

## МЕХАНИКА

УДК 539.3, 517.928

**ЗАДАЧА ОБ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ  
ОРТОТРОПНОГО СФЕРИЧЕСКОГО СЛОЯ  
В ТРЕХМЕРНОЙ ПОСТАНОВКЕ\****С. М. Бауэр, Л. А. Венатовская, Е. Б. Воронкова, А. Л. Смирнов*Санкт-Петербургский государственный университет,  
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

В статье рассматривается задача о деформации упругого ортотропного сферического слоя под действием нормального давления в трехмерной постановке. Получены асимптотические решения первого приближения, описывающие поведение слоя, для которого величины модулей упругости в меридиональном и окружном направлениях близки. Представленная модель может быть использована, как для оценки влияния повышенного ВГД на изменения формы глазного яблока, так и для описания изменения напряженно-деформированного состояния внешней оболочки глаза при введении внутриглазных инъекций. Исследовано влияние модулей упругости на величину относительного изменения толщины слоя и изменение длины передне-задней оси глаза при повышении внутриглазного давления. Библиогр. 9 назв. Ил. 3.

*Ключевые слова:* сферический слой, задача Ламе, ортотропия.

**1. Введение.** В рамках трехмерной теории упругости рассматривается задача о деформации ортотропного сферического слоя, находящегося под действием нормального давления. Для изотропного сферического слоя эта задача, известная как задача Ламе, описана, например, в [1]. Для трансверсально-изотропного сферического слоя аналитическое решение было получено в [2, 3], а асимптотическое — в [4]. Напряженно-деформированное состояние двухслойного трансверсально-изотропного слоя рассмотрено в работе [5].

Известно, что в большинстве случаев миопия (близорукость) связана с тем, что модуль упругости в меридиональном направлении становится меньше, чем модуль Юнга в направлении параллели и внешняя оболочка глаза под действием внутриглазного давления (ВГД) приобретает форму вытянутого эллипсоида [6, 7]. В данной работе рассматривается ортотропная склера (внешняя оболочка глаза), близкая к трансверсально-изотропной, что позволяет получить уравнения первого приближения для нормального прогиба и меридионального перемещения точки сферического слоя под действием нормального давления. Представленная модель может быть использована как для оценки влияния повышенного ВГД на изменения формы глазного яблока (передне-задней оси и экваториальной зоны), так и для описания изменения напряженно-деформированного состояния внешней оболочки глаза при введении внутриглазных инъекций.

\* Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (гранты № 16-01-00580 А и № 15-01-06311 А) и с использованием оборудования ресурсного центра Научного парка СПбГУ «Обсерватория экологической безопасности».

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2016

**2. Уравнения равновесия в перемещениях.** Рассматривается ортотропный сферический слой с внутренним радиусом  $R_1$  и внешним —  $R_2$ , толщиной  $h = R_2 - R_1$  (рис. 1).

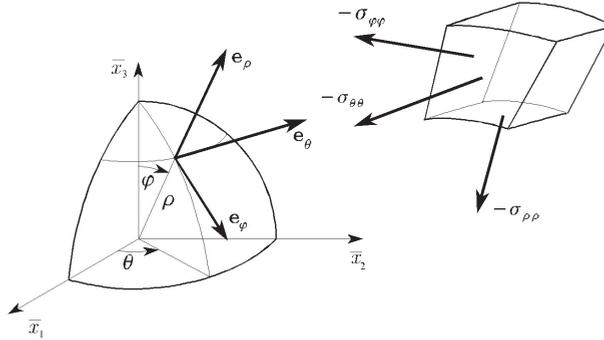


Рис. 1. Ортотропный сферический слой.

Положение точки сферического слоя описывается сферическими координатами:  $\rho$  — радиальная координата,  $\varphi$  — координата в меридиональном направлении,  $\theta$  — координата в окружном направлении. Уравнения равновесия сферического слоя имеют вид [1]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{\rho\rho}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\rho\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho \sin \varphi} \frac{\partial \sigma_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{\rho \sin \varphi} \sigma_{\rho\varphi} + \frac{1}{\rho} (2\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\theta\theta}) + f_{\rho} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{\varphi\rho}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho \sin \varphi} \frac{\partial \sigma_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + \frac{3}{\rho} \sigma_{\varphi\rho} + \frac{\cos \varphi}{\rho \sin \varphi} (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\theta\theta}) + f_{\varphi} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{\theta\rho}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho \sin \varphi} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{3}{\rho} \sigma_{\theta\rho} + \frac{2 \cos \varphi}{\rho \sin \varphi} \sigma_{\theta\varphi} + f_{\theta} &= 0, \end{aligned}$$

здесь  $\sigma_{\rho\rho}$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi}$  и  $\sigma_{\theta\theta}$  — нормальные напряжения,  $\sigma_{\rho\varphi}$ ,  $\sigma_{\rho\theta}$ ,  $\sigma_{\varphi\theta}$  — касательные напряжения,  $f_{\rho}$ ,  $f_{\varphi}$ ,  $f_{\theta}$  — проекции внешних сил на соответствующие направления.

