УДК 517.5 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 3
MSC 41A15, 41A17, 41A44

Оптимальные подпространства для среднеквадратичных приближений классов дифференцируемых функций на отрезке*

О. Л. Виноградов, А. Ю. Улицкая

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Виноградов О. Л., Улицкая А. Ю.* Оптимальные подпространства для среднеквадратичных приближений классов дифференцируемых функций на отрезке // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 3. С. 404–417. https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.304

В настоящей работе мы указываем серию приближающих подпространств, экстремальных в L_2 для трех классов функций из соболевского пространства $W_2^{(r)}$ на отрезке, удовлетворяющих некоторым граничным условиям. Полученные оптимальные пространства порождены равномерными сдвигами одной функции. В частности, мы указываем экстремальные пространства сплайнов всех степеней $d \geqslant r-1$ с равноотстоящими узлами.

Ключевые слова: пространства сдвигов, сплайны, поперечники.

1. Введение. ***1.1. Обозначения.*** В дальнейшем $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{N}$ — множества комплексных, вещественных, целых, неотрицательных целых и натуральных чисел соответственно, $[a : b] = [a, b] \cap \mathbb{Z}$. Если из контекста не следует противное, все рассматриваемые пространства функций могут быть как вещественными, так и комплексными.

Если $p \in [1, +\infty)$, то L_p — пространство измеримых, 2π-периодических, суммируемых с p-й степенью на периоде функций; $L_p[a, b]$ — пространство измеримых, суммируемых с p-й степенью на $[a, b]$ функций. Нормы в этих пространствах определяются соответственно равенствами

$$\|f\|_p = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f|^p\right)^{1/p}, \qquad \|f\|_{L_p[a,b]} = \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p}.$$

Далее, $W_2^{(r)}[a, b]$ — пространство функций f из $L_2[a, b]$, у которых производная $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывна, а $f^{(r)} \in L_2[a, b]$; класс $W_2^{(r)}$ периодических функций определяется аналогично.

Символом $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ обозначается скалярное произведение в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$;

$$E(f, \mathfrak{N})_p = \inf_{T \in \mathfrak{N}} \|f - T\|_p$$

— наилучшее приближение функции f в пространстве L_p множеством $\mathfrak{N} \subset L_p$.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 18-11-00055).

Коэффициенты Фурье функции f и дискретное преобразование Фурье набора $\{\beta_k\}_{k=0}^{2n-1}$ определяются равенствами

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt, \qquad \widehat{\beta}_l = \sum_{k=0}^{2n-1} \beta_k e^{-\frac{ilk\pi}{n}}.$$

Запись $f(x) \sim \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$ означает, что ряд в правой части есть ряд Фурье функции f.

При $n \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathbb{Z}_+$ через $\mathbf{S}_{n,\mu}$ обозначается $2n$-мерное пространство 2π-периодических сплайнов степени μ дефекта 1 по равномерному разбиению $\frac{k\pi}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$, через $\mathcal{T}_{2n-1}$ — $(2n-1)$-мерное пространство тригонометрических многочленов степени не выше $n-1$.

Символами f^e и f^o обозначаются соответственно четная и нечетная части функции f, т.е.

$$f^e = \frac{f + f(-\cdot)}{2}, \qquad f^o = \frac{f - f(-\cdot)}{2}.$$

Напомним, что *n-поперечником по Колмогорову* множества A в нормированном пространстве X называется величина

$$d_n(A; X) = \inf_{X_n} \sup_{x \in A} \inf_{y \in X_n} \|x - y\|_X,$$

где первый инфимум берется по всем подпространствам X_n пространства X размерности не выше n. Подпространства, реализующие инфимум, называются *оптимальными* или *экстремальными.*

1.2. Обзор результатов. В работе [1] М. Флоатер (M. Floater) и Э. Санде (E. Sande) рассматривали задачу среднеквадратичной аппроксимации трех классов функций из $W_2^{(r)}[0,1]$, определяемых некоторыми граничными условиями. При несколько измененной нормировке (которой мы далее будем придерживаться) эти классы суть

$$H_0^r = \{u \in W_2^{(r)}[0,\pi] \colon u^{(k)}(0) = u^{(k)}(\pi) = 0, \quad 0 \leqslant k < r, \quad k \text{ четно}\},$$
$$H_1^r = \{u \in W_2^{(r)}[0,\pi] \colon u^{(k)}(0) = u^{(k)}(\pi) = 0, \quad 0 \leqslant k < r, \quad k \text{ нечетно}\},$$
$$H_2^r = \left\{u \in W_2^{(r)}\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \colon u^{(k)}(0) = u^{(l)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad 0 \leqslant k, l < r, \quad k \text{ четно, } l \text{ нечетно}\right\}.$$

Флоатер и Санде вычислили поперечники множеств

$$A_i^r = \{u \in H_i^r \colon \|u^{(r)}\|_{L_2[0,\pi]} \leqslant 1\}, \quad i = 0, 1,$$
$$A_2^r = \left\{u \in H_2^r \colon \|u^{(r)}\|_{L_2\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} \leqslant 1\right\}$$

и привели примеры экстремальных подпространств. А именно, они показали, что

$$d_n(A_0^r) = \frac{1}{(n+1)^r}, \quad d_n(A_1^r) = \frac{1}{n^r}, \quad d_n(A_2^r) = \frac{1}{(2n+1)^r},$$

а пространства

$$\operatorname{span}\{x \mapsto \sin kx\}_{k=1}^{n}, \quad \operatorname{span}\{x \mapsto \cos kx\}_{k=0}^{n-1}, \quad \operatorname{span}\{x \mapsto \sin(2k-1)x\}_{k=1}^{n} \tag{1}$$

являются экстремальными для A_0^r, A_1^r и A_2^r соответственно. Отметим, что для пространства A_1^1 соответствующий результат был получен Колмогоровым [2]. Кроме того, авторы доказали, что для классов A_i^r существуют экстремальные сплайновые пространства, которые определяются следующим образом.

