

СОБСТВЕННЫЕ ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ АНИЗОТРОПНЫХ КОРОбЧАТЫХ СТЕРЖНЕЙ ИЗ ПОЛИМЕРНЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ.

2. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

В. М. Рябов¹, Б. А. Ярцев²

¹ Санкт-Петербургский государственный университет,

Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

² Крыловский государственный научный центр,

Российская Федерация, 196158, Санкт-Петербург, Московское шоссе, 44

Обсуждаются результаты численных исследований влияния ориентации армирующих волокон на величины собственных частот и коэффициентов механических потерь связанных колебаний безопорных симметричных и асимметричных коробчатых стержней. Расчеты выполнялись в предположении частотной независимости вещественных частей комплексных модулей и коэффициентов механических потерь. Моды колебаний идентифицировались по виду поверхностей соответствующих собственных форм. Границы областей взаимной трансформации взаимодействующих мод колебаний определялись путем совместного анализа зависимостей связанных и парциальных собственных частот, а также коэффициентов механических потерь от угла ориентации армирующих волокон. Установлено, что при колебаниях симметричного коробчатого стержня возникают два первичных взаимодействия: изгибно-крутильное и продольно-сдвиговое, объединенные в единое продольно-изгибно-крутильно-сдвиговое взаимодействие вторичным взаимодействием, порождаемым деформациями поперечного сдвига. При колебаниях асимметричного коробчатого стержня возникают продольно-крутильное и изгибно-изгибное (в двух взаимно ортогональных плоскостях) взаимодействия. Показано, что в ряде случаев изменение угла ориентации армирующих волокон сопровождается взаимной трансформацией связанных мод колебаний. Если дифференциальные уравнения собственных колебаний содержат производные нечетного порядка собственных функций по пространственной переменной (симметричный стержень, изгибно-изгибное взаимодействие несимметричного стержня), то при изменении угла ориентации армирующих волокон происходит взаимная трансформация связанных мод колебаний. Если же уравнения содержат только производные четного порядка (продольно-крутильное взаимодействие несимметричного стержня), взаимная трансформация связанных мод колебаний не возникает. Библиогр. 4 назв. Ил. 7.

Ключевые слова: композитные материалы, собственные колебания, связанные колебания.

1. Данная статья является продолжением работы [1], в которой содержится подробное описание математической модели задачи.

Бесконечное многообразие структур армирования стенок коробчатого стержня не позволяет исследовать их все. Поэтому будем рассматривать две специальные структуры армирования стенок: симметричную и асимметричную. Симметричная структура армирования образована совокупностью однонаправленных слоев, ориентированных таким образом, что выполняется $\theta_{(1)} = \theta_{(2)} = -\theta_{(3)} = -\theta_{(4)} = \theta$ (рис. 1, а). Здесь $\theta_{(j)}$ — угол между продольной осью стержня x и направлением армирующих волокон на грани стержня с номером j ($j = \overline{1,4}$). Нижний индекс, заключенный в круглые скобки, и обозначает номер грани стержня. За начало отсчета принимается нижняя грань и нумерация последующих граней осуществляется против часовой стрелки. В отличие от симметричной асимметричная структура армирования коробчатого стержня образуется совокупностью ориентированных в направлениях $\theta_{(1)} = \theta_{(2)} = \theta_{(3)} = \theta_{(4)} = \theta$ однонаправленных слоев (рис. 1, б). Различие воз-

никающих в указанных структурах эффектов упругого взаимодействия порождает различную связанность мод колебаний симметричных и асимметричных коробчатых стержней.

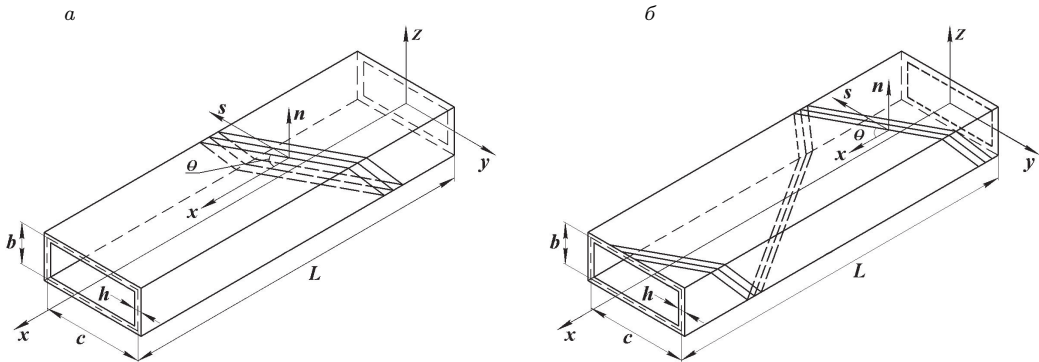


Рис. 1. Схема армирования симметричного (а) и асимметричного (б) коробчатого стержня.

