АСТРОНОМИЯ

УДК 521.14

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОТЕНЦИАЛА НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЬНЫХ ТЕЛ*

Э. Д. Кузнецов[1], *К. В. Холшевников*[2,3], *В. Ш. Шайдулин*[2,4]

[1] Уральский федеральный университет,
Российская Федерация, 620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19
[2] Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9
[3] Институт прикладной астрономии РАН,
Российская Федерация, 191187, Санкт-Петербург, наб. Кутузова, 10
[4] Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН,
Российская Федерация, 196140, Санкт-Петербург, Пулковское шоссе, 65-1

Наиболее употребительным представлением гравитационного потенциала компактного тела T во внешнем пространстве в сферических координатах r, θ, λ служит ряд Лапласа по сферическим функциям $Y_n(\theta, \lambda)$. Для тел нерегулярной структуры известна оценка чебышёвской нормы (максимум модуля функции на сфере): $\langle Y_n \rangle \leqslant Cn^{-5/2}$, $C = \mathrm{const}$, $n \geqslant 1$. В работе получено явное выражение $Y_n(\theta, \lambda)$ для нескольких модельных тел. Во всех случаях (за исключением одного) справедлива указанная оценка $\langle Y_n \rangle$ *при точном показателе* $5/2$. В одном случае, где тело T касается объемлющей T сферы, $\langle Y_n \rangle$ убывают значительно быстрее. Именно, $\langle Y_n \rangle \leqslant Cn^{-5/2}p^n$, $C = \mathrm{const}$, $n \geqslant 1$. Величина $p < 1$ равна расстоянию от начала координат до ребра поверхности T, выраженному в радиусах объемлющей сферы. Точность показателя $5/2$ в общем случае подтверждена также на примерах тел, более или менее напоминающих реальные небесные тела. Библиогр. 16 назв. Ил. 6.

Ключевые слова: гравитационный потенциал, ряд Лапласа, скорость сходимости.

Введение. Будем рассматривать гравитационный потенциал V компактного тела T во внешнем пространстве в сферических координатах r, θ, λ. Для представления этого потенциала в [1–5] предлагается ряд Лапласа

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{M}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} Y_n(\theta, \lambda). \tag{1}$$

Здесь M — масса T, R — масштабный множитель, Y_n — безразмерная сферическая функция; постоянная тяготения принята равной единице. В общем случае сфери-

*Работа выполнена при финансовой поддержке Постановления № 211 Правительства Российской Федерации (контракт № 02.A03.21.0006), РФФИ (грант 14-02-00804) и Программы проведения фундаментальных исследований СПбГУ по приоритетным направлениям (грант 6.37.341.2015).

ческая функция зависит от $2n+1$ параметров (коэффициентов Стокса). Разработаны и применяются на практике эффективные методы определения коэффициентов Стокса по спутниковым измерениям [6–8]. В случае осевой симметрии выполняется $Y_n(\theta,\lambda) \equiv Y_n(\theta) = c_n P_n(\cos\theta)$, и остается лишь один параметр c_n. Как обычно, P_n обозначает многочлен Лежандра со стандартной нормировкой $P_n(1) = 1$. Формула (1) принимает вид

$$V(r,\theta) = \frac{M}{R} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta). \tag{2}$$

Как принято в теоретических исследованиях, за R примем радиус объемлющей сферы, содержащей T внутри себя и имеющей с T хотя бы одну общую точку.

Скорость сходимости ряда (1) существенно зависит от гладкости распределения масс в теле T. Чем выше гладкость, тем быстрее сходится ряд, как это имеет место в теории приближения функций отрезками рядов [9–11]. Правда, в нашем случае понятие гладкости определяется довольно сложно [12]. Так, плотность может испытывать разрывы даже при пересечении поверхностей равной плотности, лишь бы сами они были достаточно гладкими. В то же время наличие ребер поверхности ∂T даже однородного тела T катастрофически снижает гладкость распределения масс, поскольку теряет гладкость ∂T, которую можно рассматривать как поверхность равной плотности.