Пусть $P_0 = P_1 = \pi$, $P_2 = \pi/2$, τ — вектор узлов, расположенных на $(0, P_i)$ и различных. Обозначим через $S_{d,\tau,i}$ пространства сплайнов степени d дефекта 1 на $[0, P_i]$ и рассмотрим их n-мерные подпространства

$$\begin{aligned}
S_{d,0} &= \{s \in S_{d,\tau_0,0} \colon s^{(k)}(0) = s^{(k)}(\pi) = 0, \quad 0 \leqslant k \leqslant d, \quad k \text{ четно}\},\\
S_{d,1} &= \{s \in S_{d,\tau_1,1} \colon s^{(k)}(0) = s^{(k)}(\pi) = 0, \quad 0 \leqslant k \leqslant d, \quad k \text{ нечетно}\},\\
S_{d,2} &= \left\{s \in S_{d,\tau_2,2} \colon s^{(k)}(0) = s^{(l)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad 0 \leqslant k, l \leqslant d, \quad k \text{ четно, } l \text{ нечетно}\right\},
\end{aligned}$$

где векторы узлов τ_i при $i = 0, 1, 2$ задаются формулами

$$\tau_0 = \begin{cases} \left\{\frac{k\pi}{n+1}\right\}_{k=1}^{n}, & d \text{ нечетно},\\ \left\{\frac{k\pi}{n+1} + \frac{\pi}{2(n+1)}\right\}_{k=0}^{n}, & d \text{ четно}, \end{cases}$$

$$\tau_1 = \begin{cases} \left\{\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{2n}\right\}_{k=0}^{n-1}, & d \text{ нечетно},\\ \left\{\frac{k\pi}{n}\right\}_{k=1}^{n-1}, & d \text{ четно}, \end{cases}$$

$$\tau_2 = \begin{cases} \left\{\frac{k\pi}{2n+1} + \frac{\pi}{2(2n+1)}\right\}_{k=0}^{n-1}, & d \text{ четно},\\ \left\{\frac{k\pi}{2n+1}\right\}_{k=1}^{n}, & d \text{ нечетно}. \end{cases}$$

В [1] было доказано, что для всех $d \geqslant r - 1$ пространства сплайнов $S_{d,i}$ являются оптимальными приближающими пространствами для классов A_i^r, $i = 0, 1, 2$.

Как мы видим, узлы в каждом из пространств $S_{d,i}$ равноотстоящие, однако конкретный вид вектора узлов определяется четностью d. В настоящей работе мы показываем, что классы A_i^r имеют экстремальные сплайновые приближающие пространства с обоими типами узлов, указанными в определении τ_i. Разумеется, в случае узлов τ_i при противоположных четностях d необходимо добавить или, наоборот, ослабить граничные условия, чтобы размерность полученного пространства равнялась n.

Наша техника заключается в следующем. В [3] мы изучали периодическую ситуацию и получили широкий класс оптимальных приближающих подпространств, порожденных равноотстоящими сдвигами одной функции, в том числе пространств сплайнов. Условия экстремальности формулировались в терминах коэффициентов Фурье функции, порождающей пространство сдвигов. В данной работе мы сводим задачу для функций на отрезке к аналогичной для периодических функций и, используя результаты [3], получаем серию экстремальных подпространств для непериодической ситуации, в том числе полученных в [1].

2. Пространства сдвигов. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $B \in L_1$. Обозначим через $\mathbb{S}_{B,n}$ пространство функций s, заданных на $\mathbb{R}$ и представимых в виде

$$s(x) = \sum_{j=0}^{2n-1} \beta_j B\left(x - \frac{j\pi}{n}\right), \tag{2}$$

а через $\mathbb{S}^{\times}_{B,n}$ — пространство функций из $\mathbb{S}_{B,n}$, представимых в виде (2) с дополнительным условием

$$\sum_{j=0}^{2n-1}(-1)^j\beta_j = 0. \tag{3}$$

Подставляя в (2) разложение функции B в ряд Фурье, получаем

$$s(x)\sim\sum_{j=0}^{2n-1}\beta_j\sum_{l\in\mathbb{Z}}c_l(B)e^{il\left(x-\frac{j\pi}{n}\right)}=\sum_{l\in\mathbb{Z}}c_l(B)\widehat{\beta}_l e^{ilx}\sim\sum_{l=0}^{2n-1}\widehat{\beta}_l\Phi_{B,l}(x),$$

где

$$\Phi_{B,l}(x)=\Phi_{B,n,l}(x)=\frac{1}{2n}\sum_{j=0}^{2n-1}e^{\frac{ilj\pi}{n}}B\left(x-\frac{j\pi}{n}\right)\sim\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}c_{l+2n\nu}(B)e^{i(l+2n\nu)x}.$$

Ясно, что $\Phi_{B,l}=\Phi_{B,l+2n}$, а условие (3) равносильно $\widehat{\beta_n}=0$. Таким образом, пространства $\mathbb{S}_{B,n}$ и $\mathbb{S}^{\times}_{B,n}$ совпадают с линейными оболочками наборов $\{\Phi_{B,l}\}_{l=0}^{2n-1}$ (или, что то же самое, $\{\Phi_{B,l}\}_{l=1-n}^{n}$) и $\{\Phi_{B,l}\}_{l=1-n}^{n-1}$. При $m\in[1:n]$ обозначим через $\mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}$ линейную оболочку набора $\{\Phi_{B,l}\}_{l=1-m}^{m-1}$.