Одинаковая ориентация волокон на каждой грани стенки стержня позволяет считать ее материал квазиоднородным, не зависящим от числа армирующих слоев. Поэтому вместо слоистого стержня можно рассматривать эквивалентный однородный стержень, каждая грань которого симметрична относительно срединной плоскости, т. е. $B_{lm}^{(j)} = 0$ ($l, m = 1, 6$). Кроме того, выполняются равенства $m_0^{(j)} = \rho h$, $m_1^{(j)} = 0$, $m_2^{(j)} = \rho h^3/12$ и отличные от нуля силы инерции определяются формулой

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{67} & 0 & 0 & m_{610} \\ 0 & 0 & 0 & m_{74} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\Theta}_y \\ \ddot{\Theta}_z \\ \ddot{\Phi}' \\ \ddot{v} \\ \ddot{w} \\ \ddot{\Phi} \\ \ddot{\Theta}'_y \\ \ddot{\Theta}'_z \\ \ddot{\Phi}'' \end{pmatrix}.$$

Численные исследования влияния угла ориентации армирующих волокон θ ($\theta \in [0, 90]$) на значения собственных частот $f_i = f_i(\theta)$ и коэффициентов механических потерь $\eta_i = \eta_i(\theta)$ проводились для безпорных симметричных и асимметричных тонкостенных коробчатых стержней, изготовленных из углепластика HMS/DX-209 ($E_{11}/E_{22} = 38, b = 0.1 \text{ м}, c = 0.4 \text{ м}, L = 3.0 \text{ м}, h = 0.01 \text{ м}$). При выполнении расчетов делалось обычное предположение о частотной независимости вещественных и мнимых компонент комплексных модулей и, следовательно, коэффициентов механических потерь [2]. Моды колебаний идентифицировались по виду поверхностей соответствующих собственных форм — по числу и расположению узловых сечений, а также по соотношениям между линейными и угловыми перемещениями. Определение границ областей взаимной трансформации взаимодействующих мод колебаний выполнялось путем совместного анализа зависимостей связанных и парциальных собственных частот, а также коэффициентов механических потерь от угла ориентации

армирующих волокон, впервые предложенного в работе [3]. При проведении анализа определяются координаты точек пересечения зависимостей парциальных собственных частот и коэффициентов механических потерь, соответствующих взаимодействующим модам колебаний. Полученные координаты приближенно определяют положения центров искомым областей взаимной трансформации.

2. Для симметричного коробчатого стержня матрица жесткости преобразуется к виду

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 & 0 & c_{15} & c_{16} & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{27} \\ 0 & 0 & c_{33} & 0 & 0 & 0 & c_{37} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 & 0 \\ c_{51} & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 & 0 \\ c_{61} & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} & 0 \\ 0 & c_{72} & c_{73} & 0 & 0 & 0 & c_{77} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Тогда описывающая собственные затухающие колебания симметричного коробчатого стержня связанная система дифференциальных уравнений движения и естественные граничные условия на его концах упрощаются и записываются в виде

$$\begin{aligned} c_{11}u_0'' + c_{15}(v_0' + \Theta_{0z})' + c_{16}(w_0' + \Theta_{0y})' + \omega^2 m_{11}u_0 &= 0, \\ c_{22}\Theta_{0y}'' + c_{27}\Phi_0'' - c_{61}u_0' - c_{66}(w_0' + \Theta_{0y}) + \omega^2 m_{22}\Theta_{0y} &= 0, \\ c_{33}\Theta_{0z}'' + c_{37}\Phi_0'' - c_{51}u_0' - c_{55}(v_0' + \Theta_{0z}) + \omega^2 m_{33}\Theta_{0z} &= 0, \\ c_{51}u_0'' + c_{55}(v_0' + \Theta_{0z})' + \omega^2 m_{41}v_0 &= 0, \\ c_{61}u_0'' + c_{66}(w_0' + \Theta_{0y})' + \omega^2 m_{52}w_0 &= 0, \\ c_{72}\Theta_{0y}'' + c_{73}\Theta_{0z}'' + c_{77}\Phi_0'' - c_{44}\Phi_0^{IV} + \omega^2(m_{63}\Phi_0 + m_{67}\Phi_0'') &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

при $x = 0, l$ выполняются условия

$$\begin{aligned} c_{11}u_0' + c_{15}(v_0' + \Theta_{0z}) + c_{16}(w_0' + \Theta_{0y}) &= 0, \\ c_{22}\Theta_{0y}' + c_{27}\Phi_0' = 0, \quad c_{33}\Theta_{0z}' + c_{37}\Phi_0' = 0, \quad \Phi_0' &= 0, \\ c_{51}u_0' + c_{55}(v_0' + \Theta_{0z}) = 0, \quad c_{61}u_0' + c_{66}(w_0' + \Theta_{0y}) &= 0, \\ c_{72}\Theta_{0y}' + c_{73}\Theta_{0z}' + c_{77}\Phi_0' - c_{44}\Phi_0''' + \omega^2 m_{74}\Phi_0' &= 0. \end{aligned}$$

Совместный анализ соотношений (1), (2) позволяет сделать заключение, что в случае симметричных коробчатых стержней возникают два вида первичных взаимодействий — продольно-сдвиговое и изгибно-крутильное (см. вид матрицы (1)). Вторичное взаимодействие, обусловленное деформациями поперечного сдвига, объединяет первичные взаимодействия в единое продольно-изгибно-крутильно-сдвиговое взаимодействие, описываемое связанной системой шести дифференциальных уравнений движения (2).

