МАТЕМАТИКА

УДК 517.938
MSC 37D40

О плотности предорбит линейного эндоморфизма тора

С. Азими, Х. Таджбакш

Университет Тарбиат Модарес,
Иран, Тегеран, P. O. Box: 14115-111

Для цитирования: *Азими С., Таджбакш Х.* О плотности предорбит линейного эндоморфизма тора // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 3. С. 369–376. https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.301

Известно, что если каждая предорбита неинъективного эндоморфизма плотна, то эндоморфизм транзитивен (т. е. существует плотная орбита). Однако все еще неизвестно, плотны ли предорбиты аносовского отображения, и неизвестны условия, необходимые для плотности всех предорбит. Используя свойства целых решеток, мы строим доказательство на рассмотрении предорбит линейных эндоморфизмов. Мы вводим класс гиперболичных линейных эндоморфизмов, обладающих свойством абсолютной гиперболичности, и доказываем, что если $A : T^m \to T^m$ — абсолютно гиперболичный эндоморфизм, то предорбита любой точки плотна в T^m.

Ключевые слова: линейный эндоморфизм, гиперболичность, транзитивность, динамические системы, отображения Аносова.

1. Введение. Известно, что если каждая предорбита неинъективного эндоморфизма, заданного на многообразии, плотна, то эндоморфизм транзитивен, т. е. существует плотная орбита. В работе [1] К. Лизана (C. Lizana), В. Пинейро (V. Pinheiro) и П. Варандас (P. Varandas) показали, что для типичного робастно транзитивного эндоморфизма существует остаточное подмножество многообразия, такое что каждая из его точек имеет плотную предорбиту. Однако все еще неизвестны условия, необходимые для плотности всех предорбит.

В этой статье мы отвечаем на поставленный выше вопрос для линейных эндоморфизмов. Для этого мы используем алгебраические инструменты, такие как, на-пример, целые решетки. Кроме того, наш подход основан на том факте, что эндоморфизмы на замкнутых многообразиях являются самонакрывающими отображениями (см. [2]). Мы показываем, что абсолютная гиперболичность является достаточным условием для плотности предорбит линейного эндоморфизма тора.

Пусть $f : \mathbb{T}^m \to \mathbb{T}^m$ — эндоморфизм. Множество $\mathcal{O}^-(p) = \cup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(p)$ будем называть *предорбитой* точки p. *Траектория* точки p — это последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ такая, что $f(x_n) = x_{n+1}$ и $x_0 = p$. *Степень* эндоморфизма — это число точек в прообразе точки. Известно, что в рассматриваемом случае это число не зависит от точки и равно дискриминанту матрицы линейного отображения (см. [3] или [4]).

Определение 1 (5)**.** Линейное отображение $A \in M_m(\mathbb{R})$ называется *абсолютно гиперболичным*, если для любого подпространства $\{0\} \subsetneq V \subset \mathbb{R}^m$, такого что $A(V) = V$, выполнено $|\det(A|_V)| \neq 1$.

Сформулируем основной результат нашей статьи.

Теорема 1. *Пусть $A : \mathbb{T}^m \to \mathbb{T}^m$ — абсолютно гиперболичный линейный эндоморфизм степени больше* 1. *Тогда любая предорбита плотна в $\mathbb{T}^m$.*

Заметим, что каждое абсолютно гиперболичное отображение является гиперболичным. Обратное, вообще говоря, не является верным.

Пример 1. Определим $B : \mathbb{T}^3 \to \mathbb{T}^3$ следующим образом:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} (mod\ 1).$$

Отображение B является произведением отображения удвоения на окружности и «кота Арнольда» (см. [6]). Собственные числа этого отображения равны 2 и $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, т. е. отображение является линейным гиперболичным эндоморфизмом. Заметим, что подпространства $E_1 := \mathbb{R} \times \{(0,0)\}$ и $E_2 := \{0\} \times \mathbb{R}^2$ инвариантны под действием $\widetilde{B} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (поднятие B до $\mathbb{R}^3$); $\det(\widetilde{B}|_{E_1}) = 2$ и $\det(\widetilde{B}|_{E_2}) = 1$, следовательно B не является абсолютно гиперболичным. Легко видеть, что предорбита точки покоя $(0,0,0) \in \mathbb{T}^3$ плотна в $S^1 \times (0,0)$, но не в $\mathbb{T}^3$.

