УДК 521.135 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 3 (61). 2016. Вып. 3

УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ ПЛАНЕТ ПО ХИЛЛУ ПРИ ЗВЕЗДНЫХ СБЛИЖЕНИЯХ*

Маммадли Азад Гидаят оглы

Батабатская астрофизическая обсерватория Нахчыванского отделения НАН Азербайджана, Азербайджан, 7000, Нахчыван, пр. Г. Алиева, 35

В рамках ограниченной задачи трех тел исследовано пространственное движение пассивно-гравитирующего тела при сближении пробной звезды с центральным телом. Использовано точное выражение силовой функции без разложения ее в ряд. Найдено интегральное инвариантное соотношение — квазиинтеграл и определены возможные области движения пассивно-гравитирующего тела. Исследована устойчивость движения планет по Хиллу при сближении с Солнечной системой на минимальное расстояние от 50 до 100 а. е. звезды с массой от одной до пяти солнечных масс. Полученные результаты приведены в виде таблиц. Библиогр. 10 назв. Табл. 2.

Ключевые слова: небесная механика, ограниченная задача трех тел, квазиинтеграл, закон сохранения энергии, поверхности минимальной энергии, устойчивость по Хиллу.

1. Введение. Постановка задачи. В работах [1, 2] в рамках плоской осредненной, а в работе [3] — в рамках двукратно осредненной параболической задачи трех тел определены изменения элементов орбиты планет при сближении с Солнечной системой звезды солнечной массы на минимальное расстояние от 50 *а. е.* Полученные результаты показали, что при таких сближениях размеры и формы орбит планет остаются постоянными, изменяется лишь их ориентация.

В работе [4] рассмотрена ограниченная гиперболическая задача трех тел и дана оценка влияния звезды солнечной массы на орбиты планет при ее сближении с Солнцем на расстояние q' от 100 до 1152 *а. е.* Показано, что при умеренном сближении такой звезды с Солнцем размеры орбит планет не претерпевают никаких изменений. При сближении звезды с Солнцем на расстояние $q' \geq 100$ *а. е.* наклон, эксцентриситет, долгота восходящего узла и аргумент перигелия изменяются довольно мало.

В данной работе рассмотрено пространственное движение пассивно-гравитирующего тела (далее ПГТ или M_0) в рамках ограниченной задачи трех тел. Сближающееся с центральным телом возмущающее тело (пробная звезда) при этом может совершать движение по параболической или гиперболической орбитам. Целями настоящей работы являются: нахождение интегрального инвариантного соотношения — квазиинтеграла и определение областей возможности движения ПГТ; установление устойчивости или неустойчивости движения ПГТ по Хиллу при сближении пробной звезды с центральным телом; приложение полученных результатов к реальным астрономическим объектам.

Движение ПГТ будем изучать во вращающейся и пульсирующей системе координат, начало которой совпадает с барицентром активно-гравитирующих тел M_1 (центральное тело) и M_2 (возмущающее тело) с массами m_1 и m_2, а уравнения движения M_0 имеют простой вид [5, 6]

$$\frac{d^2x}{dv'^2} - 2\frac{dy}{dv'} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dv'^2} + 2\frac{dx}{dv'} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dv'^2} = \frac{\partial Q}{\partial z}. \tag{1}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда развития науки при президенте Азербайджанской Республики (грант № EIF-2013-9(15)-46/14/1).

 DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.318

Систему уравнений (1) будем называть уравнениями ШАПНЕРа [6] — аббревиатура образована из фамилий Шайбнера [7], Петра и Нехвила [8, 9] и Рейн [10]. В системе уравнений (1) за независимую переменную принята истинная аномалия возмущающего тела, а силовая функция является аналогом функции Якоби в круговой задаче и явно зависит от независимой переменной v' [5, 6]:

$$Q = \rho' \left[\frac{1}{2} \left(x^2 + y^2 - e' z^2 \cos v' \right) + p'^3 \left(\frac{\mu}{r_1} + \frac{1-\mu}{r_2} \right) \right], \tag{2}$$