3. Для асимметричного коробчатого стержня матрица жесткости такова:

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{17} \\ 0 & c_{22} & 0 & 0 & c_{25} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} & 0 & 0 & c_{36} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{52} & 0 & 0 & c_{55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{63} & 0 & 0 & c_{66} & 0 \\ c_{71} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{77} \end{bmatrix}.$$

Связанная система шести дифференциальных уравнений движения, описывающая колебания коробчатого стержня произвольной структуры армирования [1], в случае асимметричного коробчатого стержня упрощается и разделяется на две независимые системы, первая из которых характеризует связанные продольно-крутильные колебания:

$$\begin{aligned} c_{11}u_0'' + c_{17}\Phi_0'' + \omega^2 m_{11}u_0 &= 0, \\ c_{71}u_0'' + c_{77}\Phi_0'' - c_{44}\Phi_0^{IV} + \omega^2(m_{63}\Phi_0 + m_{67}\Phi_0'') &= 0 \end{aligned}$$

с граничными условиями при $x = 0, l$:

$$\begin{aligned} c_{11}u_0' + c_{17}\Phi_0' &= 0, \quad \Phi_0'' = 0, \\ c_{71}u_0' + c_{77}\Phi_0' - c_{44}\Phi_0''' + \omega^2 m_{74}\Phi_0' &= 0. \end{aligned}$$

Вторая система дифференциальных уравнений описывает изгибные колебания стержня в двух взаимно ортогональных плоскостях, связанные с деформациями поперечного сдвига:

$$\begin{aligned} c_{22}\Theta_{0y}'' + c_{25}(v_0' + \Theta_{0z})' - c_{63}\Theta_{0z}' - a_{66}(w_0' + \Theta_{0y}) + \omega^2 m_{22}\Theta_{0y} &= 0, \\ c_{33}\Theta_{0z}'' + c_{36}(w_0' + \Theta_{0y})' - c_{52}\Theta_{0y}' - c_{55}(v_0' + \Theta_{0z}) + \omega^2 m_{33}\Theta_{0z} &= 0, \\ c_{52}\Theta_{0y}'' + c_{55}(v_0' + \Theta_{0z})' + \omega^2 m_{41}v_0 &= 0, \\ c_{63}\Theta_{0z}'' + c_{66}(w_0' + \Theta_{0y})' + \omega^2 m_{52}w_0 &= 0 \end{aligned}$$

при следующих условиях для $x = 0, l$:

$$\begin{aligned} c_{22}\Theta_{0y}' + c_{25}(v_0' + \Theta_{0z}) &= 0, \quad c_{33}\Theta_{0z}' + c_{36}(w_0' + \Theta_{0y}) = 0, \\ c_{52}\Theta_{0y}' + c_{55}(v_0' + \Theta_{0z}) &= 0, \quad c_{63}\Theta_{0z}' + c_{66}(w_0' + \Theta_{0y}) = 0. \end{aligned}$$

4. Продолжая упрощение общей системы дифференциальных уравнений движения коробчатого стержня, рассмотрим случай ориентации армирующих слоев в направлении продольной оси стержня x либо ортогонально ей ($\theta = 0^\circ, 90^\circ$), т.е. стенки граней поперечного сечения выполнены из ортотропного материала. Матрица жесткости ортотропного коробчатого стержня записывается в виде

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{77} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Общая система шести дифференциальных уравнений движения [1] разделяется на четыре группы:

1) уравнения изгибных колебаний в плоскости xz с учетом деформаций поперечных сдвигов и инерции вращения сечений

$$\begin{aligned} c_{22}\Theta_{0y}'' - c_{66}(w_0' + \Theta_{0y}) + \omega^2 m_{22}\Theta_{0y} &= 0, \\ c_{66}(w_0' + \Theta_{0y})' + \omega^2 m_{52}w_0 &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

с граничными условиями при $x = 0, l$ вида $\Theta_{0y}' = 0, w_0' + \Theta_{0y} = 0$;

2) уравнения изгибных колебаний в плоскости xy с учетом деформаций поперечных сдвигов и инерции вращения сечений

$$\begin{aligned} c_{33}\Theta''_{0z} - c_{55}(v'_0 + \Theta_{0z}) + \omega^2 m_{33}\Theta_{0z} &= 0, \\ c_{55}(v'_0 + \Theta_{0z})' + \omega^2 m_{41}v_0 &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

с граничными условиями при $x = 0, l$ вида $\Theta'_{0z} = 0, v'_0 + \Theta_{0z} = 0$;

3) уравнение крутильных колебаний

$$c_{77}\Phi''_0 - c_{44}\Phi_0^{IV} + \omega^2(m_{63}\Phi_0 + m_{67}\Phi_0'') = 0 \quad (6)$$

с граничными условиями при $x = 0, l$ вида $\Phi''_0 = 0, -c_{44}\Phi_0''' + c_{77}\Phi'_0 + \omega^2 m_{74}\Phi'_0 = 0$;

4) уравнение продольных колебаний симметричного ортотропного квазиоднородного коробчатого стержня

$$c_{11}u''_0 + \omega^2 m_{11}u_0 = 0 \quad (7)$$

с граничными условиями при $x = 0, l$ вида $u'_0 = 0$.