Для приложений одним из наиболее интересных классов тел служит класс $\mathcal{T}$ компактных тел с ограниченной интегрируемой плотностью $\varrho(r,\theta,\lambda)$, имеющей равномерно ограниченную вариацию вдоль любой окружности с центром в начале координат. Все реальные небесные тела принадлежат этому классу. Для тел $T \in \mathcal{T}$ известна оценка [12]

$$\langle Y_n \rangle \leqslant \frac{C}{n^{5/2}}\,. \tag{3}$$

Через C здесь и ниже обозначены различные постоянные, зависящие от свойств плотности ϱ, $\langle\cdot\rangle$ — чебышёвская норма (максимум модуля функции на сфере). Мы считаем $n \geqslant 1$, так как Y_0 тождественно равно единице.

Заметим, что впервые подобная оценка (с делителем n^2 вместо $n^{5/2}$) получена М. С. Яров-Яровым [13].

В осесимметричном случае имеем

$$\langle Y_n \rangle = |c_n|. \tag{4}$$

Оценка (3) точна в следующем смысле. Существует тело $T \in \mathcal{T}$ такое, что при некотором C справедливо неравенство (3), но при любом фиксированном $\sigma > 5/2$ выполняется

$$\sup n^{\sigma} \langle Y_n \rangle = \infty. \tag{5}$$

Несколько подтверждающих примеров приведено в [12]. В настоящей статье мы расширим список примеров, по-прежнему ограничиваясь однородными телами вращения, для которых справедливо (4). В этих модельных примерах (для первых четырех коэффициенты Стокса c_n взяты из [12]) тела слабо напоминают реальные планеты и спутники. Однако затем из них как из элементов мы строим более реалистичные фигуры.

1. Полушар в системе отсчета с началом в центре шара. Для четных положительных n имеем $c_n = 0$. Для нечетных n справедливо

$$c_n = 3(-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{(n-2)!!}{(n+3)!!}.$$

Применяя формулу Валлиса, получим

$$|c_n| \sim \frac{3\sqrt{2/\pi}}{n^{5/2}}. \tag{6}$$

2. Шаровой сектор в системе отсчета с началом в вершине сектора. Обозначим угол полураствора сектора через α. Тогда будем иметь

$$c_n = \frac{-3}{(1-\cos\alpha)(n+3)} P_{n1}(\cos\alpha).$$

Здесь P_{nk} определены в Приложении вместе с асимптотикой (16), из которой вытекает

$$c_n \sim \frac{-3\sqrt{2/\pi}\sqrt{\sin\alpha}}{(1-\cos\alpha)n^{5/2}} \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha + \frac{\pi}{4}\right]. \tag{7}$$

Из последовательности косинусов при любом α можно выделить последовательность, отделенную от нуля, что доказывает точность оценок (3).

Замечание. Формула (6) вытекает из (7) и приводится в силу ее простоты.

3. Цилиндр в системе отсчета с началом в его центре и осью z, направленной по оси симметрии. Обозначим a радиус основания, $2b$ высоту цилиндра (см. рис. 1; $A_2A_3 = a$, $OA_2 = b$, $OA_3 = R = \sqrt{a^2+b^2}$, $\angle A_2OA_3 = \alpha$). Тогда для нечетных n будем иметь $c_n = 0$, а для четных n —

$$c_n = -\frac{2R^3}{a^2 b(n+1)} P_{n+2,1}\left(\frac{b}{R}\right).$$

Учитывая обозначение через α угла A_2OA_3, представим последнюю формулу в виде

$$c_n = -\frac{2}{(n+1)\sin^2\alpha\cos\alpha} P_{n+2,1}(\cos\alpha).$$

С учетом асимптотики (16) получим

$$c_n = -\frac{2\sqrt{2/\pi}}{n^{5/2}\sin^{3/2}\alpha\cos\alpha} \cos\left[\left(n+\frac{5}{2}\right)\alpha + \frac{\pi}{4}\right].$$