В разделе 3 в предложении 12 мы докажем теорему 1 для точки покоя $0 := (\overbrace{0,\dots,0}^{m}) \in \mathbb{T}^m$. Затем в предложении 13 мы обобщим полученный результат для произвольной точки.

2. Решетки. В этом разделе мы делаем несколько замечаний относительно решеток и α-предельного множества эндоморфизма (подробнее о решетках см. в [7] и [8]).

Замечание 1. Пусть R — локально компактная топологическая группа. Дискретная подгруппа Γ называется *решеткой* в R, если R/Γ обладает конечным объемом в мере Хаара. Дискретная подгруппа $\mathbb{R}^m$, гомоморфная $\mathbb{Z}^m$, называется *целой решеткой.*

Замечание 2. Пусть $(\Gamma, +) \subset \mathbb{R}^m$ является целой решеткой и $B = \{v_1, \dots, v_m\}$ — ее базис. Обозначим

$$\det(\Gamma) := \det([v_1 \dots v_m]).$$

Определение 2. Пусть $f : \mathbb{T}^m \to \mathbb{T}^m$ — эндоморфизм. Для каждой точки $p \in \mathbb{T}^m$ определим *α-предельное множество* следующим образом:

$$\alpha(p) = \bigcap_{r \geq 0} \overline{\bigcup_{n=r}^{\infty} f^{-n}(p)}.$$

3. Доказательство теоремы 1. Пусть $A : \mathbb{T}^m \to \mathbb{T}^m$ — линейный эндоморфизм степени $k > 1$ и $(\rho, \mathbb{R}^m)$ — это универсальное накрытие $\mathbb{T}^m$ (см. [7]). Для удобства записи в тех местах, где не оговорено обратное, мы обозначаем через A одновременно линейный эндоморфизм $\mathbb{T}^m$ и его поднятие до $\mathbb{R}^m$. Для неподвижной точки $0 \in \mathbb{T}^m$ имеем

$$\mathbb{Z}^m = \rho^{-1}(0) \subsetneqq \rho^{-1}(A^{-1}(0)) \subsetneqq \cdots \subsetneqq \rho^{-1}(A^{-n}(0)) \subsetneqq \ldots. \tag{1}$$

Доказательство теоремы разделено на семь шагов. *Первый шаг* — доказательство следующей леммы.

Лемма 2. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ $\rho^{-1}(A^{-n}(0))$ является целой решеткой в $\mathbb{R}^m$.*

Доказательство. Для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем $\rho^{-1}(A^{-n}(0)) = A^{-n}(\mathbb{Z}^m)$. В силу того, что A линейно, $A^{-n}(\mathbb{Z}^m)$ является дискретной подгруппой $\mathbb{R}^m$, изоморфной $\mathbb{Z}^m$. Следовательно, $A^{-n}(\mathbb{Z}^m)$ — целая решетка в $\mathbb{R}^m$. □

Обозначим

$$\Gamma_0 := \rho^{-1}(0) = \mathbb{Z}^m, \qquad \Gamma_n := \rho^{-1}(A^{-n}(0)) = A^{-n}(\mathbb{Z}^m). \tag{2}$$

Обозначим также $\Gamma = \rho^{-1}(\alpha(0))$. Имеем

$$\Gamma = \bigcap_{r \geq 0} \overline{\bigcup_{n \geq r} \Gamma_n} = \bigcap_{r \geq 0} \overline{\bigcup_{n \geq r} A^{-n}(\mathbb{Z}^m)} = \overline{\bigcup_{n \geq 0} A^{-n}(\mathbb{Z}^m)}. \tag{3}$$

Заметим, что последнее равенство следует из (1). Аналогично для любой точки $p \in \mathbb{T}^m$ обозначим $\Gamma_n(p) = A^{-n}(p + \mathbb{Z}^m)$. Имеем

$$\rho^{-1}(\alpha(p)) = \Gamma(p) = \bigcap_{r \geq 0} \overline{\bigcup_{n \geq r} \Gamma_n(p)}. \tag{4}$$

Второй шаг — доказательство того, что Γ является подгруппой в $\mathbb{R}^m$.