Будем рассматривать осесимметричную задачу в отсутствие внешних сил. В этом случае перемещения не зависят от угла  $\theta$ , а касательные напряжения  $\sigma_{\rho\theta}$ ,  $\sigma_{\varphi\theta}$  и деформации  $\varepsilon_{\rho\theta}$ ,  $\varepsilon_{\varphi\theta}$  равны нулю. Таким образом, система уравнений равновесия примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{\rho\rho}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\rho\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\cos \varphi}{\rho \sin \varphi} \sigma_{\rho\varphi} + \frac{1}{\rho} (2\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\theta\theta}) &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{\rho\varphi}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{3}{\rho} \sigma_{\rho\varphi} + \frac{\cos \varphi}{\rho \sin \varphi} (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\theta\theta}) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Перемещения точки сферического слоя задаются проекциями вектора перемещений  $(w, u, v)$  в направлениях  $\rho$ ,  $\varphi$ ,  $\theta$  соответственно. Для осесимметричной задачи компонента  $v$  равна нулю. Деформации и перемещения сферического слоя связаны соотношениями [8]

$$\varepsilon_{\rho\rho} = \frac{\partial w}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{w}{\rho}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \cot \varphi \frac{u}{\rho} + \frac{w}{\rho}, \quad \varepsilon_{\rho\varphi} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{u}{\rho} + \frac{\partial u}{\partial \rho} \right). \quad (2)$$

Уравнения состояния, связывающие напряжения и деформации, для ортотропного тела содержат 9 независимых упругих постоянных ( $E_\rho$ ,  $E_\varphi$ ,  $E_\theta$  — модули Юнга,  $\nu_{\varphi\rho}$ ,  $\nu_{\theta\rho}$ ,  $\nu_{\theta\varphi}$  — коэффициенты Пуассона,  $G_{\rho\varphi}$ ,  $G_{\varphi\theta}$ ,  $G_{\rho\theta}$  — модули сдвига) [8] и имеют вид

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\rho\rho} &= \frac{1}{E_\rho}\sigma_{\rho\rho} - \frac{\nu_{\rho\varphi}}{E_\varphi}\sigma_{\varphi\varphi} - \frac{\nu_{\rho\theta}}{E_\theta}\sigma_{\theta\theta}, & \varepsilon_{\rho\theta} &= \frac{\sigma_{\rho\theta}}{G_{\rho\theta}}, \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} &= -\frac{\nu_{\varphi\rho}}{E_\rho}\sigma_{\rho\rho} + \frac{1}{E_\varphi}\sigma_{\varphi\varphi} - \frac{\nu_{\varphi\theta}}{E_\theta}\sigma_{\theta\theta}, & \varepsilon_{\varphi\theta} &= \frac{\sigma_{\varphi\theta}}{G_{\varphi\theta}}, \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= -\frac{\nu_{\theta\rho}}{E_\rho}\sigma_{\rho\rho} - \frac{\nu_{\theta\varphi}}{E_\varphi}\sigma_{\varphi\varphi} + \frac{1}{E_\theta}\sigma_{\theta\theta}, & \varepsilon_{\rho\varphi} &= \frac{\sigma_{\rho\varphi}}{G_{\rho\varphi}}.\end{aligned}\quad (3)$$

В силу симметрии соотношений (3) справедливы равенства

$$E_\varphi\nu_{\varphi\rho} = E_\rho\nu_{\rho\varphi}, \quad E_\varphi\nu_{\varphi\theta} = E_\theta\nu_{\theta\varphi}, \quad E_\theta\nu_{\theta\rho} = E_\rho\nu_{\rho\theta}. \quad (4)$$