4. Конус в системе отсчета с началом в его вершине. Обозначим через α угол полураствора конуса. Тогда будем иметь

$$c_n = -\frac{6}{(n+3)\sin^2\alpha} P_{n+1,1}(\cos\alpha),$$

откуда следует

$$c_n \sim -\frac{6}{n^{5/2}\sin^{3/2}\alpha} \cos\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)\alpha + \frac{\pi}{4}\right].$$

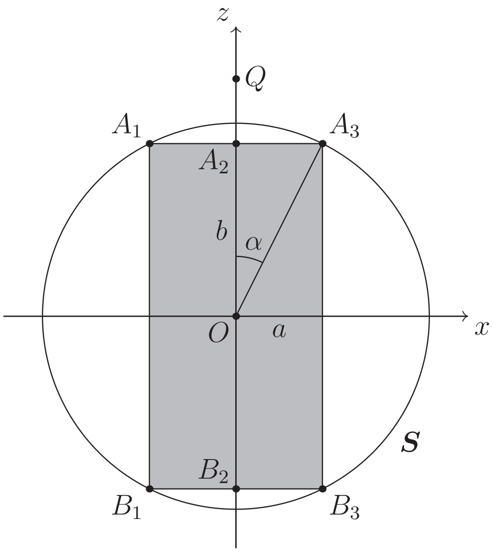

Рис. 1. Сечение цилиндра плоскостью, проходящей через ось симметрии z.

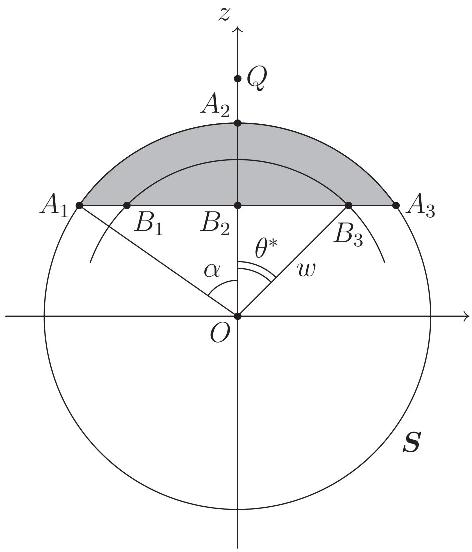

Рис. 2. Сечение шарового сегмента плоскостью, проходящей через ось симметрии z.

5. Шаровой сегмент в различных системах отсчета. Рассмотрим шаровой сегмент T с радиусом a и углом полураствора α, $0 < \alpha \leqslant \pi/2$. Изучим ряд Лапласа T в системах координат с осью z по оси симметрии, но с различными положениями начала отсчета.

5.1. Система отсчета с началом в центре соответствующего шара. На рис. 2 представлено сечение T плоскостью, проходящей через ось симметрии ($OA_1 = OA_2 = OA_3 = a$, $\angle A_1OA_2 = \alpha$; $OB_2 = a\cos\alpha$); при фиксированном $w = OB_1 = OB_3$ угол θ меняется от 0 до θ^*, $\cos\theta^* = (a/w)\cos\alpha$. Постоянные Стокса вычислены в [14]:

$$c_n = \frac{3}{2(2+\cos\alpha)\sin^4(\alpha/2)} P_{n+1,2}(\cos\alpha). \tag{8}$$

Используя (16), найдем асимптотику

$$c_n \sim \frac{6}{(2+\cos\alpha)n^{5/2}} \sqrt{\frac{\cos^3(\alpha/2)}{\pi\sin^5(\alpha/2)}} \cos\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)\alpha + \frac{3\pi}{4}\right].$$

5.2. Система отсчета с началом, сдвинутым вверх. Пусть начало координат сдвинуто вверх на расстояние $b > 0$ (см. рис. 3; $OO_1 = b$, $R = O_1A_1 = \sqrt{a^2 - 2ab\cos\alpha + b^2}$). Объемлющая сфера $\boldsymbol{S}_1$ проходит через точки A_1, A_3. Величину c_n не удается выразить явно через n, α, a, b. Однако в [14] формулы (3) и (5) для T доказаны, чего достаточно для наших целей.