5. При проведении численных исследований связанных колебаний симметричного коробчатого стержня рассматривались первые 23 тона. Неклассический вид графиков зависимостей собственных частот от угла ориентации армирующих волокон $f_i = f_i(\theta)$ (рис. 2) свидетельствует о фейерверке эффектов, порождаемых продольно-изгибно-крутильно-сдвиговой связанностью в конструкции. Анализ полученных результатов позволил установить, что в зависимости от значения угла θ ($\theta \in [0, 90]$) каждой i -й собственной частоте $f_i = f_i(\theta)$ соответствуют несколько различных собственных форм колебаний, возникающих в результате череды взаимных трансформаций взаимодействующих мод колебаний. В случае изгибно-крутильного взаимодействия взаимные трансформации возникают, если обе связанные моды либо четные,

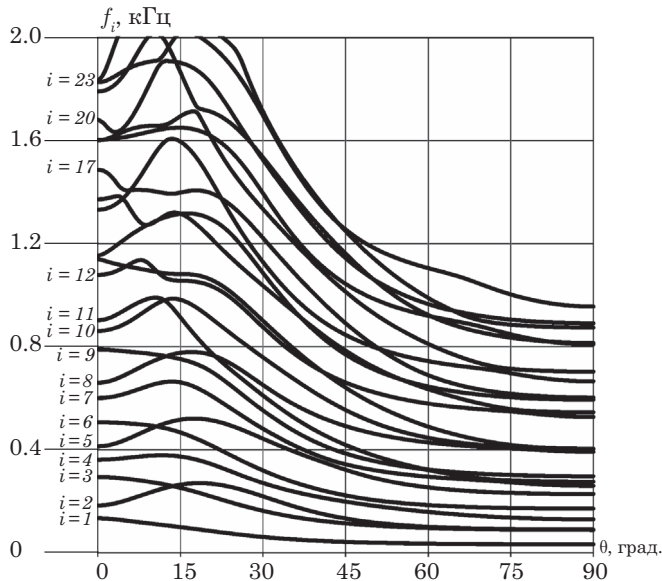


Рис. 2. Зависимости собственных частот первых 23 тонов колебаний симметричного коробчатого стержня от угла θ .

либо нечетные. При продольно-крутильной связанности взаимные трансформации реализуются, если одна из связанных мод четная, а вторая связанная мода нечетная.

Для демонстрации описанных эффектов рассмотрим последовательность взаимных трансформаций взаимодействующих первой, второй и четвертой мод колебаний, графики зависимостей собственных частот $f_i = f_i(\theta)$ и коэффициентов механических потерь $\eta_i = \eta_i(\theta)$ ($i = 1, 2, 4$) которых приведены на рис. 3. На этом же рисунке и далее нанесены кривые зависимостей парциальных собственных частот изгибных $\bar{f}_i = \bar{f}_i(\theta)$ в плоскости $0xz$ и $\tilde{f}_i = \tilde{f}_i(\theta)$ в плоскости $0xy$ колебаний, крутильных $\bar{f}_{iT} = \bar{f}_{iT}(\theta)$ и продольных $\bar{f}_{iL} = \bar{f}_{iL}(\theta)$ колебаний, а также соответствующих этим частотам парциальных коэффициентов механических потерь $\bar{\eta}_i = \bar{\eta}_i(\theta)$, $\tilde{\eta}_i = \tilde{\eta}_i(\theta)$, $\bar{\eta}_{iT} = \bar{\eta}_{iT}(\theta)$, $\bar{\eta}_{iL} = \bar{\eta}_{iL}(\theta)$. Расчет значений парциальных собственных частот и коэффициентов механических потерь производился при выполнении условия $\bar{Q}_{16} = \bar{Q}_{26} = q_{16} = 0$ по соотношениям (3)–(7).

Величины парциальных собственных частот и коэффициентов механических потерь изгибных (4), (5) и продольных (7) колебаний определялись по «свободным» комплексным модулям упругости $E_{xx} = E_{xx}(\theta)$.

Величины парциальных собственных частот и коэффициентов механических потерь крутильных колебаний (6) вычислялись путем замены «свободного» комплексного модуля сдвига в плоскости армирования $G_{xs} = G_{xs}(\theta)$ на «чистый» комплексный модуль сдвига $\bar{G}_{xs}(\theta) = G_{xs}(\theta)/[1 - \eta_{x,s}(\theta) \cdot \eta_{x,s}(\theta)]$, соответствующий полному «запрещению» изгибных деформаций при кручении анизотропного стержня. Здесь $\eta_{x,s}(\theta)$, $\eta_{x,s}(\theta)$ – коэффициенты взаимного влияния первого и второго рода слоя полимерно композиционных материалов в локальной системе координат $0xsn$. Понятия «свободных» и «чистых» модулей введены Фойгтом [4].