Введем следующие обозначения [8]:

$$\begin{aligned}\nu_{\varphi\theta}^* &= \frac{\nu_{\varphi\theta} + \nu_{\varphi\rho}\nu_{\rho\theta}}{1 - \nu_{\theta\rho}\nu_{\rho\theta}}, & \nu_{\varphi\rho}^* &= \frac{\nu_{\varphi\rho} + \nu_{\varphi\theta}\nu_{\theta\rho}}{1 - \nu_{\theta\rho}\nu_{\rho\theta}}, & \nu_{\theta\varphi}^* &= \frac{\nu_{\theta\varphi} + \nu_{\theta\rho}\nu_{\rho\varphi}}{1 - \nu_{\varphi\rho}\nu_{\rho\varphi}}, \\ \nu_{\theta\rho}^* &= \frac{\nu_{\theta\rho} + \nu_{\theta\varphi}\nu_{\varphi\rho}}{1 - \nu_{\varphi\rho}\nu_{\rho\varphi}}, & \nu_{\rho\varphi}^* &= \frac{\nu_{\rho\varphi} + \nu_{\theta\varphi}\nu_{\theta\rho}}{1 - \nu_{\varphi\theta}\nu_{\theta\varphi}}, & \nu_{\rho\theta}^* &= \frac{\nu_{\rho\theta} + \nu_{\varphi\theta}\nu_{\rho\varphi}}{1 - \nu_{\varphi\theta}\nu_{\theta\varphi}},\end{aligned}\quad (5)$$

$$E_\rho^* = \frac{E_\rho}{1 - \nu_{\rho\theta}^*\nu_{\theta\rho} - \nu_{\rho\varphi}^*\nu_{\varphi\rho}}, \quad E_\varphi^* = \frac{E_\varphi}{1 - \nu_{\varphi\theta}^*\nu_{\theta\varphi} - \nu_{\varphi\rho}^*\nu_{\rho\varphi}}, \quad E_\theta^* = \frac{E_\theta}{1 - \nu_{\theta\varphi}^*\nu_{\varphi\theta} - \nu_{\theta\rho}^*\nu_{\rho\theta}}, \quad (6)$$

причем имеют место равенства

$$E_\rho^*\nu_{\rho\varphi}^* = E_\varphi^*\nu_{\varphi\rho}^*, \quad E_\varphi^*\nu_{\varphi\theta}^* = E_\theta^*\nu_{\theta\varphi}^*, \quad E_\theta^*\nu_{\theta\rho}^* = E_\rho^*\nu_{\rho\theta}^*. \quad (7)$$

Подставляя (2) и (3) в (1), с учетом обозначений (5)–(7), получим уравнения равновесия в перемещениях в виде

$$\begin{aligned}c_0 \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + c_1 \frac{\partial w}{\partial \rho} + c_2 \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + c_3 \frac{\partial w}{\partial \varphi} + c_4 w + c_5 \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \varphi} + c_6 \frac{\partial u}{\partial \rho} + c_7 \frac{\partial u}{\partial \varphi} + c_8 u = 0, \\ d_0 \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + d_1 \frac{\partial u}{\partial \rho} + d_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + d_3 \frac{\partial u}{\partial \varphi} + d_4 u + d_5 \frac{\partial^2 w}{\partial \rho \partial \varphi} + d_6 \frac{\partial w}{\partial \rho} + d_7 \frac{\partial w}{\partial \varphi} + d_8 w = 0,\end{aligned}\quad (8)$$

где использованы обозначения

$$\begin{aligned}c_0 &= 1, \quad c_1 = \frac{2}{\rho}, \quad c_2 = \frac{1}{2\rho^2} \frac{G_{\rho\varphi}}{E_\rho^*}, \quad c_3 = c_2 \cot \varphi, \\ c_4 &= \frac{1}{\rho^2} \left( \nu_{\rho\varphi}^* + \nu_{\rho\theta}^* - \frac{E_\varphi^* + 2\nu_{\varphi\theta}^* E_\varphi^* + E_\theta^*}{E_\rho^*} \right), \\ c_5 &= \frac{1}{\rho} \left( \nu_{\rho\varphi}^* + \frac{G_{\rho\varphi}}{2E_\rho^*} \right), \quad c_6 = \frac{\cot \varphi}{\rho} \left( \nu_{\rho\theta}^* + \frac{G_{\rho\varphi}}{2E_\rho^*} \right), \\ c_7 &= \frac{1}{\rho^2} \left( \nu_{\rho\varphi}^* - \frac{E_\varphi^*}{E_\rho^*} (1 + \nu_{\varphi\theta}^*) - \frac{G_{\rho\varphi}}{2E_\rho^*} \right), \\ c_8 &= \frac{\cot \varphi}{\rho^2} \left( \nu_{\rho\theta}^* - \frac{E_\varphi^* \nu_{\varphi\theta}^* + E_\theta^*}{E_\rho^*} - \frac{G_{\rho\varphi}}{2E_\rho^*} \right);\end{aligned}\quad (9)$$