5.3. Система отсчета с началом, сдвинутым вниз. Пусть начало координат сдвинуто вниз на расстояние $b > 0$ (см. рис. 4). В этом случае $O_2O = b$, $R_0 = O_2A_1 = \sqrt{a^2 + 2ab\cos\alpha + b^2}$, $R = a+b$, $R > R_0$. Объемлющая сфера $\boldsymbol{S}_2$ проходит через точку A_2; проходящая через A_1, A_3 окружность с центром в O_2 представляет сечение границы области сходимости ряда Лапласа $\boldsymbol{S}^*$.

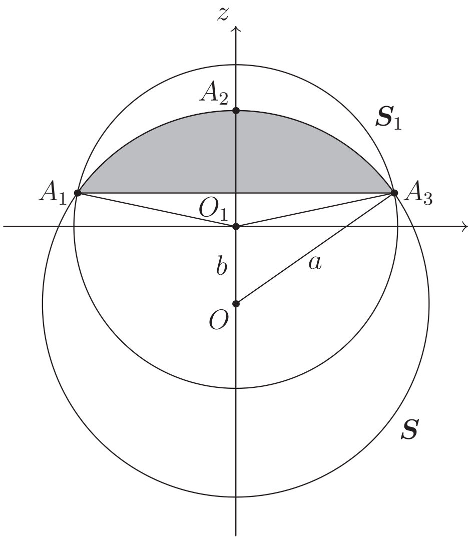

Рис. 3. Сечение шарового сегмента в системе отсчета $\mathcal{O}_1$.

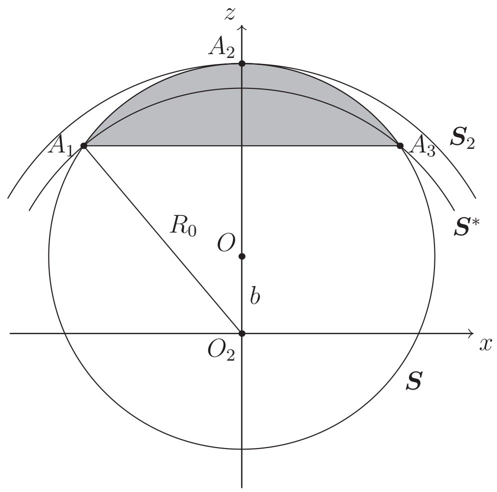

Рис. 4. Сечение шарового сегмента в системе отсчета $\mathcal{O}_2$.

В [14] получена оценка, существенно более сильная по сравнению с (3):

$$\langle Y_n \rangle \leqslant \frac{C}{n^{5/2}} p^n, \tag{9}$$

где обозначено

$$p = \frac{\sqrt{a^2 + 2ab\cos\alpha + b^2}}{a+b} < 1.$$

Границей сходимости ряда Лапласа $\boldsymbol{S}^*$ служит сфера с центром O_2, проходящая через точки A_1, A_3. Заметим, что на рисунках изображены сечения сегмента и сфер. В пространстве точкам A_1, A_3 отвечает ребро сегмента, так что сфера и сегмент имеют общую окружность.

6. Сегментированный шар. Выше исследованы тела, слабо напоминающие реальные планеты и спутники. Построим более реалистичные фигуры из сегментов одинакового радиуса a. В этом пункте используется система отсчета с началом в центре порождающего шара.

Пусть T_1 — отражение T относительно плоскости экватора, южный сегмент. Гравитационный потенциал T_1 в точке с декартовыми координатами x, y, z совпадает с потенциалом T_1 в точке x, y, $-z$. Поэтому коэффициенты Стокса c_n для T_1 совпадают с таковыми для T, помноженными на $(-1)^n$. Вместо (8) получаем для T_1 при $n \geqslant 2$

$$Mc_n = 2(-1)^n \pi a^3 \varrho P_{n+1,2}(\cos\alpha). \tag{10}$$

Здесь мы учитываем, что при объединении тел, расположенных внутри шара $r \leqslant R$, складываются гармоники MY_n, а не Y_n.