Функции $\Phi_{B,l}$ ортогональны: $\langle\Phi_{B,l},\Phi_{B,j}\rangle_{L_2}=0$ при $l\neq j$, а

$$\frac{1}{2\pi}\|\Phi_{B,l}\|_2^2=D_{B,l}=D_{B,n,l}=\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}|c_{l+2n\nu}(B)|^2.$$

Линейная независимость наборов $\left\{B\left(\cdot-\frac{j\pi}{n}\right)\right\}_{j=0}^{2n-1}$ и $\left\{B\left(\cdot-\frac{j\pi}{n}\right)\right\}_{j=1-n}^{n-1}$ равносильна тому, что функции $\Phi_{B,l}$ ненулевые при $l\in[1-n:n]$ и $l\in[1-n:n-1]$ соответственно. В этом случае системы $\{\Phi_{B,l}\}_{l=1-n}^{n}$ и $\{\Phi_{B,l}\}_{l=1-n}^{n-1}$ образуют ортогональные базисы в пространствах $\mathbb{S}_{B,n}$ и $\mathbb{S}^{\times}_{B,n}$. Ортонормированные базисы образуют функции $\frac{1}{\sqrt{2\pi D_{B,l}}}\Phi_{B,l}$.

Если B есть ядро Дирихле

$$D_{n-1}(t)=\sum_{k=1-n}^{n-1}e^{ikt},$$

то $\mathbb{S}_{B,n}=\mathbb{S}^{\times}_{B,n}=\mathcal{T}_{2n-1}$, $\mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}=\mathcal{T}_{2m-1}$, $\Phi_{B,n}=0$, а $\Phi_{B,l}$ при $|l|<n$ суть обычные экспоненты.

В случае, когда B есть B-сплайн

$$B_{n,\mu}(t)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{n}k}-1}{i\frac{\pi}{n}k}\right)^{\mu+1}e^{ikt},\quad \mu\in\mathbb{Z}_+$$

(здесь и далее при $k=0$ дробь считается равной 1), получаем, что $\mathbb{S}_{B,n}$ — это пространство сплайнов $\mathbf{S}_{n,\mu}$. Функции

$$\Phi_{B_{n,\mu},l}(x)=\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{n}l}-1}{i\frac{\pi}{n}}\right)^{\mu+1}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\frac{e^{i(l+2n\nu)x}}{(l+2n\nu)^{\mu+1}},$$

образующие в нем ортогональный базис, называются *экспоненциальными сплайнами* (по принятому соглашению $\Phi_{B_{n,\mu},0}(x) = 1$). Линейную оболочку системы $\{\Phi_{B_{n,\mu},l}\}_{l=1-n}^{n-1}$ обозначим через $\mathbf{S}_{n,\mu}^{\times}$. Экспоненциальные сплайны, вообще говоря, непериодические, введены в рассмотрение Шенбергом, основы теории и исторические комментарии содержатся в [4]. Ортогональность периодических экспоненциальных сплайнов отмечалась многими авторами; по-видимому, самые ранние работы на эту тему — [5, 6]. Пространства $\mathbf{S}_{n,\mu}^{\times}$ и $\mathbb{S}_{B,n}^{\times}$ рассматривались Виноградовым [7, 8].

Следующая лемма дает описание свойств симметрии пространств сдвигов в терминах коэффициентов Фурье.

Лемма 1. *Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$, $B \in L_1$. Тогда следующие утверждения равносильны.*

1. *Из включения $s \in \mathbb{S}_{B,n,m}^{\times}$ следует $s(-\cdot) \in \mathbb{S}_{B,n,m}^{\times}$.*
2. *Для каждого $l \in [0 : m-1]$ существует $\gamma_l \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ такое, что $\gamma_0 \in \{-1, 1\}$ и*

$$c_{-l-2nk}(B) = \gamma_l c_{l+2nk}(B) \quad \text{для всех } k \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

Доказательство. Первое утверждение означает, что $\Phi_{B,l}(-\cdot) \in \mathbb{S}_{B,n,m}^{\times}$ для всех $l \in [1-m : m-1]$. Заменяя для удобства l на $-l$, перепишем включение в виде равенства

$$\Phi_{B,-l}(-x) = \sum_{j=1-m}^{m-1} \gamma_j \Phi_{B,j}(x)$$

для некоторых γ_j. Поскольку функция $\Phi_{B,j}$ ортогональна $\Phi_{B,-l}(-\cdot)$ при $j \neq l$, имеем

$$\Phi_{B,-l}(-x) = \gamma_l \Phi_{B,l}(x).$$

Приравнивая коэффициенты Фурье функций в обеих частях последнего равенства, приходим к (4). Меняя l на $-l$ и k на $-k$, получаем $c_{l+2nk}(B) = \gamma_{-l} c_{-l-2nk}(B)$. Если $\gamma_l = 0$ для некоторого l, то $c_{l+2nk}(B) = c_{-l-2nk}(B) = 0$ и равенства выполнены для для любого γ_l. Следовательно, можно считать, что $\gamma_l \neq 0$.