$$\begin{aligned}
d_0 &= 1, & d_1 &= \frac{2}{\rho}, & d_2 &= \frac{2}{\rho^2} \frac{E_\varphi^*}{G_{\rho\varphi}}, & d_3 &= d_2 \cot \varphi, \\
d_4 &= -\frac{2}{\rho^2} \left( 1 + \frac{E_\varphi^* \nu_{\varphi\theta}^*}{G_{\rho\varphi}} + \frac{E_\theta^*}{G_{\rho\varphi}} \cot^2 \varphi \right), \\
d_5 &= \frac{1}{\rho} \left( 1 + 2 \frac{E_\rho^* \nu_{\rho\varphi}^*}{G_{\rho\varphi}} \right), & d_6 &= \frac{2 \cot \varphi}{\rho} \frac{E_\rho^*}{G_{\rho\varphi}} (\nu_{\rho\varphi}^* - \nu_{\rho\theta}^*), \\
d_7 &= \frac{2}{\rho^2} \left( 1 + \frac{E_\varphi^*}{G_{\rho\varphi}} (1 + \nu_{\varphi\theta}^*) \right), & d_8 &= \frac{2 \cot \varphi}{\rho^2} \frac{E_\varphi^* - E_\theta^*}{G_{\rho\varphi}}.
\end{aligned} \tag{10}$$

**3. Граничные условия.** Будем рассматривать половину сферического слоя, т. е. область  $0 \leq \varphi \leq \pi/2$  и  $R_1 \leq \rho \leq R_2$ .

На границе  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \pi/2$  полагаем

$$u(\rho, 0) = u\left(\rho, \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \varphi}(\rho, 0) = \frac{\partial w}{\partial \varphi}\left(\rho, \frac{\pi}{2}\right) = 0. \tag{11}$$

На границе  $\rho = R_1$  и  $\rho = R_2$  считаем заданными значения внутреннего  $P_1$  и внешнего  $P_2$  давлений:

$$\sigma_{\rho\rho}(R_1, \varphi) = -P_1, \quad \sigma_{\rho\rho}(R_2, \varphi) = -P_2, \quad \sigma_{\rho\varphi}(R_1, \varphi) = \sigma_{\rho\varphi}(R_2, \varphi) = 0, \tag{12}$$

причем напряжения имеют вид

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho\rho} &= E_\rho^* \left( \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{\nu_{\rho\varphi}^* + \nu_{\rho\theta}^*}{\rho} w + \frac{\nu_{\rho\varphi}^*}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\nu_{\rho\theta}^* \cot(\varphi)}{\rho} u \right), \\
\sigma_{\rho\varphi} &= G_{\rho\varphi} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{u}{\rho} + \frac{\partial u}{\partial \rho} \right).
\end{aligned}$$

Уравнения (8) и граничные условия (11), (12) образуют краевую задачу.

**4. Ограничения на упругие постоянные.** Как было отмечено выше, описание ортотропного материала включает 9 независимых упругих постоянных. В силу положительной определенности упругого потенциала его коэффициенты должны удовлетворять критерию Сильвестра, из которого следуют неравенства [8]

$$\begin{aligned}
\nu_{\rho\varphi} &< \sqrt{\frac{E_\varphi}{E_\rho}}, & \nu_{\rho\theta} &< \sqrt{\frac{E_\theta}{E_\rho}}, & \nu_{\varphi\theta} &< \sqrt{\frac{E_\theta}{E_\varphi}}, \\
\nu_{\rho\varphi} \nu_{\varphi\theta} \nu_{\theta\rho} &< \frac{1}{2} \left( 1 - \nu_{\rho\varphi}^2 \frac{E_\rho}{E_\varphi} - \nu_{\varphi\theta}^2 \frac{E_\varphi}{E_\theta} - \nu_{\theta\rho}^2 \frac{E_\theta}{E_\rho} \right).
\end{aligned} \tag{13}$$

**5. Ортотропный материал, близкий к трансверсально-изотропному.**

**Метод возмущений.** Рассмотрим сферический слой из ортотропного материала, для упругих постоянных которого выполнены равенства

$$\begin{aligned}
E_\rho &= E_1, & E_\varphi &= E, & E_\theta &= E(1 + \mu), & \nu_{\rho\varphi} &= \nu, & \nu_{\rho\rho} &= \nu_{\theta\rho} = \nu_1, \\
G_{\varphi\theta} &= G + \mu G' = \frac{E}{2(1 + \nu)} + \mu G', & G_{\rho\varphi} &= G_1, & G_{\rho\theta} &= G_1 + \mu G'',
\end{aligned}$$

где  $\mu \ll 1$ . При  $\mu = 0$  материал становится трансверсально-изотропным.