Пусть T_2 — объединение северных сегментов с параметрами α_i, ϱ_i и южных сегментов с параметрами $\alpha'_{i'}$, $\varrho'_{i'}$, $i = 1, \ldots, K$, $i' = 1, \ldots, K'$. Одно из чисел K, K' может равняться нулю, и тогда соответствующая сумма в выражении для c_n (см. ниже)

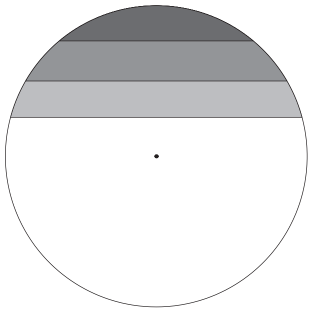

Рис. 5. Сечение тела T_2 при $K = 3$, $K' = 0$.

считается равной нулю. Не умаляя общности, считаем последовательности α_i и $\alpha'_{i'}$ возрастающими. На рис. 5 изображено тело T_2 при $K = 3$, $K' = 0$.

Поскольку сегменты вложены друг в друга, фактически в северном полушарии имеется один сегмент с углом полураствора α_K, а в южном — с углом $\alpha'_{K'}$. Плотность в северном полушарии при движении к экватору принимает последовательно значения $\varrho_1 + \cdots + \varrho_K, \varrho_2 + \cdots + \varrho_K, \ldots, \varrho_K$. Аналогична ситуация в южном полушарии при движении к экватору. Поэтому некоторые значения ϱ_i, $\varrho'_{i'}$ могут быть отрицательными при сохранении положительной плотности тела T_2. Заметим, что T_2 — неоднородный шар, если справедливо $\alpha_K = \alpha'_{K'} = \pi/2$.

По аддитивности потенциала гармонические коэффициенты T_2 при $n \geqslant 2$ равны

$$c_n = \frac{2\pi a^3}{M}\left[\sum_{i=1}^{K} \varrho_i P_{n+1,2}(\cos\alpha_i) + (-1)^n \sum_{i'=1}^{K'} \varrho'_{i'} P_{n+1,2}(\cos\alpha'_{i'})\right]. \tag{11}$$

Рассмотрим некоторые частные случаи описанной конструкции.

Пусть T_3 представляет собой T_2 при симметрии северного и южного полушарий, т. е. справедливо $K = K'$, $\alpha_i = \alpha'_{i'}$, $\varrho_i = \varrho'_{i'}$. Тогда обе суммы в (11) одинаковы. Поэтому для нечетных n будем иметь $c_n = 0$, а для четных $n \geqslant 2$ —

$$c_n = \frac{4\pi a^3}{M}\sum_{i=0}^{K} \varrho_i P_{n+1,2}(\cos\alpha_i). \tag{12}$$

Пусть T_4 — бочкообразное однородное тело плотности ϱ, получающееся вырезанием из шара северного сегмента полураствора α и южного полураствора α' (рис. 6).

Тело T_4 получается добавлением к шару плотности ϱ тела T_2 при $K = K' = 1$ и $\varrho_1 = \varrho'_1 = -\varrho$. Если один из сегментов отсутствует, вместо бочки получаем купол. Поскольку все гармоники шара (за исключением нулевой) исчезают, приходим при $n \geqslant 2$ к равенствам

$$c_n = \frac{2\pi a^3 \varrho}{M}\left[P_{n+1,2}(\cos\alpha) + (-1)^n P_{n+1,2}(\cos\alpha')\right]. \tag{13}$$