Предложение 3. Γ *является подгруппой* в $(\mathbb{R}^m, +)$.

Доказательство. Рассмотрим $x, y \in \Gamma$. Существуют последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, такие что $x_n, y_n \in \Gamma_n$, $(x_n) \to x$ и $(y_n) \to y$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ $x_n + y_n \in \Gamma_n$ и $x + y = \lim\limits_{n \to \infty}(x_n + y_n)$ принадлежит Γ. □

Третий шаг — доказательство того, что множество Γ не является дискретным. Для этого нам потребуется специальный случай теоремы Минковского.

Теорема 4 [8]**.** *Пусть Γ является решеткой в $\mathbb{R}^m$ и пусть $U \subset \mathbb{R}^m$ — это ограниченное выпуклое замкнутое подмножество, симметричное относительно точки решетки x. Если* $\mathrm{vol}(U) \geq 2^m \det(\Gamma)$, *то U содержит хотя бы две точки решетки помимо x.*

Лемма 5. Γ *не является дискретным подмножеством* $\mathbb{R}^m$.

Доказательство. Достаточно показать, что $0 \in \Gamma$ не является изолированной точкой. В силу того, что $\det(\Gamma_0) = 1$, для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$2^m(\det(\Gamma_n)) = 2^m(\det(A^{-n}) \cdot \det(\mathbb{Z}^m)) = \frac{2^m}{k^n}.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $n \in \mathbb{N}$, что для шара $B_\varepsilon(0)$ радиуса ε с центром в 0 выполнено $\mathrm{vol}(B_\varepsilon(0)) \geq 2^m \det(\Gamma_n)$. Из теоремы Минковского следует, что $B_\varepsilon(0) \cap \Gamma_n \neq \{0\}$. $\square$

Четвертый шаг — доказательство существования подпространства пространства $\mathbb{R}^m$ внутри Γ.

Лемма 6. Γ *содержит ненулевое линейное подпространство пространства* $\mathbb{R}^m$.

Доказательство. Из леммы 5 следует, что 0 не является изолированной точкой в Γ. Пусть $\{x_n\}$ — это последовательность в $\Gamma \backslash \{0\}$, стремящаяся к 0. В силу того, что единичная сфера $S^{m-1} \subset \mathbb{R}^m$ компактна, мы можем, не умаляя общности, считать, что существует $v \in S^{m-1}$, такое что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\|x_n\|} = v.$$

Покажем, что для любого $r \in \mathbb{R}$ имеем $rv \in \Gamma$. Не умаляя общности, будем считать, что $r > 0$. Рассмотрим $a_n = \frac{r}{\|x_n\|}$. Заметим, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_n = rv$. Для достаточно больших n имеем $\lfloor a_n \rfloor > 0$ и

$$1 \leq \frac{a_n}{\lfloor a_n \rfloor} < 1 + \frac{1}{\lfloor a_n \rfloor}.$$

Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{\lfloor a_n \rfloor} = 1$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \lfloor a_n \rfloor x_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\lfloor a_n \rfloor}{a_n} a_n x_n \right) = rv.$$

Пусть $V = \{rv | r \in \mathbb{R}\}$. В силу того, что $\lfloor a_n \rfloor \in \mathbb{Z}$, для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем $\lfloor a_n \rfloor x_n \in \Gamma$. В силу того, что множество Γ замкнуто, $rv \in \Gamma$ и $V \subset \Gamma$. $\square$

Пятый шаг — изучение топологической структуры Γ. Мы докажем, что $\alpha(0)$ является связным.

Следующее утверждение является специальным случаем теоремы Картана о замкнутых подгруппах групп Ли (см. [9]).

Теорема 7 [9]**.** *Пусть H — замкнутая подгруппа $\mathbb{R}^m$. Тогда существует линейное подпространство L в $\mathbb{R}^m$ и дискретная подгруппа G группы $\mathbb{R}^m/L$, такие что если $q : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m/L$ — это фактор-отображение, то $H = q^{-1}(G)$.*

Из леммы 6 и теоремы 7 следует, что существует r-мерное подпространство $\Gamma_l \subset \Gamma$, такое что Γ/Γ_l — это дискретная подгруппа $\mathbb{R}^m/\Gamma_l$ (или, проще говоря, $\mathbb{R}^{m-r}$). Заметим также, что для любого $x \in \Gamma$, $x + \Gamma_l$ — это афинное подпространство

$\mathbb{R}^m$. Может существовать либо бесконечно много афинных подпространств $x + \Gamma_l$ ($x \in \Gamma$), либо $\Gamma = \mathbb{R}^m$. Первый случай имеет место в примере 1.