где p', e' — фокальный параметр и эксцентриситет орбиты возмущающего тела относительно центрального тела M_1 соответственно. Безразмерная величина ρ' является функцией от v' и определена ниже, а r_1 и r_2 — расстояния пассивно-гравитирующего тела от основных тел M_1 и M_2:

$$r_1^2 = (x - p'\mu + p')^2 + y^2 + z^2, \quad r_2^2 = (x - p'\mu)^2 + y^2 + z^2, \tag{3}$$

а $(1-\mu)$ и μ — их относительные массы:

$$\mu = \frac{m_1}{m_1 + m_2}, \quad 1 - \mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \quad \mu < \frac{1}{2}. \tag{4}$$

Расстояние r' между основными телами таково:

$$r' = p'\rho', \quad \rho' = \frac{1}{1 + e' \cos v'}, \quad p' = q'(1 + e'), \tag{5}$$

где q' — минимальное расстояние (перигелийное расстояние в Солнечной системе) возмущающего тела от центрального. Равенство (5) для r' практически определяет орбиту возмущающего тела: при $e' > 1$ — гиперболическую, а при $e' = 1$ — параболическую орбиту. Кроме того, диапазон изменения истинной аномалии предполагается удовлетворяющим неравенству

$$|\, v' \,| \le v_a, \quad \text{где} \quad v_a = \pi \quad \text{при} \quad e' = 1, \quad v_a = \arccos\left(-\frac{1}{e'} \right) \quad \text{при} \quad e' > 1. \tag{6}$$

Примечание 1. Выражение (2) для аналога функции Якоби Q соответствует случаю $m_1 < m_2$. Если масса центрального тела больше, чем масса возмущающего тела ($m_1 > m_2$), аналог функции Якоби Q, относительные массы μ и $(1-\mu)$, а также расстояния r_1 и r_2 должны определяться равенствами [5, 6]

$$Q = \rho' \left[\frac{1}{2} \left(x^2 + y^2 - e' z^2 \cos v' \right) + p'^3 \left(\frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \right) \right], \tag{7}$$

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \quad 1 - \mu = \frac{m_1}{m_1 + m_2}, \quad \mu < \frac{1}{2}, \tag{8}$$

$$r_1^2 = (x + p'\mu)^2 + y^2 + z^2, \quad r_2^2 = (x + p'\mu - p')^2 + y^2 + z^2. \tag{9}$$

2. Квазиинтеграл. Закон сохранения энергии. В ограниченной круговой ($e' = 0$) задаче трех тел уравнения движения ШАПНЕРа (1) допускают первый интеграл — интеграл Якоби [5, 6]:

$$V^2 - 2Q = 2C, \quad 2C = V_0^2 - 2Q_0 = \text{const}, \tag{10}$$

где нулевым индексом обозначены значения скорости V пассивно-гравитирующего тела и функции Якоби Q при некотором начальном значении v_0' истинной аномалии, а C — постоянная интеграла Якоби. Однако в ограниченной эллиптической (ОЭЗ), гиперболической (ОГЗ) и параболической (ОПЗ) задачах трех тел не существует первого интеграла, подобного интегралу Якоби (10). Это связано с тем, что силовая функция Q явно зависит от независимой переменной v' и в этом случае имеет место интегральное инвариантное соотношение — квазиинтеграл [6]

$$\frac{V^2}{2} - Q + u\,(v') = h, \quad h = \frac{V_0^2}{2} - Q_0 + u\,(v_0'), \tag{11}$$

где $u\,(v')$ — неизвестная первообразная функция. Полученное соотношение (11) не является первым интегралом уравнений движения (1): его следует рассматривать как интегральное инвариантное соотношение или квазиинтеграл [6]. В квазиинтеграле (11) h представляет собой постоянную энергию и зависит от значения неизвестной функции $u\,(v_0')$, т. е. принимает различные значения на разных траекториях движения. При этом квазиинтеграл (11) при $e' = 0$ (в случае кругового движения) преобразуется в интеграл Якоби (10), так как в этом случае имеем $\partial Q/\partial v' = 0$, т. е. выполняется $u\,(v') \equiv 0$ [6].