Анализ приведенных на рис. 3 зависимостей позволяет утверждать, что при $\theta = 0^\circ$ кривые 1, 2, 4 (здесь и далее номер кривой соответствует индексу параметров f или η) определяют первую крутильную, первую изгибную в плоскости наименьшей жесткости $0xy$ и первую изгибную в плоскости наибольшей жесткости $0xz$ мод

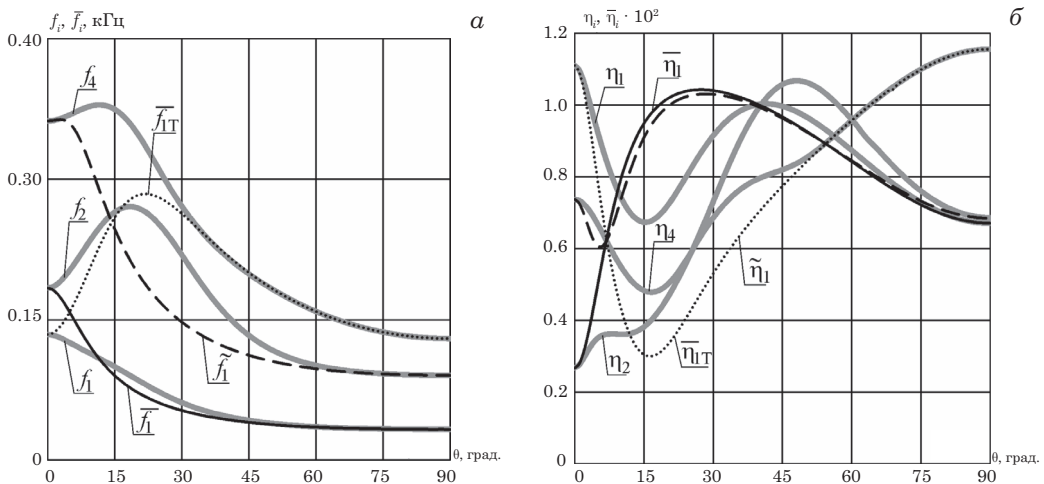


Рис. 3. Зависимости собственных частот (а) и коэффициентов механических потерь (б) взаимодействующих мод колебаний симметричного коробчатого стержня от угла θ .

колебаний соответственно. Увеличение угла θ сопровождается появлением областей взаимных трансформаций рассматриваемых мод. На отрезке [1, 8] происходит взаимная трансформация первой квазикрутильной (кривые 1) и первой квазиизгибной в плоскости Oxy (кривые 4) мод колебаний, в результате которой при $\theta > 8^\circ$ кривые 1 описывают первую квазиизгибную в плоскости Oxy моду колебаний, при $\theta = 90^\circ$ — вырождающуюся в первую изгибную в плоскости Oxy моду. Кривые 2 при $\theta > 8^\circ$ соответствуют первой квазикрутильной моде колебаний. На отрезке [10, 30] взаимодействие первой квазикрутильной моды (кривые 2) с первой квазиизгибной в плоскости Oxz модой колебаний (кривые 4) порождает их взаимную трансформацию. В результате этой трансформации при $\theta > 30^\circ$ кривые 2 соответствуют первой квазиизгибной в плоскости Oxz моде, а кривые 4 — первой квазикрутильной моде. При $\theta = 90^\circ$ кривые 2 и 4 характеризуют первую изгибную в плоскости Oxz , а кривые 4 — первую крутильную моды колебаний.

Переходя к обзору более высоких тонов колебаний, необходимо отметить, что с повышением тона число взаимных трансформаций связанных мод возрастает. Проиллюстрируем это путем подробного исследования изменений собственных частот и коэффициентов механических потерь пяти взаимодействующих мод колебаний рассматриваемого стержня ($i = 3, 5, 7, 9, 11$) в зависимости от угла ориентации армирующих волокон θ (рис. 4, 5).

Совместный анализ рассматриваемых зависимостей позволяет сделать вывод, что при $\theta = 0^\circ$ кривые 3, 5, 7, 11 определяют вторую крутильную, вторую изгибную в плоскости наименьшей жесткости Oxy , вторую изгибную в плоскости наибольшей жесткости Oxz , четвертую крутильную и четвертую изгибную в плоскости Oxy моды колебаний соответственно. По мере увеличения угла θ в результате связанности происходят взаимные трансформации указанных мод. На отрезке [1, 13] возникает взаимная трансформация второй квазикрутильной (кривые 3) и второй квазиизгибной в плоскости Oxy (кривые 5) мод колебаний. В результате этой трансформации при $\theta > 13^\circ$ кривые 3 характеризуют вторую квазиизгибную в плоскости Oxy моду колебаний, вырождающуюся во вторую изгибную моду при $\theta = 90^\circ$, а кривые 5 идентифицируются как вторая квазикрутильная мода колебаний. Следствием взаимной трансформации второй квазикрутильной (кривые 5) и второй квазиизгибной в плоскости Oxz (кривые 7) мод колебаний на отрезке [14, 19] является соответствие кривых 5 при $\theta > 19^\circ$ второй квазиизгибной в плоскости Oxz , а кривых 7 — второй квазикрутильной модам колебаний. При $\theta = 90^\circ$ кривые 5 описывают вторую изгибную в плоскости Oxz моду колебаний. Взаимодействие второй квазикрутильной (кривые 7) и четвертой квазиизгибной в плоскости Oxy (кривые 9) мод колебаний на отрезке [20, 25] порождает их взаимную трансформацию. Поэтому при $\theta > 25^\circ$ кривые 7 соответствуют четвертой квазиизгибной в плоскости Oxy моде колебаний, а трансформирующиеся во вторую квазикрутильную моду кривые 9 на отрезке [23, 29] взаимодействуют с первой квазипродольной модой колебаний (кривые 11). Результатом этого взаимодействия является взаимная трансформация мод колебаний.