В следующей лемме мы докажем, что подпространство Γ_l является A-инвариантным. Обозначим $\widetilde{A}$ поднятие A до $\mathbb{R}^m$.

Лемма 8. *Подпространство* Γ_l *является* $\widetilde{A}$*-инвариантным.*

Доказательство. Заметим, что $\det \widetilde{A} \neq 0$ и $\widetilde{A}$ — биективное линейное отображение. Предположим, что $\widetilde{A}(\Gamma_l) \neq \Gamma_l$. В этом случае подпространство $\mathbb{R}^m$, натянутое на $\widetilde{A}(\Gamma_l) \cup \Gamma_l$, содержит нетривиальное подпространство $\langle \widetilde{A}(\Gamma_l) \cup \Gamma_l \rangle / \Gamma_l$. Приходим к противоречию. $\square$

Предложения 9 и 10 разъясняют топологические свойства $\alpha(0)$.

Предложение 9. *Существует* $0 < r \leq m$*, такое что* Γ *— это произведение* r*-мерного линейного подпространства* Γ_l *и* $\mathbb{Z}^{m-r} \subset \mathbb{R}^m/\Gamma_l$.

Доказательство. Из предыдущих теорем следует существование линейного r-мерного подпространства $\Gamma_l \subset \Gamma$ и дискретной подгруппы $Y \subset \mathbb{R}^m/\Gamma_l$, таких что $\Gamma/\Gamma_l = Y$. Докажем, что $Y = \mathbb{Z}^{m-r}$. Из (1) следует, что $\mathbb{Z}^m \subset \Gamma$. Имеем

$$\mathbb{Z}^m \subsetneqq \Gamma_l \times \mathbb{Z}^{m-r} \subsetneqq \Gamma_l \times Y = \Gamma.$$

Очевидно, $\mathbb{Z}^{m-r}$ является подгруппой $Y \subset \mathbb{R}^m/\Gamma_l$. Из определения Γ следует, что

$$\mathbb{Z}^{m-r} \subset \Gamma_1/(\Gamma_l \cap \Gamma_1) \subset \cdots \subset \overline{\bigcup_{n \geq 0} \Gamma_n/(\Gamma_l \cap \Gamma_n)} = Y. \tag{5}$$

Из леммы 8 следует, что $\widetilde{A}^{-1}(\Gamma_l) = \Gamma_l$. Таким образом, мы можем определить изоморфизм групп $\widetilde{A}|_{\mathbb{R}^m/\Gamma_l}$. Имеем $\widetilde{A}|_{\mathbb{R}^m/\Gamma_l}^{-1}(Y) = \widetilde{A}^{-1}(Y) = Y$. Теперь обозначим $A' := \widetilde{A}|_{\mathbb{R}^m/\Gamma_l}$. Тогда $A'^{-1}(Y) = Y$ и из (5) следует существование такого $n \in \mathbb{N}$, что $\mathbb{Z}^{m-r} \subsetneqq A'^{-n}(\mathbb{Z}^{m-r})$.

Предположим, что $\mathbb{Z}^{m-r} \neq Y$. В силу того, что $\mathbb{Z}^{m-r} \subsetneqq Y$, последовательность $(\Gamma_n/(\Gamma_l \cap \Gamma_n))_{n \in \mathbb{N}}$ стремится, как в соотношениях (1) и (3), к $\Gamma/\Gamma_l = Y$. Повторяя рассуждения доказательств лемм 5 и 6, для последовательности (5) получаем, что множество Y содержит подпространство $\mathbb{R}^{m-r}$. Но это противоречит тому, что Y дискретно. Следовательно $Y = \mathbb{Z}^{m-r}$. $\square$