Таким образом, полученный квазиинтеграл (11) в некруговой ($e' \neq 0$) ограниченной задаче трех тел представляет собой закон сохранения энергии пассивно-гравитирующего тела: полная энергия тела M_0, состоящая из якобиевой энергии $V^2/2 - Q$ и дополнительной энергии $u\,(v')$, есть величина постоянная, зависит только от начальных значений координат и скоростей тела M_0. Величину h можно считать постоянной энергией, имеющей свое конкретное значение на каждой траектории [6]. Кроме того, якобиева энергия $V^2/2 - Q$ достигает максимального значения в перицентре орбит основных тел M_1 и M_2, а минимального значения — в апоцентре:

$$\frac{V_a^2}{2} - Q_a \leq \frac{V^2}{2} - Q \leq \frac{V_p^2}{2} - Q_p, \quad 0 \leq v' \leq \pi,$$

где индексы «a» и «p» соответствуют апоцентру и перицентру. Кроме того, дополнительная энергия $u\,(v')$ монотонно возрастает при удалении основных тел M_1 и M_2 от перицентра и пассивно-гравитирующее тело M_0 получает дополнительную (потенциальную) энергию от них, а при движении основных тел в сторону перицентра, дополнительная энергия $u\,(v')$ убывает и тело M_0 отдает энергию основным телам [6].

Заметим, что закон сохранения энергии (11) в момент прохождения основных тел через перицентры их орбит имеет вид [6]

$$\frac{V^2}{2} - Q + u\,(v') = h_p, \quad h_p = \frac{V_p^2}{2} - Q_p + \frac{\widetilde{Q}_{\min}}{1+e'}, \quad \widetilde{Q}_{\min} = \frac{{p'}^2}{2}\left(3 - \mu + \mu^2\right). \tag{12}$$

Здесь индекс «p» обозначает значения аналога функции Якоби Q и скорости V пассивно-гравитирующего тела, вычисленные в момент прохождения возмущающего тела через перицентр, т. е. при $v' = 0$.

Закон (12) можно переписать в виде

$$V^2 + 2u\,(v') - 2\rho' \cdot \widetilde{Q}_{\min} = 2Q - 2\rho' \cdot \widetilde{Q}_{\min} + 2h_p \geq 0. \tag{13}$$

Тогда из (13) находим возможную область движения ПГТ M_0:

$$2Q - 2\rho'\widetilde{Q}_{\min} \geq C, \quad C = -2h_p = 2Q_p - V_p^2 - \frac{2\widetilde{Q}_{\min}}{1+e'}, \tag{14}$$

где C — аналог постоянной Якоби, а $\widetilde{Q}_{\min}$ определено выше. Границу области (14)

$$2Q - 2\rho' \cdot \widetilde{Q}_{\min} = C \tag{15}$$

будем называть *поверхностью минимальной энергии*, уравнение которой запишем в виде [6]

$$H \equiv x^2 + y^2 - e'z^2 \cos v' + 2p'^3 \left(\frac{\mu}{r_1} + \frac{1-\mu}{r_2} \right) - 2\widetilde{Q}_{\min} = C\,(1 + e' \cos v')\,. \tag{16}$$

Очевидно, что функция $H \equiv H\,(x, y, z, p', e', v', \mu, C)$ определяет зависимость семейства поверхностей минимальной энергии (16) не только от координат x, y, z, но и от пяти параметров p', e', v', μ, C. Аналог постоянной Якоби C характеризует энергию ПГТ, а фокальный параметр p' — линейный масштаб поверхностей. При заданных значениях параметров p', e', v', μ и C тело M_0 не может выйти за пределы поверхности (16). При $e' = 0$ поверхности минимальной энергии (16) преобразуются в поверхности нулевой относительной скорости ограниченной круговой задачи трех тел. Кроме того, из уравнения (16) следует, что семейство поверхностей минимальной энергии при заданных значениях параметров p', e', μ и C для всех значений истинной аномалии v' в диапазоне $[-\,v_a, v_a]$ (см. формулу (6)) располагается между двумя поверхностями [6]

$$x^2 + y^2 - e'z^2 \cos v' + 2p'^3 \left(\frac{\mu}{r_1} + \frac{1-\mu}{r_2} \right) - 2\widetilde{Q}_{\min} = C\,(1 + e') \tag{17}$$