При $\theta > 29^\circ$ кривые 9 соответствуют первой квазипродольной, а кривые 11 — второй квазикрутильной модам колебаний. На отрезке [58, 60] происходит еще одна взаимная трансформация первой квазипродольной и второй квазикрутильной мод колебаний. В результате этой трансформации при $\theta > 60^\circ$ кривые 11 характеризуют первую квазипродольную моду, вырождающуюся в первую продольную моду колебаний при $\theta = 90^\circ$. При $\theta > 60^\circ$ соответствующие второй квазикрутильной моде колебаний кривые 9 на отрезке [70, 72] взаимодействуют с четвертой квазиизгибной

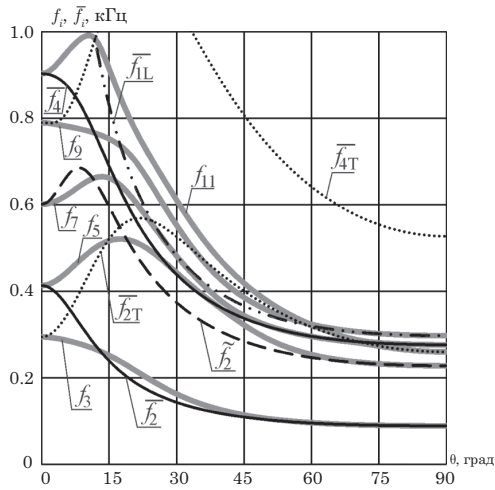


Рис. 4. Зависимости собственных частот взаимодействующих мод колебаний симметричного коробчатого стержня от угла θ .

в плоскости Oxy модой (кривые 7). Порождаемая взаимодействием взаимная трансформация сопровождается изменением мод колебаний. Поэтому при $\theta > 72^\circ$ кривые 7 характеризуют вторую квазикрутильную, а кривые 9 — четвертую квазиизгибную в плоскости Oxy моды колебаний, вырождаясь при $\theta = 90^\circ$ во вторую крутильную и четвертую изгибную в плоскости Oxy моды соответственно.

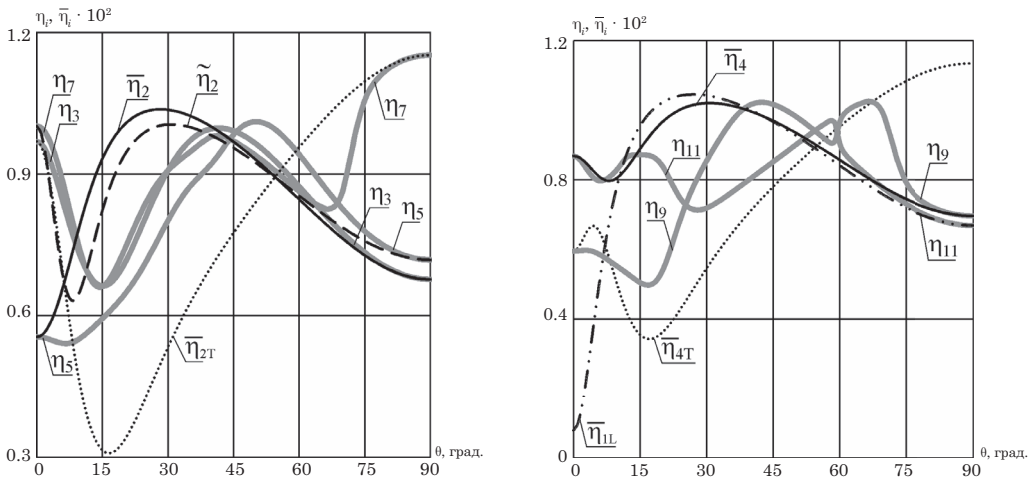


Рис. 5. Зависимости коэффициентов механических потерь взаимодействующих мод колебаний симметричного коробчатого стержня от угла θ .

6. Результаты численных исследований низших тонов связанных продольно-крутильных колебаний асимметричного коробчатого стержня представлены на рис. 6 в виде графиков зависимостей $f_i = f_i(\theta)$ и $\eta_i = \eta_i(\theta)$.

Кривые 1–6 соответствуют первым шести квазикрутильным модам колебаний, а кривые 7 — первой квазипродольной моде. На этом же рисунке приведены кривые