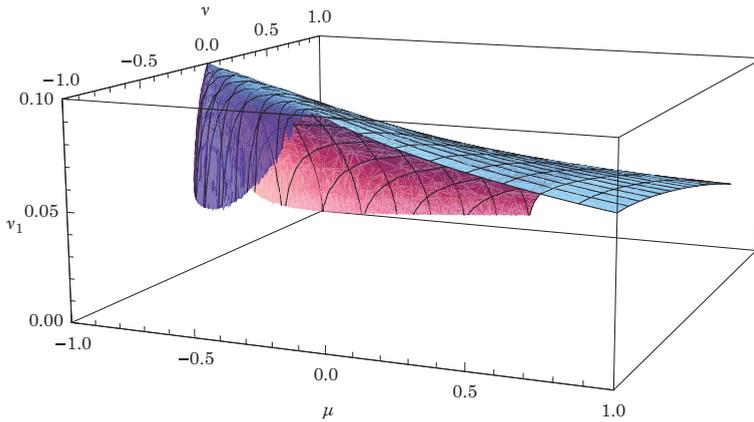


Рис. 2. Поверхность, ограничивающая сверху область задания параметров  $(\mu, \nu, \nu_1)$  при  $E/E_1 = 0.01$ .

Ограничения на упругие постоянные (13) становятся такими (см. рис. 2):

$$\nu < \frac{1}{1 + \mu}, \quad \nu_1 < \sqrt{\frac{E_1}{E}} \cdot \min \left( 1, \sqrt{\frac{1}{1 + \mu}}, \sqrt{\frac{1 + \mu - \nu^2}{(1 + \mu)(2 + \mu + 2\nu)}} \right). \quad (14)$$

Решение уравнений (8) будем искать в виде

$$w(\rho, \varphi) = w_0(\rho) + \mu w_1(\rho, \varphi) + O(\mu^2), \quad u(\rho, \varphi) = \mu u_1(\rho, \varphi) + O(\mu^2).$$

Уравнение нулевого приближения для функции  $w_0(\rho)$  совпадает с рассмотренным в [4] уравнением для трансверсально-изотропного слоя.

Уравнения первого приближения таковы:

$$\begin{aligned} m_0 \frac{\partial^2 w_1}{\partial \rho^2} + m_1 \frac{\partial w_1}{\partial \rho} + m_2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial \varphi^2} + m_3 \frac{\partial w_1}{\partial \varphi} + m_4 w_1 + m_5 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \rho \partial \varphi} + m_6 \frac{\partial u_1}{\partial \rho} + \\ + m_7 \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} + m_8 u_1 + m_9 w_0 = 0, \\ n_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \rho^2} + n_1 \frac{\partial u_1}{\partial \rho} + n_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \varphi^2} + n_3 \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} + n_4 u_1 + n_5 \frac{\partial^2 w_1}{\partial \rho \partial \varphi} + n_6 \frac{\partial w_1}{\partial \varphi} + \\ + n_7 \frac{\partial w_0}{\partial \rho} + n_8 w_0 = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь использованы обозначения