и

$$x^2 + y^2 - e'z^2 \cos v_a + 2p'^3 \left(\frac{\mu}{r_1} + \frac{1-\mu}{r_2} \right) - 2\widetilde{Q}_{\min} = C\,(1 + e' \cos v_a)\,. \tag{18}$$

Примечание 2. Существование аналога интеграла Якоби в ограниченной эллиптической, параболической и гиперболической задачах трех тел ранее отрицалось. В работе [6] доказано, что такой аналог — квазиинтеграл существует. При этом из найденного квазиинтеграла получается аналог поверхностей нулевой скорости — поверхности минимальной энергии. Эти поверхности также допускают существование движений спутникового типа, т. е. имеет место устойчивость по Хиллу при определенных значениях параметров.

3. Устойчивость движения по Хиллу. Обмен спутником между телами. Сначала рассмотрим задачу об устойчивости движения ПГТ по Хиллу. Движение пассивно-гравитирующего тела в ограниченной задаче трех тел называется *устойчивым по Хиллу*, если оно не выходит за пределы некоторой замкнутой области вокруг одного из основных тел. Иначе говоря, если пассивно-гравитирующее тело при любых значениях истинной аномалии v' осуществляет движение спутникового типа вокруг одного из основных тел, оставаясь в ограниченной области, то его движение считается устойчивым по Хиллу.

Понятие устойчивости по Хиллу неразрывно связано со значением аналога постоянной Якоби C, вычисленным в особой точке L_2, которая находится между основными телами M_1, M_2 и соответствует движению спутникового типа.

Значение аналога постоянной Якоби из семейства поверхностей минимальной энергии, соответствующее особой точке $L_2(x_2, 0, 0)$, обозначим через C_2, т. е. в силу (16) положим

$$C_2 = H\,(x_2, 0, 0) = x_2^2 + 2p'^3 \left(\frac{\mu}{\sqrt{(x_2 + p' - p'\mu)^2}} + \frac{1-\mu}{\sqrt{(x_2 - p'\mu)^2}} \right) - p'^2(3 - \mu + \mu^2). \tag{19}$$

Тогда при любых значениях истинной аномалии v' удовлетворяется неравенство

$$C \geq \frac{C_2}{1 + e' \cos v'}. \tag{20}$$

Неравенство (20) представляет собой критерий устойчивости, неустойчивости и условной устойчивости движения тела малой массы в ограниченной гиперболической и параболической задачах трех тел. В ОГЗ и ОПЗ критерий устойчивости движения ПГТ по Хиллу выполняется асимптотически, т. е. при $C \to \infty$. Следовательно, устойчивости движения ПГТ M_0 по Хиллу в ограниченной параболической и гиперболической задачах трех тел никогда не может быть, но имеет место условная устойчивость. Для параболической и гиперболической ограниченных задач условная устойчивость движения тела M_0 по Хиллу достигается при выполнении

$$\frac{C_2}{1 + e'} \leq C < \infty. \tag{21}$$

Критерием же абсолютной неустойчивости движения ПГТ M_0 по Хиллу является неравенство

$$C < \frac{C_2}{1 + e'}, \tag{22}$$

которое гарантирует выполнение неравенства $C < C_2$ при любых v'.

Теперь рассмотрим задачу об обмене спутником между основными телами M_1 и M_2, сближающимися по гиперболическим или параболическим орбитам. Изложенная выше теория [6] по критериям устойчивости движения тела M_0 по Хиллу позволяет установить: а) необходимое условие осуществления обмена или захвата, б) достаточное условие невозможности обмена, в) интервал значений истинной аномалии v', при котором возможен обмен спутником.