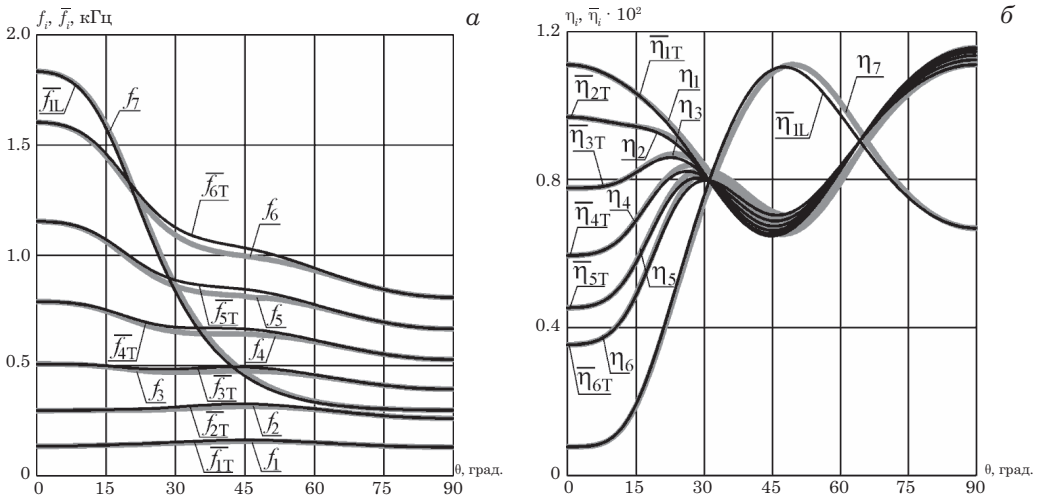


Рис. 6. Зависимости собственных частот (а) и коэффициентов механических потерь (б) продольно-крутильных колебаний асимметричного коробчатого стержня от угла θ .

зависимостей парциальных собственных частот $\bar{f}_i = \bar{f}_i(\theta)$ и парциальных коэффициентов механических потерь $\bar{\eta}_i = \bar{\eta}_i(\theta)$. Расчет величин $\bar{f}_i = \bar{f}_i(\theta)$ и $\bar{\eta}_i = \bar{\eta}_i(\theta)$ производился без учета связанности мод колебаний по соотношениям (3)–(7) при условии $\bar{Q}_{16} = \bar{Q}_{26} = q_{16} = 0$. Численные значения парциальных собственных частот и коэффициентов механических потерь крутильных (б) колебаний определялись по «свободным» комплексным модулям сдвига $G_{xs} = G_{xs}(\theta)$, $G_{xn} = G_{xn}(\theta)$. Величины парциальных собственных частот и коэффициентов механических потерь продольных колебаний вычислялись путем замены «свободного» комплексного модуля упругости $E_{xx} = E_{xx}(\theta)$ на «чистый» комплексный модуль упругости $\bar{E}_{xx} = E_{xx}(\theta)/[1 - \eta_{xs,x}(\theta) \cdot \eta_{x,rs}(\theta)]$, соответствующий полному «запрещению» кручения при продольном деформировании анизотропного стержня.

Анализ представленных зависимостей позволил установить отсутствие трансформации связанных мод колебаний безопорного стержня при продольно-крутильном взаимодействии.

Собственные частоты и коэффициенты механических потерь связанных мод колебаний хорошо описываются приближенным решением, построенным на идеологии «чистых» и «свободных» модулей.

На рис. 7 приведены графики зависимостей $f_i = f_i(\theta)$ и $\eta_i = \eta_i(\theta)$ низших тонов связанных изгибно-изгибных колебаний асимметричного коробчатого стержня, а также графики зависимостей парциальных собственных частот и парциальных коэффициентов механических потерь.

На основании представленных результатов можно сделать вывод, что для безопорного асимметричного композитного коробчатого стержня взаимодействие изгибных мод колебаний в двух взаимно ортогональных плоскостях (изгибно-изгибное взаимодействие) возникает, если одна из связанных мод четная, а другая — нечетная. Следствием изгибно-изгибного взаимодействия является взаимная трансформация связанных мод изгибных колебаний. В результате взаимной трансформации j -я мода колебаний, идентифицируемая при $\theta = 0^\circ$ как i -я изгибная мода в плоскости $0xz$, по

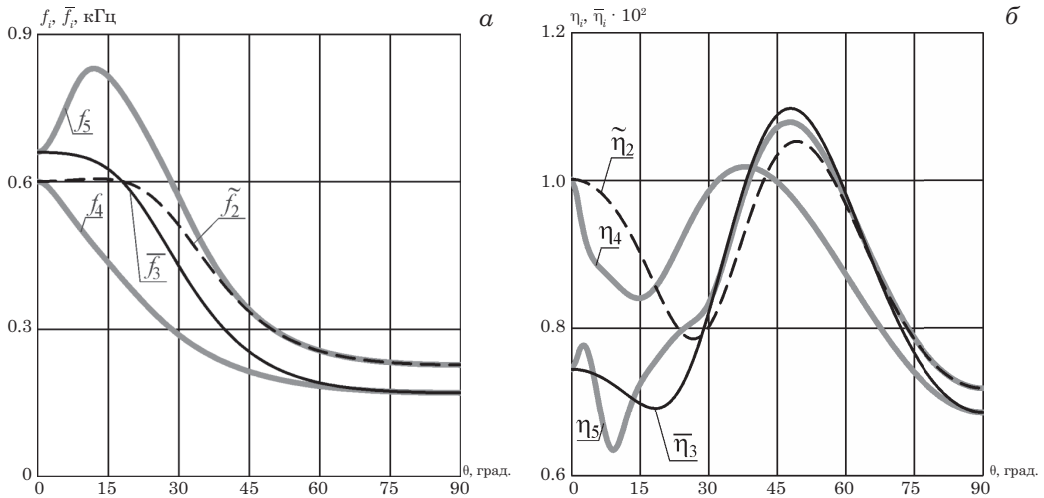


Рис. 7. Зависимости собственных частот (а) и коэффициентов механических потерь (б) изгибно-изгибных колебаний асимметричного коробчатого стержня от угла θ .