Предложение 10. *Множество* $\alpha(0)$ *является связным.*

Доказательство. По определению $\alpha(0) = \rho(\Gamma)$ и из предложения 9 имеем $\Gamma = \Gamma_l \times \mathbb{Z}^{m-r}$. В силу того, что $\rho(\mathbb{Z}^{m-r}) = \{0\}$, получаем

$$\alpha(0) = \rho(\Gamma) = \rho(\Gamma_l \times \mathbb{Z}^{m-r}) = \rho(\Gamma_l).$$

Поскольку ρ непрерывно и Γ_l связно в $\mathbb{R}^m$, то $\alpha(0)$ связно в $\mathbb{T}^m$. $\square$

Определение 3. Пусть $A : \mathbb{T}^m \to \mathbb{T}^m$ — линейный эндоморфизм. Будем говорить, что A удовлетворяет *условию неинвариантности линейных подпространств*, если не существует такое линейное подпространство $V \subsetneq \mathbb{R}^m$, что $A(V) = V$ и $\det(A|_V) = \det(A)$.

Предложение 11 [5]. *Пусть $A : \mathbb{T}^m \to \mathbb{T}^m$ — линейный эндоморфизм. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

а) эндоморфизм A абсолютно гиперболичен;

б) $|\det(A)| \neq 1$ и A удовлетворяет условию неинвариантности линейных подпространств.

Шестой шаг — доказательство следующего утверждения.

Предложение 12. *Предорбита* 0 *плотна в* $\mathbb{T}^m$.

Доказательство. Из предложений 9 и 10 следует, что $\rho(\Gamma_l) = \alpha(0)$. Далее, из леммы 8 вытекает, что Γ_l является $\widetilde{A}$-инвариантным линейным подпространством $\mathbb{R}^m$. Из предложения 11 и того факта, что эндоморфизм A абсолютно гиперболичен, следует, что $\Gamma_l = \mathbb{R}^m$. В результате получаем

$$\alpha(0) = \rho(\Gamma_l) = \rho(\mathbb{R}^m) = \mathbb{T}^m.$$

Теперь из (1) и (2) имеем

$$\mathbb{T}^m = \alpha(0) = \rho\left(\bigcap_{r\geq 0}\overline{\bigcup_{n\geq r}\Gamma_n}\right) \subset \rho\left(\overline{\bigcup_{n\geq 0}\Gamma_n}\right) = \overline{\mathcal{O}^{-1}(0)}.$$

□

Седьмой шаг — обобщение результата предложения 12 для произвольной точки $\mathbb{T}^m$.

Предложение 13. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(а) предорбита 0 *плотна в* $\mathbb{T}^m$*;*

(б) $\cup_{n=0}^{\infty} A^{-n}(\mathbb{Z}^m)$ *плотно в* $\mathbb{R}^m$*;*

(в) предорбита любой точки плотна в $\mathbb{T}^m$.

Доказательство. (а) $\Leftrightarrow$ (б). Очевидно.

(б) $\Rightarrow$ (в). Заметим, что $\Gamma = \overline{\cup_{n=0}^{\infty} \widetilde{A}^{-n}(\mathbb{Z}^m)} = \mathbb{R}^m$. С другой стороны, для любой точки $p \in \mathbb{T}^m$ имеем $\rho^{-1}(p) = p + \mathbb{Z}^m$. В результате получаем

$$\Gamma(p) = \{u + v | u \in \Gamma(p), v \in \Gamma\} = \mathbb{R}^m.$$

Таким образом, $\rho(\Gamma(p)) = \mathbb{T}^m$ и предорбита точки p плотна в $\mathbb{T}^m$.

(в) $\Rightarrow$ (а). Очевидно. □

Утверждение теоремы 1 следует из предложений 12 и 13.

Пример 2. Из теоремы 1 следует, что любая предорбита отображения

$$\begin{bmatrix} n & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} (mod\ 1), \quad n \geq 3,$$

плотна в $\mathbb{T}^2$.

Литература

1. *Lizana C., Pinheiro V., Varandas P.* Contribution to the ergodic theory of robustly transitive maps // Disc. & Cont. Dynam. Sys. 2015. Vol. 35, no. 1. P. 353–365. https://doi.org/10.3934/dcds.2015.35.353

2. *Franks J.* Anosov Diffeomorphisms // Proc. Sympos. Pure Math., 1–26 July 1968, Berkeley, California. AMS, Providence, R. I., 1970. Vol. 14. Global Analysis. P. 61–93.