В случае параболического и гиперболического движений основных тел необходимое условие обмена, т. е. критерий неустойчивости движения тела M_0 по Хиллу всегда выполняется. В этом случае при любых уровнях энергии имеет место неустойчивость по Хиллу при достаточно большом $|v'|$. Кроме того, в случае нарушения критериев условной устойчивости (21) по Хиллу, т. е. в интервале $|v'| > v_a$ (см. формулу (6)) может осуществляться обмен спутником в параболическом и гиперболическом движениях основных тел.

При выполнении критерия абсолютной неустойчивости (22) обмен спутником теоретически возможен при любых значениях истинной аномалии v'. Заметим, что подобные условия ранее были неизвестны, и возможность или невозможность обмена спутником проверялась интуитивным подбором начальных условий и исходных параметров [6].

4. Примеры. В качестве примера возьмем пробную звезду с массой m', перигелийным расстоянием q' (в а. е.) и эксцентриситетом e', изменяющимися в пределах

$$M_\odot \leq m' \leq 5M_\odot, \quad 50 \leq q' \leq 100, \quad 1 \leq e' \leq 5,$$

где $M_\odot$ — масса Солнца, $e' = 1$ соответствует параболическому движению пробной звезды.

Результаты исследования устойчивости по Хиллу движения трех планет (Земли, Юпитера и Сатурна) в зависимости от фокального параметра p' орбиты звезды и ее

Таблица 1. **Устойчивость движений планет по Хиллу в ограниченной гиперболической задаче трех тел: планета — Солнце — звезда**

Планета	p' (в а. е.)	m'	C_p	$\dfrac{C_2}{1+e'}$	Устойчивость
Земля	107.5	$M_\odot$	11223.63801	6718.7500	Условная устойчивость
		$3M_\odot$	25583.32507	5687.60356	
		$5M_\odot$	47022.20069	4772.35271	
	161.25	$M_\odot$	20191.97684	15117.18750	
		$3M_\odot$	61105.18565	12797.10802	
		$5M_\odot$	95570.33302	10737.79359	
	215	$M_\odot$	33270.29723	26875.0	
		$3M_\odot$	112264.5806	22750.41426	
		$5M_\odot$	165109.6349	19089.41084	
Юпитер	107.5	$M_\odot$	13331.70751	6718.7500	
		$3M_\odot$	24861.51172	5687.60356	
		$5M_\odot$	49624.43491	4772.35271	
	161.25	$M_\odot$	21467.26449	15117.18750	
		$3M_\odot$	60262.03232	12797.10802	
		$5M_\odot$	95683.01105	10737.79359	
	215	$M_\odot$	33930.418233	26875.0	
		$3M_\odot$	111454.2512	22750.41426	
		$5M_\odot$	164324.6482	19089.41084	
Сатурн	107.5	$M_\odot$	8727.26427	6718.7500	
		$3M_\odot$	27513.53878	5687.60356	
		$5M_\odot$	42004.00334	4772.35271	
	161.25	$M_\odot$	18716.70519	15117.18750	
		$3M_\odot$	63492.14497	12797.10802	
		$5M_\odot$	92061.73155	10737.79359	
	215	$M_\odot$	32919.55202	26875.0	
		$3M_\odot$	115125.8691	22750.41426	
		$5M_\odot$	162201.6013	19089.41084	

массы m' приведены в табл. 1 при гиперболической, а в табл. 2 при параболической орбитах звезды. В этих таблицах через C_p обозначено значение аналога постоянной Якоби при $v' = 0$, а через C_2 — вычисленное ее значение в особой точке L_2. Оказалось, что в случае параболической или гиперболической орбит звезды имеет место только условная устойчивость движения планет по Хиллу.

5. Заключение. Найдено интегральное инвариантное соотношение — квазиинтеграл в задаче о пространственном движении пассивно-гравитирующего тела при сближении с центральным телом звезды, которая может совершать движение по параболической или по гиперболической орбитам. Определены области возможности движения пассивно-гравитирующего тела. При этом использовалось точное выражение силовой функции без ее разложения в ряд.