Если бочка симметрична, т. е. имеем $\alpha = \alpha'$, нечетные гармоники исчезают, а четные равны

$$c_n = -\frac{4\pi a^3 \varrho}{M} P_{n+1,2}(\cos\alpha). \tag{14}$$

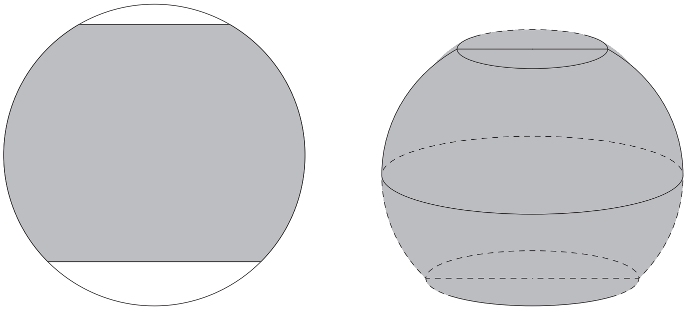

Рис. 6. Тело T_4 (справа) и его сечение (слева).

Заключение. Мы исследовали скорость сходимости ряда Лапласа нескольких модельных тел: полушар, шаровой сектор, цилиндр, конус, шаровой сегмент, сегментированный шар. Во всех случаях (за одним исключением) скорость убывания $\langle Y_n \rangle$ описывается *неулучшаемой* оценкой (3). Важную роль здесь играет фигура S — пересечение границы ∂T тела T и объемлющей сферы $\boldsymbol{S}$.

В примерах 1, 2, 5.1 фигура S состоит из части сферы $\boldsymbol{S}$ положительной площади; граница S представляет собой ребро поверхности ∂T. К этому же классу тел можно отнести и сегментированный шар, ребрами которого можно считать границы сегментов с разной плотностью.

В примерах 3, 4, 5.2 фигура S состоит из кривых, лежащих на сфере $\boldsymbol{S}$ и представляющих собой ребра поверхности ∂T.

Исключением служит пример 5.3, в котором $\langle Y_n \rangle$ убывают существенно быстрее согласно (9). В этом случае S — это одна точка, в которой ∂T касается $\boldsymbol{S}$, и в окрестности которой поверхность ∂T аналитична. Интересно, что область сходимости ряда (1) — лежащая внутри $\boldsymbol{S}$ сфера $\boldsymbol{S}^*$, радиус которой равен расстоянию до ребра поверхности ∂T. Таким образом, и здесь сфера сходимости $\boldsymbol{S}^*$ определяется ребром поверхности ∂T, как и в предыдущих случаях.

Остался неисследованным случай, когда S состоит из конечного числа точек A_k, в окрестности которых ∂T лежит внутри конуса с вершиной A_k с осью, проходящей через начало отсчета и углом полураствора, меньшим $\pi/2$.

Модельные тела — полушар, шаровой сектор, цилиндр, конус, шаровой сегмент — слабо напоминают реальные планеты и спутники. Сегментированный шар является более реалистичной фигурой для представления гравитационного потенциала небесных тел.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Производящие функции. На произведении отрезка $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и круга $|z| < 1$ справедливы разложения

$$(1 - 2xz + z^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n,$$

$$(1 - 2xz + z^2)^{1/2} = 1 - xz - \sum_{n=1}^{\infty} P_{n1}(x) z^{n+1},$$

$$\left(1-2xz+z^2\right)^{3/2} = 1-3xz+\frac{3}{2}(x^2+1)z^2+\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x\right)z^3+3\sum_{n=2}^{\infty}P_{n2}(x)z^{n+2}. \quad (15)$$

Здесь $P_{n0}=P_n$ — многочлен Лежандра, P_{nk} — последовательные интегралы

$$P_{nk}(x)=\int_{-1}^{x}P_{n,k-1}(y)\,dy.$$

2. Асимптотика P_{nk} определяется выражением

$$P_{nk}(\cos\theta)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin^{k-1/2}\theta}{n^{k+1/2}}\left\{\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta+\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]+\frac{r_k(n,\theta)}{n\sin^{k+1}\theta}\right\}, \quad (16)$$

где $r_k(n,\theta)$ ограничены при $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, $n\geqslant 2$.