3. *Aoki N., Hiraide K.* Topological Theory of Dynamical Systems. 1994. (Vol. 52 of North Holland Mathematical library.)

4. *Przytycki F.* Anosov Endomorphisms // Studia Mathematica. 1976. P. 249–285.

5. *Anderson M., Correa J.* Transitivity of Codimension One Conservative Skew-products Endomorphisms. 2017. arXiv:1612.09337v2 [math.DS]

6. *Shub M.* Global Stability of Dynamical Systems. Springer-Verlag, 1987.

7. *Hatcher A.* Algebraic Topology // Cambridge University Press, 2002.

8. *Hilbert D., Cohn-Vossen S.* Geometry and the Imagination. 2nd ed. AMS Chelsey Publishing, 1999.

9. *Hall B. C.* Lie groups, Lie algebras, and representations: An elementary introduction. 2nd ed. Springer, 2015. (Vol. 222 of Graduate Texts in Mathematics.)

Статья поступила в редакцию 22 декабря 2019 г.;
после доработки 20 января 2020 г.;
рекомендована в печать 19 марта 2020 г.

Контактная информация:

Азими Саид — аспирант; saeed.azimi@modares.ac.ir
Таджбакш Хосро — канд. наук, доц.; khtajbakhsh@modares.ac.ir

On the density of pre-orbits under linear toral endomorphisms

S. Azimi, Kh. Tajbakhsh

University Tarbiat Modares, P. O. Box: 14115-111, Tehran, Iran

For citation: Azimi S., Tajbakhsh Kh. On the density of pre-orbits under linear toral endomorphisms. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2020, vol. 7 (65), issue 3, pp. 369–376. https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.301 (In Russian)

It is well known for non-injective endomorphisms that if for every point the set of preimages is dense in the manifold then the endomorphism is transitive (i. e. there exists a point that its orbit is dense in the manifold). But it has not yet been completely investigated that if the pre-orbit of points are dense under Anosov endomorphisms or what are the necessary conditions that make the pre-orbits of each point dense. By making a great use of the integral lattice properties, we construct our proof on the pre-image sets of points under the iterations of the linear dynamical system. We introduce a class of hyperbolic linear endomorphism that is called absolutely hyperbolic and show that if $A : T^m \to T^m$ is an absolutely hyperbolic linear endomorphism of degree more than 1 then the pre-orbit of each point is dense in T^m.

Keywords: linear endomorphism, hyperbolicity, transitivity, dynamical systems, Anosov maps.

References

1. Lizana C., Pinheiro V., Varandas P., "Contribution to the Ergodic Theory of Robustly Transitive Maps", *Disc. & Cont. Dynam. Sys.* **35** (1), 353–365 (2015). https://doi.org/10.3934/dcds.2015.35.353

2. Franks J., "Anosov Diffeomorphisms", *Proc. Sympos. Pure Math., 1–26 July 1968, Berkeley, California*, 61–93 (Vol. 14. Global Analysis, AMS, Providence, R. I., 1970).

3. Aoki N., Hiraide K., *Topological Theory of Dynamical Systems* (1994, vol. 52 of North Holland Mathematical library).

4. Przytycki F., "Anosov Endomorphisms", *Studia Mathematica*, 249–285 (1976).

5. Anderson M., Correa J., "Transitivity of Codimension One Conservative Skew-products Endomorphisms" (2017). arXiv:1612.09337v2 [math.DS]

6. Shub M., *Global Stability of Dynamical Systems* (Springer-Verlag, 1987).

7. Hatcher A., *Algebraic Topology* (Cambridge University Press, 2002).

8. Hilbert D., Cohn-Vossen S., *Geometry and the Imagination* (2nd ed., AMS Chelsey Publishing, 1999).

9. Hall B. C., *Lie groups, Lie algebras, and representations: An elementary introduction* (2nd ed., Springer, 2015, vol. 222 of Graduate Texts in Mathematics).

Received: December 22, 2019
Revised: January 20, 2020
Accepted: March 19, 2020

Authors' information:

Saeed Azimi — saeed.azimi@modares.ac.ir
Khosro Tajbakhsh — khtajbakhsh@modares.ac.ir