Показано, что в случае параболического или гиперболического относительного движения основных тел необходимое условие обмена спутником всегда выполняется. В области потери устойчивости движения в смысле Хилла может осуществляться обмен спутником как в параболическом, так и гиперболическом движениях основных тел. При этом обмен может осуществляться только в интервале истинной аномалии в окрестности наиболее удаленной точки относительной орбиты основных тел $|v'| > v_a$. При выполнении критерия неустойчивости и при надлежащем выборе

Таблица 2. **Устойчивость движений планет по Хиллу в ограниченной параболической задаче трех тел: планета — Солнце — звезда**

Планета	p' (в а. е.)	m'	C_p	$\dfrac{C_2}{1+e'}$	Устойчивость
Земля	100	$M_\odot$	11219.60303	6250.0	Условная устойчивость
		$3M_\odot$	23482.33868	5290.79401	
		$5M_\odot$	44605.58035	4439.39787	
	150	$M_\odot$	19471.08396	14062.50	
		$3M_\odot$	56332.99884	11904.28652	
		$5M_\odot$	88706.78297	9988.64521	
	200	$M_\odot$	31408.15909	25000.0	
		$3M_\odot$	103775.4097	21163.17606	
		$5M_\odot$	152887.0666	17757.59148	
Юпитер	100	$M_\odot$	13530.15606	6250.0	
		$3M_\odot$	22763.67615	5290.79401	
		$5M_\odot$	48838.76295	4439.39787	
	150	$M_\odot$	20865.61324	14062.50	
		$3M_\odot$	55415.29318	11904.28652	
		$5M_\odot$	90292.22156	9988.64521	
	200	$M_\odot$	32241.85212	25000.0	
		$3M_\odot$	102759.3469	21163.17606	
		$5M_\odot$	153761.1559	17757.59148	
Сатурн	100	$M_\odot$	94538.09535	6250.0	
		$3M_\odot$	169050.8402	5290.79401	
		$5M_\odot$	235037.3713	4439.39787	
	150	$M_\odot$	136655.9248	14062.50	
		$3M_\odot$	246167.2023	11904.28652	
		$5M_\odot$	337912.9926	9988.64521	
	200	$M_\odot$	186559.9802	25000.0	
		$3M_\odot$	337870.9594	21163.17606	
		$5M_\odot$	459756.0501	17757.59148	

начальных условий спутник может либо покинуть окрестность родственного тела и стать спутником второго тела (обмен), либо превратиться в самостоятельное небесное тело (выброс), либо остаться спутником родственного тела.

Литература

1. *Мамедов А. Г.* Осредненная параболическая ограниченная задачи трех тел // Астрон. журн. 1989. Т. 66, вып. 2. С. 377–384.

2. *Мамедов А. Г.* О вековых возмущениях элементов в ограниченной параболической задаче трех тел // Астрон. журн. 1991. Т. 68, вып. 6. С. 1323–1327.

3. *Мамедли А. Г.* Предельный случай двукратно-осредненной параболической ограниченной задачи трех тел // Астрон. вестн. 2007. Т. 41, № 2. С. 186–189.

4. *Холшевников К. В., Мищук Ю. В.* Влияние звездных сближений на планетные орбиты // Вестник ЛГУ. Вып. 7. 1983. С. 72–81.

5. *Дубошин Г. Н.* Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М.: Наука, 1964.

6. *Лукьянов Л. Г.* Аналог поверхностей нулевой скорости в ограниченной эллиптической, параболической и гиперболической задачах трех тел // Письма в Астрон. журн. 2010. Т. 36, № 11. С. 869–880.

7. *Scheibner W.* Satzaus der Storungstheorie // Reine Angew. Math. 1866. Vol. 65. P. 291.

8. *Petr K., Nechvil M. V.* Two remarks to a special case of three bodies problem // Casopis Pestovani Mat. Fys. (Praha). 1918. Vol. 47. P. 268–273.