Формулы (15), (16) содержатся в [15, 16].

Литература

1. *Дубошин Г. Н.* Теория притяжения. М.: Физматлит, 1961. 288 с.
2. *Каула У.* Спутниковая геодезия. М.: Мир, 1970. 172 с.
3. *Бурша М.* Основы космической геодезии. Часть 2. М.: Недра, 1975. 280 с.
4. *Грушинский Н. П.* Теория фигуры Земли. М.: Наука, 1976. 512 с.
5. *Кондратьев Б. П.* Теория потенциала и фигуры равновесия. М.; Ижевск: Изд. ИКИ, 2003.
6. *Vatrt V.* Truncation error due to geopotential model EGM96 // Studia Geoph. et Geod. 1999. Vol. 43. P. 223–227.
7. *Pavlis N. K., Holmes S. A., Kenyon S. C., Factor J. K.* An Earth Gravitational Model to Degree 2160: EGM2008, presented at the 2008 General Assembly of the European Geosciences Union. Vienna, Austria, April 13–18, 2008.
8. *Петровская М. С., Вершков А. Н.* Построение моделей гравитационного поля на основе спутниковых измерений производных от потенциала тяготения // Космические исследования. 2014. Т. 52, № 2. С. 176–184.
9. *Натансон И. П.* Конструктивная теория функций. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949. 688 с.
10. *Гобсон Е. В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: ИЛ, 1952. 476 с.
11. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. М.: ФМ, 1962. 500 с.
12. *Антонов В. А., Тимошкова Е. И., Холшевников К. В.* Введение в теорию ньютоновского потенциала. М.: Наука, 1988. 270 с.
13. *Яров-Яровой М. С.* О силовой функции притяжения планеты и ее спутника. С. 259–277 // Проблемы движения искусственных небесных тел. М.: Изд АН СССР, 1963, 295 с.
14. *Холшевников К. В., Шайдулин В. Ш.* О гравитационном потенциале шарового сегмента // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2015. Т. 2(60). Вып. 1. С. 157–163.
15. *Антонов В. А., Холшевников К. В., Шайдулин В. Ш.* Об оценке производной многочлена Лежандра // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2010. Вып. 4. С. 3–9.
16. *Холшевников К. В., Шайдулин В. Ш.* О свойствах интегралов от многочлена Лежандра // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2014. Т. 1(59). Вып. 1. С. 55–67.

Статья поступила в редколлегию 14 октября 2015 г.

Сведения об авторах

Кузнецов Эдуард Дмитриевич — доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой, eduard.kuznetsov@urfu.ru

Константин Владиславович Холшевников — доктор физико-математических наук, профессор, kvk@astro.spbu.ru

Вахит Шамильевич Шайдулин — кандидат физико-математических наук, доцент, shvak@yandex.ru

ON THE REPRESENTATION OF THE GRAVITATIONAL POTENTIAL OF SEVERAL MODEL BODIES

Eduard D. Kuznetsov[1], *Konstantin V. Kholshevnikov*[2,3], *Vakhit Sh. Shaidulin*[2,4]

[1] Ural Federal University, ul. Mira, 19, Ekaterinburg, 620002, Russian Federation; eduard.kuznetsov@urfu.ru
[2] St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7–9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; kvk@astro.spbu.ru
[3] Institute of Applied Astronomy RAS, nab. Kutuzova, 10, St. Petersburg, 191187, Russian Federation; kvk@astro.spbu.ru, shvak@yandex.ru
[4] Main (Pulkovo) Observatory RAS, Pulkovskoe chaussee, 65/1, St. Petersburg, 196140, Russian Federation; shvak@yandex.ru

