seifert G.* A note on periodic solutions of second order differential equations without damping // Proc. Amer. Math. Soc. 1959. Vol. 10. P. 396–398.

2. *Opial Z.* Sur les solutions périodiques de l'équation différentielle $x'' + g(x) = p(t)$ // Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astr. Phys. 1960. Vol. 2. P. 151–156.

3. *Рейссиг Р., Сансоне Г., Конти Р.* Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1974. 320 с.

4. *Красносельский М. А., Забрейко П. П.* Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975. 512 с.

5. *Слюсарчук В. Е.* Условия существования ограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений // Усп. мат. наук. 1999. Т. 54. Вып. 4. С. 181–182.

Статья поступила в редколлегию 14 января 2016 г.

Сведения об авторах

Пилюгин Сергей Юрьевич — доктор физико-математических наук, профессор; sp@sp1196.spb.edu

Родионова Анастасия Александровна — ассистент; a.a.rodionova@gmail.com

SYSTEMS THAT GENERATE SOLUTIONS WITH SMALL PERIOD

Sergey Yu. Pilyugin, Anastasiya A. Rodionova

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; sp@sp1196.spb.edu, a.a.rodionova@gmail.com

The problem of existence of periodic solutions is one of the traditional problems of the theory of differential equations. In this short note, we select a class of systems of differential equations for which conditions of the existence of periodic solutions have an extremely simple form. In particular, this class includes systems that correspond to periodically perturbed equations of oscillations without friction,

$$\ddot{x} + f(x) = h(t);$$

for such systems, this problem was intensively studied.

Let $(j_1, \dots, j_n)$ be a permutation of the set $(1, \dots, n)$. We consider a system of differential equations

$$\dot{x}_i = f_i(x_{j_i}), \quad i = 1, \dots, n,$$

in which any function f_i is continuous on $\mathbb{R}$.

This system has the property of generation of solutions with a small period if for any number $M > 0$ there exists a number $\omega_0 = \omega_0(M) > 0$ such that if $0 < \omega \le \omega_0$ and $h_i(t, x_1, \dots, x_n)$ are continuous on $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, ω-periodic in t functions that satisfy the inequalities $|h_i| \le M$, then the system

$$\dot{x}_i = f_i(x_{j_i}) + h_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n,$$

has an ω-periodic solution.

We show that a system has the property of generation of solutions with a small period if and only if the following equalities hold:

$$f_i(\mathbb{R}) = \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n.$$

It is also shown that the condition of smallness of the period is essential. Refs 5.

Keywords: systems of differential equations, periodic solutions.

References

1. Seifert G., “A note on periodic solutions of second order differential equations without damping”, *Proc. Amer. Math. Soc.* **10**, 396–398 (1959).

2. Opial Z., “Sur les solutions périodiques de l’équation différentielle $x'' + g(x) = p(t)$”, *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astr. Phys.* **2**, 151–156 (1960) [in French].

3. Reissig R., Sansone G., Conti R., *Qualitative Theorie nichtlinearer Differentialgleichungen* (Ed. Cremonese, Rome, 1963).

4. Krasnoselskii M. A., Zabreiko P. P., *Geometric Methods of Nonlinear Analysis* (Nauka, Moscow, 1975) [in Russian].

5. Slyusarchuk V. E., “Conditions of existence of bounded solutions of nonlinear differential equations”, *Usp. Mat. Nauk* **54**, 181–182 (1999) [in Russian].

Для цитирования: Пилюгин С. Ю., Родионова А. А. Системы, порождающие решения с малым периодом // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2016. Т. 3 (61). Вып. 3. С. 424–428. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.310

For citation: Pilyugin S. Yu., Rodionova A. A. Systems that generate solutions with small period. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2016, vol. 3 (61), issue 3, pp. 424–428. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.310