9. *Nechvil M. V.* Sur une nouvelle forme des equations differentielles du probleme restreint elliptique // Compte Rendue. 1926. Vol. 182. P. 310.

10. *Rein Natalie.* Note sur l'article de M. V. Nechvil «Sur une nouvelle forme des equations differentielles du probleme restreint elliptique» // Труды Гос. астрон. института им. П. К. Штернберга. 1937. Т. 14. С. 85–87.

Статья поступила в редколлегию 27 ноября 2015 г.

Сведения об авторе

Маммадли Азад Гидаят оглы — кандидат физико-математических наук, доцент; azad_mammadli@yahoo.com

THE HILL STABILITY OF PLANETARY MOTION UNDER STELLAR APPROACHES

Mammadli Azad Hidayat oglu

The Batabat astrophysical observatory of the Nakhzivan department of Nationale Academy Science of Azerbaijan, pr. H. Aliyev, 35, Nakhchyvan, 7000, Azerbaijan; azad_mammadli@yahoo.com

A planetary motion under the influence of a star passing near the Solar system is examined in the framework of the three-dimensional restricted three-body problem. The exact expression of the force function without expansion it in series is used. An integral invariant relation — quasi-integral — is found, and regions of possible motion of a passively gravitating body are determined. Surfaces of minimal energy which are generalizations of surfaces of zero velocity are plotted. The Hill stability of planetary motion is investigated when a star with a mass between one and five solar masses approaches the Solar system at a minimum distance of 50 AU up to 100 AU. The results obtained are shown in the form of tables. Refs 10. Tables 2.

Keywords: celestial mechanics, restricted three-body problem, quasi-integral, law of conservation of energy, surfaces of minimal energy, Hill stability.

References

1. Mamedov A. G., "Averaged Parabolic Restricted Three-Body Problem", *Astron. Journal*, **66**(2), 377–384 (1989) [in Russian].

2. Mamedov A. G., "About Secular Perturbations of Elements in the Restricted Parabolic Three-Body Problem", *Astron. Journal* **68**(6), 1323–1327 (1991) [in Russian].

3. Mammadli A. G., "The Limiting Case of the Double-Averaged Parabolic Restricted Three-Body Problem", *Astron. Vestn.* **41**(2), 186–189 (2007) [in Russian].

4. Kholshevnikov K. V., Mishchuk Yu. F., "The Effect of Stellar Encounters on Planetary Orbits", *Vestn. Leningr. Univ.* **7**, 72–81 (1983) [in Russian].

5. Duboshin G. N., *Cebestial mechanics. Analytical and qualitative methods* (Nauka, Moscow, 1964, 560 p.) [in Russian].

6. Lukyanov L. G., "Analog of the Surfaces of Zero Velosity in the Restricted Elliptic, Parabolic, and Hyberbolic Three-Body Problem", *Astron. Let.* **36**(11), 823–833 (2010).

7. Scheibner W., "Satzaus der Storungstheorie", *Reine Angew. Math.* **65**, 291 (1866) [in German].

8. Petr K., Nechvil M. V., "Two remarks to a special case of three bodies problem", *Casopis Pestovani Mat. Fys.* **47**, 268–273 (Praha, 1918).

9. Nechvil M. V. "Sur une nouvelle forme des equations differentielles du probleme restreint elliptique", *Compte Rendue* **182**, 310 (1926) [in French].

10. Rein Natalie, "Note sur l'article de M. V. Nechvil 'Sur une nouvelle forme des equations differentielles du probleme restreint elliptique'", *Tr. Gos. Astron. Inst. im. P. K. Shternberga* **14**, 85–87 (1937).

Для цитирования: Маммадли А. Г. Устойчивость движения планет по Хиллу при звездных сближениях // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2016. Т. 3 (61). Вып. 3. С. 498–505. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.318

For citation: Mammadli A. H. The hill stability of planetary motion under stellar approaches. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2016, vol. 3 (61), issue 3, pp. 498–505. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.318