мере увеличения угла θ трансформируется в $(i + 1)$ -ю изгибную моду в плоскости Oxy , окончательно вырождаясь в последнюю при $\theta = 90^\circ$. Одновременно $(j + 1)$ -я мода колебаний, идентифицируемая при $\theta = 0^\circ$ как $(i + 1)$ -я изгибная мода в плоскости Oxz , по мере увеличения угла θ трансформируется в i -ю изгибную моду в плоскости Oxy , окончательно вырождаясь в последнюю при $\theta = 90^\circ$.

7. Выполненные исследования позволили установить, что в зависимости от структуры армирования коробчатых стержней в них могут возникать различные виды взаимодействий. Если дифференциальные уравнения собственных колебаний содержат нечетные производные собственных функций по пространственной переменной (симметричный стержень, изгибно-изгибное взаимодействие несимметричного стержня), то при изменении угла ориентации армирующих волокон θ происходит взаимная трансформация связанных мод колебаний. Если же уравнения содержат только четные производные (продольно-крутильное взаимодействие несимметричного стержня), взаимная трансформация связанных мод колебаний не возникает.

Литература

1. Рябов В. М., Ярцев Б. А. Собственные затухающие колебания анизотропных коробчатых стержней из полимерных композиционных материалов. 1. Постановка задачи // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2016. Т. 3(61). Вып. 2. С. 221–229.
2. Treviso A., Van Genechten B., Mundo D., Tournour M. Damping in composite materials: Properties and models // Composites. Part B: Engineering. 2015. Vol. 78. P. 144–152.
2. Brown W. F. Interpretation of torsional frequencies of crystal specimens // Physical Review. Second Series. 1940. Vol. 58, N 11. P. 988–1001.
4. Voigt W. Lehrbuch der Kristallphysik. Leipzig und Berlin. Teubner, 1928. 978 S.

Статья поступила в редколлегию 18 ноября 2015 г.

Сведения об авторах

Рябов Виктор Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор; v.gyabov@spbu.ru
 Ярцев Борис Александрович — доктор технических наук, начальник сектора; boris_yar@mail.ru

NATURAL DAMPED VIBRATIONS OF ANISOTROPIC COMPOSITE BOX BEAMS.

2. NUMERICAL EXPERIMENT

Victor M. Ryabov¹, Boris A. Yartsev²

¹ St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; v.ryabov@spbu.ru

² Krylov State Research Center, Moskovskoye shosse, 44, St. Petersburg, 196158, Russian Federation; boris_yar@mail.ru

The results of numerical studies of the influence of reinforcing fibers orientation's on values of natural frequencies and coefficients of mechanical losses associated vibrations unsupported symmetric and asymmetric box-shaped beams are discussed. The calculations were performed under the assumption of frequency the independence of the real parts of the complex moduli and coefficients of mechanical losses. The vibration modes identified by the form surfaces of the respective native forms. The boundaries of areas of mutual transformation of the interacting modes of vibrations were determined by joint analysis of dependencies and associated partial frequencies, and coefficients of mechanical losses from the orientation angle of reinforcing fibers. It is found that the vibrations of symmetrical box-shaped beam having two primary interactions: bending-torsion and longitudinal shear, combined into a single longitudinal-bending-torsion-shear interaction secondary interaction arising from the transverse shear deformations. For vibrations of asymmetric box-shaped beam arise longitudinal-torsional and flexural-flexural (in two mutually orthogonal planes) interaction. It is shown that in some cases the change of orientation angle of reinforcing fibers is accompanied by mutual the transformation of coupled mode oscillations. If the differential equation of natural vibrations contain derivatives of odd order eigenfunctions in the spatial variable (symmetric beam, flexural-flexural interaction in asymmetric beam), then changes in the orientation angle of reinforcing fibers leads to a mutual transformation of coupled vibration modes. If the equations contain only derivatives of even order (longitudinal-torsional interaction in asymmetric beam), the mutual transformation of the coupled vibration modes does not occur. Refs 4. Figs 7.

Keywords: composite materials, natural vibrations, coupled vibrations.

References

1. Ryabov V. M., Yartsev B. A., “Natural Damped Vibrations of Anisotropic Composite Box Beams 1. Statement of the Problem”, *Vestnik St. Petersburg University. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **3(61)**, Issue 2, 221–229 (2016) [in Russian].
2. Treviso A., Van Genechten B., Mundo D., Tournour M., “Damping in composite materials: Properties and models”, *Composites. Part B: Engineering* **78**, 144–152 (2015).
3. Brown W. F., “Interpretation of torsional frequencies of crystal specimens”, *Physical Review. Second Series* **58(11)**, 988–1001 (1940).
4. Voigt W., *Lehrbuch der Kristallphysik* (Leipzig und Berlin, Teubner, 1928) [in German].

Для цитирования: Рябов В. М., Ярцев Б. А. Собственные затухающие колебания анизотропных коробчатых стержней из полимерных композиционных материалов. 2. Численный эксперимент // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2016. Т. 3 (61). Вып. 3. С. 429–439. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.311

For citation: Ryabov V. M., Yartsev B. A. Natural damped vibrations of anisotropic composite box beams. 2. Numerical experiment. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2016, vol. 3 (61), issue 3, pp. 429–439. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.311