$$\begin{aligned} m_0 = 1, \quad m_1 = \frac{2}{\rho}, \quad m_2 = \frac{G_1}{2\rho^2 E_{\rho_0}^*}, \quad m_3 = m_2 \cot \varphi, \quad m_4 = -\frac{2}{\rho^2} \frac{E(1 - \nu_1)}{E_1(1 - \nu)}, \\ m_5 = \frac{1}{\rho} \left( \frac{G_1}{2E_{\rho_0}^*} + \frac{E\nu_1}{E_1(1 - \nu)} \right), \quad m_6 = m_5 \cot \varphi, \\ m_7 = -\frac{1}{\rho^2} \left( \frac{E(1 - \nu_1)}{E_1(1 - \nu)} + \frac{G_1}{2E_{\rho_0}^*} \right), \quad m_8 = m_7 \cot \varphi, \quad m_9 = -\frac{1}{\rho^2} \frac{E(1 - \nu_1)}{E_1(1 - \nu)^2}, \\ E_{\rho_0}^* = \frac{E_1^2(1 - \nu)}{E_1(1 - \nu) - 2E\nu_1^2}; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
n_0 &= 1, \quad n_1 = \frac{2}{\rho}, \quad n_2 = \frac{2E_{\varphi_0}^*}{G_1\rho^2}, \quad n_3 = n_2 \cot \varphi, \\
n_4 &= -\frac{2}{\rho^2} \left( 1 + \frac{E_{\varphi\theta_0}^*}{G_1} + \frac{E_{\varphi_0}^*}{G_1} \cot^2 \varphi \right), \quad n_5 = \frac{1}{\rho} \left( 1 + \frac{2E_{\rho\varphi_0}^*}{G_1} \right), \\
n_6 &= \frac{2}{\rho^2} \left( 1 + \frac{2E_{\rho\varphi_0}^*}{G_1\nu_1} \right), \quad n_7 = -\frac{2 \cot \varphi}{\rho} \frac{E_{\rho\varphi_0}^*}{G_1(1+\nu)}, \quad n_8 = \frac{n_7}{\nu_1\rho}, \\
E_{\varphi_0}^* &= \frac{E(E_1 - E\nu_1^2)}{(1+\nu)(E_1(1-\nu) - 2E\nu_1^2)}, \quad E_{\rho\varphi_0}^* = \frac{EE_1\nu_1}{E_1(1-\nu) - 2E\nu_1^2}, \\
E_{\varphi\theta_0}^* &= \frac{E(E_1\nu + E\nu_1^2)}{(1+\nu)(E_1(1-\nu) - 2E\nu_1^2)}.
\end{aligned} \tag{17}$$

Граничные условия для функций первого приближения принимают вид

$$u_1(\rho, 0) = u_1\left(\rho, \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \frac{\partial w_1}{\partial \varphi}(\rho, 0) = \frac{\partial w_1}{\partial \varphi}\left(\rho, \frac{\pi}{2}\right) = 0, \tag{18}$$

$$\sigma_{\rho\rho}^1(R_1, \varphi) = \sigma_{\rho\rho}^1(R_2, \varphi) = \sigma_{\rho\varphi}^1(R_1, \varphi) = \sigma_{\rho\varphi}^1(R_2, \varphi) = 0, \tag{19}$$

причем

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho\rho}^1 &= l_0 \frac{\partial w_1}{\partial \rho} + l_1 w_1 + l_2 \frac{\partial w_0}{\partial \rho} + l_3 w_0 + l_4 \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} + l_5 u_1, \\
\sigma_{\rho\varphi}^1 &= k_1 \frac{\partial w_1}{\partial \varphi} + k_2 u_1 + k_3 \frac{\partial u_1}{\partial \rho}.
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
l_0 &= 1, \quad l_1 = \frac{2}{\rho} \frac{E\nu_1}{E_1(1-\nu)}, \quad l_2 = \frac{E\nu_1^2}{(1-\nu)(E_1(1-\nu) - 2E\nu_1^2)}, \\
l_3 &= \frac{l_2}{\nu_1\rho}, \quad l_4 = \frac{E\nu_1}{E_1(1-\nu)\rho}, \quad l_5 = l_4 \cot(\varphi). \\
k_1 &= \frac{G_1}{2\rho}, \quad k_2 = -\frac{G_1}{2\rho}, \quad k_3 = \frac{G_1}{2}.
\end{aligned}$$

Таким образом, краевая задача для первого приближения состоит из уравнений (15) и граничных условий (18), (19). Заметим, что изменения модулей сдвига ( $G', G''$ ) не входят в уравнения и граничные условия первого приближения.

Численное решение граничной задачи, полученное методом конечных разностей, сравнивалось с решением, полученным в конечно-элементном пакете Comsol Multiphysics 5.0. В качестве примера рассматривался ортотропный слой со следующими значениями параметров:  $E_{\varphi} = E = 14$  МПа,  $E_{\rho} = E_1 = 1.26$  МПа,  $\nu = 0.48$ ,  $\nu_1 = 0.03$ ,  $R_2 = 12$  мм,  $R_1 = 0.9R_2$  [9]. На внутренней поверхности слоя  $\rho = R_1$  задано давление  $P_1 = 20 \times 133.3$  Па. Были исследованы два случая:  $\mu = -0.3$  и  $\mu = 0.3$ .

На рис. 3 представлены профили ортотропного слоя до и после деформации, а также распределения перемещений в слое.

Полученное численное решение позволяет по соотношению для нормального перемещения получить изменение толщины внешней обложки глаза под действием внутреннего давления, а также оценить удлинение передне-задней оси глазного яблока при увеличении внутриглазного давления.