С другой стороны, если равенство (4) выполнено при некотором l, для которого $\gamma_l \neq 0$, то оно также верно при $-l$ для $\frac{1}{\gamma_l}$. Поэтому достаточно рассматривать лишь $l \in [\,0 : m-1]$.

Полагая $l = 0$, получаем, что $c_{-2nk}(B) = \gamma_0 c_{2nk}(B)$ для всех k. Замена k на $-k$ дает $c_{2nk}(B) = \gamma_0 c_{-2nk}(B)$. Если $c_{2nk}(B) = 0$ для всех k, можно положить $\gamma_0 = 1$. Если же $c_{2nk}(B) \neq 0$ для некоторого k, то также $c_{-2nk}(B) \neq 0$ и, следовательно, $\gamma_0 = \pm 1$. □

Заметим, что все четные функции (в частности, ядро Дирихле) удовлетворяют второму условию леммы 1 с $\gamma_l = 1$ для всех l.

Для B-сплайна имеем $\gamma_l = e^{-i\frac{\pi}{n}l(\mu+1)}$, а для сдвинутого B-сплайна $\widetilde{B}_{n,\mu} = B_{n,\mu}\big(\cdot - \frac{\pi}{2n}\big)$ из равенства $c_k(\widetilde{B}_{n,\mu}) = e^{-\frac{ik\pi}{2n}} c_k(B_{n,\mu})$ следует, что $\gamma_l = e^{-\frac{il\pi\mu}{n}}$.

Замечание 1. При $l \in [1 : m-1]$ имеем $\Phi_{B,-l}^{e} = \gamma_l \Phi_{B,l}^{e}$, $\Phi_{B,-l}^{o} = -\gamma_l \Phi_{B,l}^{o}$. Отсюда следует, что пространство $\mathbb{S}_{B,n,m}^{\times}$ представимо в виде

$$\mathbb{S}_{B,n,m}^{\times} = \operatorname{span}\{\Phi_{B,0}\} \oplus \operatorname{span}\{\Phi_{B,l}^{e}\}_{l=1}^{m-1} \oplus \operatorname{span}\{\Phi_{B,l}^{o}\}_{l=1}^{m-1}. \tag{5}$$

Замечание 2. Если $s \in \mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}$, то $s(\cdot+\pi) \in \mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}$ и, поскольку $\Phi_{B,l}(x+\pi) = (-1)^l \Phi_{B,l}(x)$, справедливы равенства

$$\Phi^e_{B,l}(\pi - x) = (-1)^l \Phi^e_{B,l}(x), \quad \Phi^o_{B,l}(\pi - x) = (-1)^{l+1} \Phi^o_{B,l}(x).$$

3. Основные результаты. Следующая теорема доказана в [3, теорема 1].

Теорема 1. *Пусть $r,n,m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$, $B \in L_2$. Тогда следующие утверждения равносильны.*

1. Для любой функции $f \in W_2^{(r)}$ выполняется неравенство

$$E\big(f, \mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}\big)_2 \leqslant \frac{1}{m^r} \|f^{(r)}\|_2. \tag{6}$$

2. Коэффициенты Фурье функции B удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} c_l(B) \neq 0 \quad &\text{при всех } |l| \in [\,0 : m-1], \\ c_{2n\nu}(B) = 0 \quad &\text{при всех } \nu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \\ \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{|c_{l+2nk}(B)|^2}{\frac{1}{(l+2nk)^{2r}} - \frac{1}{m^{2r}}} \geqslant 0 \quad &\text{при всех } |l| \in [1 : m-1]. \end{aligned} \tag{7}$$

В дальнейшем нам понадобится простое следствие теоремы 1 для функций с нулевым средним.

Следствие 1. *Пусть $r,n,m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$, $B \in L_2$. Тогда следующие утверждения равносильны.*

1. Для любой функции $f \in W_2^{(r)}$ такой, что $c_0(f) = 0$, выполняется неравенство

$$E\big(f, \mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}\big)_2 \leqslant \frac{1}{m^r} \|f^{(r)}\|_2.$$

2. Для всех $|l| \in [1 : m-1]$ будет $c_l(B) \neq 0$ и

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{|c_{l+2nk}(B)|^2}{\frac{1}{(l+2nk)^{2r}} - \frac{1}{m^{2r}}} \geqslant 0.$$

Доказательство. Для $g \in L_2$ положим $g_0(x) = \sum\limits_{\nu \in \mathbb{Z}} c_{2n\nu}(g) e^{i2n\nu x}$. Ясно, что неравенство (6) на всем классе $W_2^{(r)}$ равносильно системе

$$E\big(f_0, \mathbb{S}^{\times}_{B_0,n,m}\big)_2 \leqslant \frac{1}{m^r} \|f_0^{(r)}\|_2,$$

$$E\big(f - f_0, \mathbb{S}^{\times}_{B-B_0,n,m}\big)_2 \leqslant \frac{1}{m^r} \|(f-f_0)^{(r)}\|_2.$$