Laplace series with respect to spherical functions $Y_n(\theta,\lambda)$ represents now a most popular form of the gravitational potential representation for a compact body T in the outer space in spherical coordinates r,θ,λ. There exists a well-known estimate $\langle Y_n\rangle \leqslant Cn^{-5/2}$, $C=\mathrm{const}$, $n\geqslant 1$ of the Chebyshevian norm (maximum of the modulus) for bodies of irregular structure. In the present paper an explicit representation of $Y_n(\theta,\lambda)$ for several model bodies is obtained. The indicated estimate $\langle Y_n\rangle$ is valid *under the exact exponent* 5/2 for all cases except one. If the segment touches the enveloping sphere, then $\langle Y_n\rangle$ decreases much faster. Namely, $\langle Y_n\rangle \leqslant Cn^{-5/2}p^n$, $C=\mathrm{const}$, $n\geqslant 1$. The quantity $p<1$ equals to the distance from the origin of coordinates to the edge of the segment expressed in radii of the enveloping sphere. The exactness of exponent 5/2 is valid in common case by examples of bodies which more or less reminiscent of real celestial bodies. Refs 16. Figs 6.

Keywords: gravitational potential, Laplace series, rate of convergence.

References

1. Duboshin G. N., *Theory of attraction* (Fizmatlit, Moscow, 1961) [in Russian].
2. Kaula W., *Theory of satellite geodesy* (Waltham, Toronto, London, Blaisdell Publ. Co., 1966).
3. Bursa M., *Základy kosmické geodésie* **2** (Praha, 1970).
4. Grushinskiy N. P., *Theory of the Earth figure* (Nauka, Moscow, 1976) [in Russian].
5. Kondratyev B. P., *Potential theory and figures of equilibrium* (SRI Publ. H., Moscow, Izhevsk, 2003) [in Russian].
6. Vatrt V., "Truncation error due to geopotential model EGM96", *Studia Geoph. et Geod.* **43**, 223–227 (1999).
7. Pavlis N. K., Holmes S. A., Kenyon S. C., Factor J. K., *An Earth Gravitational Model to Degree 2160: EGM2008, presented at the 2008 General Assembly of the European Geosciences Union* (Vienna, Austria, April 13–18, 2008).
8. Petrovskaya M. S., Vershkov A. N., "The Construction of Gravitational Field Models on the Basis of Satellite Measurements of Gravitational Potential Derivatives", *Cosmic Research* **52**(2), 166–174 (2014).
9. Natanson I. P., *Constructive function theory*, **I**, **II** (New York, Frederick Ungar Publishing Co., 1964–1965).
10. Hobson E. W., *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics* (Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1931).
11. Szegö G., *Orthogonal polynomials* **23** (AMS Colloquium publ., 1975).
12. Antonov V. A., Timoshkova E. I., Kholshevnikov K. V., *Introduction to the Theory of Newtonian Potential* (Nauka, Moscow, 1988) [in Russian].
13. Yarov-Yarovoi M. S., "On the force-function of the attraction of a planet and its satellite", *Problems of Motion of Artificial Celestial Bodies. Acad. Sci.* (USSR Press, Moscow, 1963) [in Russian].
14. Kholshevnikov K. V., Shaidulin V. Sh., "On the gravitational potential of a spherical segment", *Vestnik St. Petersburg University: Mathematics* **48**(1), 49–54 (2015).
15. Antonov V. A., Kholshevnikov K. V., Shaidulin V. Sh., "Estimating the derivative of the Legendre polynomial", *Vestnik St. Petersburg University: Mathematics* **43**(4), 191–197 (2010).
16. Kholshevnikov K. V., Shaidulin V. Sh., "On properties of integrals of the Legendre polynomial", *Vestnik St. Petersburg University: Mathematics* **47**(1), 28–38 (2014).

Для цитирования: Кузнецов Э. Д., Холшевников К. В., Шайдулин В. Ш. О представлении гравитационного потенциала некоторых модельных тел // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2016. Т. 3 (61). Вып. 3. С. 489–497. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.317

For citation: Kuznetsov E. D., Kholshevnikov K. V., Shaidulin V. Sh. On the representation of the gravitational potential of several model bodies. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2016, vol. 3 (61), issue 3, pp. 489–497.
DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.317