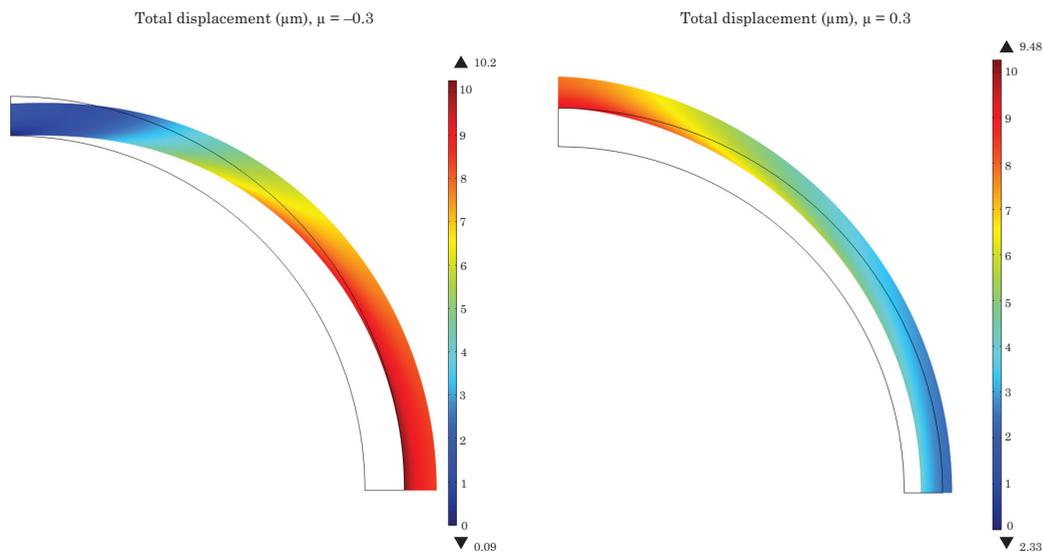


Рис. 3. Распределение перемещений в ортотропном слое после деформации при  $E_\theta/E_\varphi = 0.7$  ( $\mu = -0.3$ ) (слева) и  $E_\theta/E_\varphi = 1.3$  ( $\mu = 0.3$ ) (справа).

**6. Заключение.** Полученные асимптотические формулы могут быть использованы для качественного описания изменения напряженно-деформированного состояния внешней оболочки глаза при введении внутриглазных инъекций, а в некоторых случаях — для оценки соотношения модулей упругости в меридиональном направлении и направлении параллели. Решение задачи позволяет оценить изменение передне-задней оси глаза при повышении внутриглазного давления при миопии или гиперметропии, а также при таких заболеваниях, как глаукома.

## Литература

1. Атанасюкович Т., Гуран А. Лекции по теории упругости. С.-Петербург, 2003. 400 с.
2. Bauer S. M., Voronkova E. B. Nonclassical shell theories in ocular biomechanics // *Advanced Structured Materials*. 2015. Vol. 45. P. 81–97.
3. Kotliar K. A., Maier M. A., Bauer S. B., Feucht N. A., Lohmann C. A., Lanzl I. A. Effect of intravitreal injections and volume changes on intraocular pressure: clinical results and biomechanical model // *Acta Ophthalmologica Scandinavica*. 2007. Vol. 85, N 7. P. 777–781.
4. Bauer S. M., Smirnov A. L. Axisymmetric Deformations of the Orthotropic Spherical Layer under Normal Pressure // *Vestnik St. Petersburg Univ.: Math*. 2015. Vol. 48, N 1. P. 35–40.
5. Карамичина Л. А. О деформации двухслойной трансверсально-изотропной сферической оболочки // *Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия*. 2011. Вып. 2. С. 133–138.
6. Danilov N. A., Ignatieva N. Yu., Iomdina E. N., Semenova S. A., Rudenskaya G. N., Grokhovskaya T. E., Lunin V. V. Stabilization of scleral collagen by glycerol aldehyde cross-linking // *Biochimica et Biophysica Acta*. 2008. Vol. 1780. P. 764–772.
7. Данилов Н. А., Игнатъева Н. Ю., Иомдина Е. Н., Арутюнян Л. Л., Гроховская Т. Е., Лунин В. В. Исследование склеры глаукомных глаз с помощью физико-химического анализа // *Биофизика*. М.: Наука, 2011. Т. 56, № 3. С. 520–526.
8. Родионова В. А., Тутаев Б. Ф., Черныш К. Ф. Прикладная теория анизотропных пластин и оболочек. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1996. 278 с.
9. Иомдина Е. Н. Механические свойства тканей глаза человека // *Современные проблемы биомеханики*. М.: Изд-во МГУ, 2006. Вып. 11. С. 183–200.