(1) $\Longrightarrow$ *(2)*. Рассмотрим функцию $\widetilde{B} \in L_2$, для которой $c_0(\widetilde{B}) = 1$, $c_{2n\nu}(\widetilde{B}) = 0$ для всех $\nu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ и $c_k(\widetilde{B}) = c_k(B)$ при $k \neq 2n\nu$. Для всякой $f \in W_2^{(r)}$ имеем

$$E\Big(f_0, \mathbb{S}^{\times}_{\widetilde{B}_0,n,m}\Big)_2 \leqslant \|f_0 - c_0(f)\|_2 \leqslant \frac{1}{m^r} \|f_0^{(r)}\|_2, \tag{8}$$

$$E\Big(f-f_0, \mathbb{S}^{\times}_{\widetilde{B}-\widetilde{B}_0,n,m}\Big)_2 \leqslant \frac{1}{m^r}\|(f-f_0)^{(r)}\|_2. \tag{9}$$

Неравенство (8) очевидно, поскольку пространство $\mathbb{S}^{\times}_{\widetilde{B}_0,n,m}$ содержит константы, а (9) выполнено по условию. Следовательно, верно (6), а коэффициенты Фурье функции $\widetilde{B}$ удовлетворяют второму условию теоремы 1. По определению $\widetilde{B}$ то же самое верно и для $c_k(B)$ при $k \neq 2n\nu$.

(*2*) $\Longrightarrow$ (*1*). Пусть $f \in W_2^{(r)}$, $c_0(f) = 0$, а $\widetilde{B}$ определена как выше. По теореме 1 неравенство (6) выполнено для $\widetilde{B}$, а из (8) и (9) следует, что оно также верно для B. $\square$

Рассмотрим следующие классы функций:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{H}_0^r = \{u \in W_2^{(r)} \colon u \text{ нечетна}\},\\
&\widetilde{H}_1^r = \{u \in W_2^{(r)} \colon u \text{ четна}\},\\
&\widetilde{H}_2^r = \left\{u \in W_2^{(r)} \colon u \text{ нечетна, } u\left(\cdot + \frac{\pi}{2}\right) \text{ четна}\right\}.
\end{aligned}$$

Очевидно, каждая функция из $\widetilde{H}_i^r$ принадлежит H_i^r. Обратно, в силу граничных условий в определении классов H_i^r 2π-периодизация нечетного продолжения функции $u \in H_0^r$ на отрезок $[-\pi, 0]$ принадлежит $\widetilde{H}_0^r$. Аналогично 2π-периодизация четного продолжения функции $u \in H_1^r$ на отрезок $[-\pi, 0]$ есть функция из $\widetilde{H}_1^r$. Последовательно продолжая $u \in H_2^r$ до четной (относительно $\pi/2$) функции на $[0, \pi]$ и до нечетной функции на $[-\pi, \pi]$, после 2π-периодизации получаем функцию из $\widetilde{H}_2^r$.

Поэтому, полагая

$$\widetilde{A}_i^r = \{u \in \widetilde{H}_i^r \colon \|u^{(r)}\|_2 \leqslant 1\}, \quad i = 0, 1, 2,$$

мы получаем, что

$$\begin{aligned}
&d_n(\widetilde{A}_0^r; L_2) = d_n(A_0^r; L_2[0,\pi]) = \frac{1}{(n+1)^r},\\
&d_n(\widetilde{A}_1^r; L_2) = d_n(A_1^r; L_2[0,\pi]) = \frac{1}{n^r},\\
&d_n(\widetilde{A}_2^r; L_2) = d_n\left(A_2^r; L_2\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \frac{1}{(2n+1)^r}.
\end{aligned}$$

Таким образом, упомянутые во введении задачи для непериодических классов могут быть сведены к аналогичным для периодической ситуации, в которой применима теорема 1. Мы будем формулировать наши результаты для периодических классов (обозначаемых с волнами).

Замечание 3. Пусть S — замкнутое подпространство L_2, которое вместе с каждой функцией s содержит $s(-\cdot)$. Тогда элемент наилучшего приближения любой функции $u \in \widetilde{H}_0^r$ в L_2 пространством S нечетен. Действительно, пусть $\|u - s\|_2 = \inf\limits_{T \in \mathsf{S}} \|f - T\|_2$, тогда

$$\begin{aligned}
\|u-s\|_2 \leqslant \left\|u - \frac{s - s(-\cdot)}{2}\right\|_2 &= \left\|\frac{u-s}{2} + \frac{u + s(-\cdot)}{2}\right\|_2 = \\
&= \left\|\frac{u-s}{2} + \frac{-u(-\cdot) + s(-\cdot)}{2}\right\|_2 \leqslant \frac{1}{2}\left(\|u-s\|_2 + \|u(-\cdot) - s(-\cdot)\|_2\right) = \|u-s\|_2.
\end{aligned}$$

Это означает, что все неравенства в цепочке обращаются в равенства. В частности, $\|u-s\|_2 = \|u-s^o\|_2$. По единственности элемента наилучшего приближения в L_2 получаем, что s нечетна.

Аналогично, элемент наилучшего приближения любой функции $u \in \widetilde{H}_1^r$ пространством S четен. Если, кроме того, пространство S инвариантно относительно сдвига на π, то элемент наилучшего приближения $u \in \widetilde{H}_2^r$ пространством S удовлетворяет тем же условиям симметрии, что и сама функция u.

Рассмотрим m-мерные подпространства $\mathbb{S}_{B,n,m}^{\times}$:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\mathcal{S}}_{B,n,m}^{0} = \operatorname{span}\{\Phi_{B,l}^{o}\}_{l=1}^{m} \qquad \text{при } m+1 \leqslant n,\\
&\widetilde{\mathcal{S}}_{B,n,m}^{1} = \operatorname{span}\{\Phi_{B,0}\} \oplus \operatorname{span}\{\Phi_{B,l}^{e}\}_{l=1}^{m-1} \qquad \text{при } m \leqslant n,\\
&\widetilde{\mathcal{S}}_{B,n,m}^{2} = \operatorname{span}\{\Phi_{B,2l-1}^{o}\}_{l=1}^{m} \qquad \text{при } 2m+1 \leqslant n.
\end{aligned}$$

Следующие три теоремы дают достаточные условия экстремальности этих пространств.