Статья поступила в редколлегию 10 января 2016 г.

Бауэр Светлана Михайловна — доктор физико-математических наук, профессор; s\_bauer@mail.ru

Венатовская Людмила Александровна — кандидат физико-математических наук, доцент;  
l.venatovskaya@spbu.ru

Воронкова Ева Боруловна — кандидат физико-математических наук, доцент; e.voronkova@spbu.ru

Смирнов Андрей Леонидович — кандидат физико-математических наук, доцент;  
a\_l\_smirnov@mail.ru

### THREE-DIMENSIONAL PROBLEM OF AXISYMMETRIC DEFORMATIONS OF THE ORTHOTROPIC SPHERICAL LAYER

Svetlana M. Bauer, Ludmila A. Venatovskaya, Eva B. Voronkova, Andrei L. Smirnov

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation;  
s\_bauer@mail.ru, l.venatovskaya@spbu.ru, e.voronkova@spbu.ru, a\_l\_smirnov@mail.ru

The 3D problem of deformation of the elastic orthotropic spherical layer under normal pressure applied on the outer and inner surfaces is analyzed. The asymptotic solutions of the first approximation are obtained for a slightly orthotropic layer, i. e. for which the values of elastic moduli in meridional and circumferential directions are close. The obtained solutions are used in analysis of the scleral shell under intraocular pressure and may also be used in solution of the inverse problem, i. e. in analysis of the stress-strain state of a human eye under injection. The influence of elastic modulus in meridional and circumferential directions on the change of the relative layer thickness under normal pressure and length change of the anteroposterior axis of the eye due to an increase in intraocular pressure is studied. Refs 9. Figs 3.

*Keywords:* spherical layer, Lamé problem, orthotropy.

#### References

1. Atanackovic T. M., Guran A., “Theory of Elasticity for Scientists and Engineers” (Birkhäuser, 2000).
2. Bauer S. M., Voronkova E. B., “Nonclassical shell theories in ocular biomechanics”, *Advanced Structured Materials* **45**, 81–97 (2015).
3. Kotliar K. A., Maier M. A., Bauer S. B., Feucht N. A., Lohmann C. A., Lanzl I. A., “Effect of intravitreal injections and volume changes on intraocular pressure: clinical results and biomechanical model”, *Acta Ophthalmologica Scandinavica* **85**(7), 777–781 (2007).
4. Bauer S. M., Smirnov A. L., “Axisymmetric Deformations of the Orthotropic Spherical Layer under Normal Pressure”, *Vestnik St. Petersburg Univ.: Math.* **48**(1), 35–40 (2015).
5. Karamshina L. A., “On deformation of transversally isotropic two-layered spherical shell”, *Vestnik of St. Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy* issue 2, 133–138 (2011).
6. Danilov N. A., Ignatieva N. Yu., Iomdina E. N., Semenova S. A., Rudenskaya G. N., Grokhovskaya T. E., Lunin V. V., “Stabilization of scleral collagen by glycerol aldehyde cross-linking”, *Biochimica et Biophysica Acta* **1780**, 764–772 (2008).
7. Danilov N. A., Ignatieva N. Yu., Iomdina E. N., Semenova S. A., Rudenskaya G. N., Grokhovskaya T. E., Lunin V. V., “Sclera of the glaucomatous eye: Physicochemical analysis”, *Biophysics* **56**(3), 520–526 (Nauka Press, Moscow, 2011) [in Russian].
8. Rodionova V. A., Titaev V. F., Chernykh K. F., *Applied Theory of Anisotropic Plates and Shells*, (St. Petersburg Univ. Press, 1996, 278 p.) [in Russian].
9. Iomdina E. N., “Mechanical properties of the human eye tissue”, *Modern Problems of Biomechanics*, Issue 11, 183–200 (Moscow University Press, 2006) [in Russian].

**Для цитирования:** Бауэр С. М., Венатовская Л. А., Воронкова Е. Б., Смирнов А. Л. Задача об осесимметричной деформации ортотропного сферического слоя в трехмерной постановке // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2016. Т. 3 (61). Вып. 3. С. 449–456. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.313

**For citation:** Bauer S. M., Venatovskaya L. A., Voronkova E. B., Smirnov A. L. Three-dimensional problem of axisymmetric deformations of the orthotropic spherical layer. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2016, vol. 3(61), issue 3, pp. 449–456. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.313