Теорема 2. *Пусть $r, n, m \in \mathbb{N}$, $m+1 \leqslant n$, а коэффициенты Фурье функции $B \in L_2$ удовлетворяют следующим условиям.*

1. *Для любого $l \in [1:m]$ существует $\gamma_l \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ такое, что для всех $k \in \mathbb{Z}$ $c_{-l-2nk}(B) = \gamma_l c_{l+2nk}(B)$.*
2. *Для всех $\nu \in \mathbb{N}$ верно $c_{2n\nu}(B) = c_{-2n\nu}(B)$.*
3. *Для всех $l \in [1:m]$ будет $c_l(B) \neq 0$ и*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{|c_{l+2nk}(B)|^2}{\frac{1}{(l+2nk)^{2r}} - \frac{1}{(m+1)^{2r}}} \geqslant 0.$$

Тогда для любой функции $u \in \widetilde{H}_0^r$ выполняется неравенство

$$E\big(u, \widetilde{\mathcal{S}}_{B,n,m}^{0}\big)_2 \leqslant \frac{1}{(m+1)^r}\|u^{(r)}\|_2. \tag{10}$$

Доказательство. Поскольку всякая функция из $\widetilde{H}_0^r$ имеет нулевое среднее, а B удовлетворяет условиям второго пункта следствия 1, имеем неравенство

$$E\big(u, \mathbb{S}_{B,n,m+1}^{\times}\big)_2 \leqslant \frac{1}{(m+1)^r}\|u^{(r)}\|_2. \tag{11}$$

По лемме 1 пространство $\mathbb{S}_{B,n,m+1}^{\times}$ вместе с каждой функцией содержит ее четную и нечетную части. Поэтому элемент наилучшего приближения функции $u \in \widetilde{H}_0^r$ пространством $\mathbb{S}_{B,n,m+1}^{\times}$ нечетен. Отсюда следует, что пространство $\mathbb{S}_{B,n,m+1}^{\times}$ в левой части (11) можно заменить на его подпространство, состоящее только из нечетных функций. Поскольку по условию 2 функция $\Phi_{B,0}$ четна, из разложения (5) следует, что искомое приближающее подпространство совпадает с $\widetilde{\mathcal{S}}_{B,n,m}^{0}$. □

Теорема 3. *Пусть $r, n, m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$, а коэффициенты Фурье функции $B \in L_2$ удовлетворяют следующим условиям.*

1. *Для любого* $l \in [1 : m-1]$ *существует* $\gamma_l \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *такое, что для всех* $k \in \mathbb{Z}$ *верно* $c_{-l-2nk}(B) = \gamma_l c_{l+2nk}(B)$.

2. *Для всех* $l \in [0 : m-1]$ $c_l(B) \neq 0$.

3. *Для всех* $\nu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ $c_{2n\nu}(B) = 0$.

4. *Для всех* $l \in [1 : m-1]$
$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{|c_{l+2nk}(B)|^2}{\frac{1}{(l+2nk)^{2r}} - \frac{1}{m^{2r}}} \geqslant 0.$$

Тогда для любой функции $u \in \widetilde{H}_1^r$ *выполняется неравенство*
$$E\big(u, \widetilde{\mathcal{S}}^1_{B,n,m}\big)_2 \leqslant \frac{1}{m^r} \|u^{(r)}\|_2. \tag{12}$$

Доказательство. Применяя теорему 1 к $u \in \widetilde{H}_1^r$, получаем неравенство
$$E\big(u, \mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}\big)_2 \leqslant \frac{1}{m^r} \|u^{(r)}\|_2.$$
Аналогично доказательству теоремы 2 пространство $\mathbb{S}^{\times}_{B,n,m}$ в левой части последнего неравенства может быть заменено на подпространство его четных функций, т. е. на $\widetilde{\mathcal{S}}^1_{B,n,m}$. □

Теорема 4. *Пусть* $r, n, m \in \mathbb{N}$, $2m+1 \leqslant n$, *а коэффициенты Фурье функции* $B \in L_2$ *удовлетворяют следующим условиям.*

1. *Для любого* $l \in [1 : 2m]$ *существует* $\gamma_l \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *такое, что для всех* $k \in \mathbb{Z}$ *верно* $c_{-l-2nk}(B) = \gamma_l c_{l+2nk}(B)$.

2. *Для всех* $\nu \in \mathbb{N}$ $c_{2n\nu}(B) = c_{-2n\nu}(B)$.

3. *Для всех* $l \in [1 : 2m]$ *будет* $c_l(B) \neq 0$ *и*
$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{|c_{l+2nk}(B)|^2}{\frac{1}{(l+2nk)^{2r}} - \frac{1}{(2m+1)^{2r}}} \geqslant 0.$$

Тогда для любой функции $u \in \widetilde{H}_2^r$ *выполняется неравенство*
$$E\big(u, \widetilde{\mathcal{S}}^2_{B,n,m}\big)_2 \leqslant \frac{1}{(2m+1)^r} \|u^{(r)}\|_2. \tag{13}$$

Доказательство. Так как $\widetilde{H}_2^r$ — подпространство $\widetilde{H}_0^r$, по теореме 2 имеем
$$E\big(u, \widetilde{\mathcal{S}}^0_{B,n,2m}\big)_2 \leqslant \frac{1}{(2m+1)^r} \|u^{(r)}\|_2.$$
Поскольку для u выполняется равенство $u = u(\pi - \cdot)$, приближающее пространство $\widetilde{\mathcal{S}}^0_{B,n,2m}$ может быть заменено на подпространство функций, удовлетворяющих этому условию. По замечанию 2 оно совпадает с $\widetilde{\mathcal{S}}^2_{B,n,m}$. □

Замечание 4. Легко показать, что в условиях теоремы 4 пространство $\operatorname{span}\{\Phi^e_{B,2l-1}\}_{l=1}^m$ экстремально для класса функций, получаемого из H_2^r переменой ролей k и l (или соответствующей заменой условий симметрии в определении $\widetilde{H}_2^r$).

Замечание 5. Отметим, что условия теорем 2–4 инвариантны относительно сдвига B на $\frac{\pi}{2n}$.

Замечание 6. Неравенства (10), (12) и (13) обращаются в равенства на функциях $x \mapsto \sin(m+1)x$, $x \mapsto \cos mx$ и $x \mapsto \sin(2m+1)x$ соответственно.

Оценки из теорем 2–4 можно усилить стандартным способом, заменив правую часть неравенств на наилучшие приближения.

Следствие 2. *Пусть в условиях теоремы 2* $B \in W_2^{(r)}$.

1. *Если* r *четно, то для любой* $u \in \widetilde{H}_0^r$ *выполняется неравенство*

$$E\big(u, \widetilde{\mathcal{S}}^0_{B,n,m}\big)_2 \leqslant \frac{1}{(m+1)^r} E\big(u^{(r)}, \widetilde{\mathcal{S}}^0_{B^{(r)},n,m}\big)_2.$$

2. *Если* r *нечетно, то для любой* $u \in \widetilde{H}_0^r$ *выполняется неравенство*

$$E\big(u, \widetilde{\mathcal{S}}^0_{B,n,m}\big)_2 \leqslant \frac{1}{(m+1)^r} E\big(u^{(r)}, \operatorname{span}\{\Phi^e_{B^{(r)},l}\}_{l=1}^m\big)_2.$$

Доказательство. При четном r обозначим через s элемент наилучшего приближения функции $u^{(r)}$ пространством $\widetilde{\mathcal{S}}^0_{B^{(r)},n,m}$, а при нечетном r — пространством $\operatorname{span}\{\Phi^e_{B^{(r)},l}\}_{l=1}^m$. Поскольку $c_0(s) = 0$, для функции s определена 2π-периодическая r-я первообразная, обозначим ее s_r. Для каждого $l \in [1:m]$ имеем

$$\big(\Phi^o_{B,l}\big)^{(r)} = \begin{cases} \Phi^o_{B^{(r)},l}, & r \text{ четно}, \\ \Phi^e_{B^{(r)},l}, & r \text{ нечетно}, \end{cases}$$

откуда следует, что $s_r \in \widetilde{\mathcal{S}}^0_{B,n,m}$. Применяя теорему 2 к функции $u - s_r$, получаем

$$E\big(u, \widetilde{\mathcal{S}}^0_{B,n,m}\big)_2 = E\big(u - s_r, \widetilde{\mathcal{S}}^0_{B,n,m}\big)_2 \leqslant \frac{1}{(m+1)^r}\|u^{(r)} - s\|_2 = \\ = \begin{cases} \frac{1}{(m+1)^r} E\big(u^{(r)}, \widetilde{\mathcal{S}}^0_{B^{(r)},n,m}\big)_2, & r \text{ четно}, \\ \frac{1}{(m+1)^r} E\big(u^{(r)}, \operatorname{span}\{\Phi^e_{B^{(r)},l}\}_{l=1}^m\big)_2, & r \text{ нечетно}. \end{cases}$$

□

Следующие два утверждения доказываются аналогично предыдущему.

Следствие 3. *Пусть в условиях теоремы 3* $B \in W_2^{(r)}$.

1. *Если* r *четно, то для любой* $u \in \widetilde{H}_1^r$ *выполняется неравенство*

$$E\big(u, \widetilde{\mathcal{S}}^1_{B,n,m}\big)_2 \leqslant \frac{1}{m^r} E\big(u^{(r)}, \operatorname{span}\{\Phi^e_{B^{(r)},l}\}_{l=1}^{m-1}\big)_2.$$

2. Если r нечетно, то для любой $u \in \widetilde{H}_1^r$ выполняется неравенство

$$E\big(u, \widetilde{\mathcal{S}}^1_{B,n,m}\big)_2 \leqslant \frac{1}{m^r} E\big(u^{(r)}, \widetilde{\mathcal{S}}^0_{B^{(r)},n,m-1}\big)_2.$$

Следствие 4. *Пусть в условиях теоремы 4 $B \in W_2^{(r)}$.*

1. Если r четно, то для любой $u \in \widetilde{H}_2^r$ выполняется неравенство

$$E\big(u, \widetilde{\mathcal{S}}^2_{B,n,m}\big)_2 \leqslant \frac{1}{(2m+1)^r} E\big(u^{(r)}, \widetilde{\mathcal{S}}^2_{B^{(r)},n,m}\big)_2.$$

2. Если r нечетно, то для любой $u \in \widetilde{H}_2^r$ выполняется неравенство

$$E\big(u, \widetilde{\mathcal{S}}^2_{B,n,m}\big)_2 \leqslant \frac{1}{(2m+1)^r} E\big(u^{(r)}, \operatorname{span}\{\Phi^e_{B^{(r)},2l-1}\}_{l=1}^m\big)_2.$$

4. Примеры. В [3, теорема 2] мы привели легко проверяемое условие, достаточное для выполнения неравенства (7) (и, следовательно, соответствующих условий теорем 2–4). А именно, неравенство (7) справедливо для всех функций B, удовлетворяющих условию

$$|l + 2nk|^r |c_{l+2nk}(B)| \leqslant |l|^r |c_l(B)| \quad \text{для всех } |l| \in [1:m-1],\ k \in \mathbb{Z}.$$

В частности, функции с коэффициентами вида

$$c_k(B) = \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{n}k} - 1}{i\frac{\pi}{n}k}\right)^{\mu+1} \eta_k, \quad \mu \in \mathbb{Z}_+,\ \mu + 1 \geqslant r,$$

где $|\eta_{l+2nk}| \leqslant |\eta_l|$ и $\eta_l \neq 0$ при $|l| < n$, удовлетворяют этому условию при всех $m \leqslant n$. Для $\eta_k = 1$ эта формула определяет B-сплайн. Если η_k суть коэффициенты Фурье функции $K \in L_1$, то B есть среднее Стеклова порядка $\mu + 1$ от K. Например, в качестве K можно взять ядро Пуассона ($\gamma_k = e^{-\alpha|k|}$, $\alpha > 0$), ядро теплопроводности ($\gamma_k = e^{-\alpha k^2}$, $\alpha > 0$), ядра некоторых дифференциальных операторов ($\gamma_k = \frac{1}{P(ik)}$, P — многочлен, все нули которого вещественны), обобщенное ядро Бернулли ($\gamma_k = |k|^{-s} e^{-i\beta \operatorname{sign} k}$, $s > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$); в последних двух примерах полагаем $\gamma_0 = 1$.

Выбирая в теоремах 2–4 в качестве B ядро Дирихле соответствующего порядка, мы получаем экстремальные подпространства тригонометрических многочленов (1).

Теперь опишем сплайновые пространства, возникающие в теоремах 2–4, и покажем, что результаты [1] следуют из этих теорем. Напомним, что для рассматриваемых пространств периодических функций $\widetilde{H}_i^r$ их ограничения на $[0, \pi]$ (при $i = 1, 2$) или $[0, \pi/2]$ (при $i = 2$) обозначаются через H_i^r.

1. Заменим в теореме 2 n на $n + 1$ и положим $m = n$, $B = B_{n+1,d}$. Тогда пространство $\widetilde{\mathcal{S}}^0_{B,n+1,n}$ есть n-мерное подпространство нечетных сплайнов из $\mathbb{S}^\times_{B,n+1}$. Рассмотрим пространство $Q_{d,1}$ сплайнов s с узлами $\left\{\frac{k\pi}{n+1}\right\}_{k=1}^n$, удовлетворяющих граничным условиям

$$s^{(k)}(0) = s^{(k)}(\pi) = 0, \quad 0 \leqslant k < d, \quad k \text{ четно}.$$

Его размерность равна n для нечетных d и $n+1$ для четных d. Следовательно, при нечетном d имеем $\mathcal{S}^0_{B,n+1,n} = Q_{d,1} = S_{d,0}$. Для четного d пространство $\mathcal{S}^0_{B,n+1,n}$ есть n-мерное подпространство $Q_{d,1}$.

2. Заменим в теореме 2 n на $n+1$ и положим $m = n$, $B = B_{n+1,d}\bigl(\cdot - \frac{\pi}{2(n+1)}\bigr)$. Тогда пространство $\widetilde{\mathcal{S}}^0_{B,n+1,n}$ есть n-мерное подпространство нечетных сплайнов из $\mathbb{S}^{\times}_{B,n+1}$. Рассмотрим пространство $Q_{d,2}$ сплайнов s с узлами $\left\{\frac{k\pi}{n+1} + \frac{\pi}{2(n+1)}\right\}_{k=0}^{n}$, удовлетворяющих граничным условиям

$$s^{(k)}(0) = s^{(k)}(\pi) = 0, \quad 0 \leqslant k \leqslant d, \quad k \text{ четно}.$$

Его размерность равна n для четных d и $n+1$ для нечетных d. Заметим, что точки 0 и π не являются узлами. Следовательно, при четном d имеем $\mathcal{S}^0_{B,n+1,n} = Q_{d,2} = S_{d,0}$. Для нечетного d пространство $\mathcal{S}^0_{B,n+1,n}$ есть n-мерное подпространство $Q_{d,2}$.

3. Положим в теореме 3 $m = n$, $B = B_{n,d}$. Тогда пространство $\widetilde{\mathcal{S}}^1_{B,n,n}$ есть n-мерное подпространство четных сплайнов из $\mathbb{S}^{\times}_{B,n}$. Рассмотрим пространство $Q_{d,3}$ сплайнов s с узлами $\left\{\frac{k\pi}{n}\right\}_{k=1}^{n-1}$, удовлетворяющих граничным условиям

$$s^{(k)}(0) = s^{(k)}(\pi) = 0, \quad 0 \leqslant k < d, \quad k \text{ нечетно}.$$

Его размерность равна n для четных d и $n+1$ для нечетных d. Следовательно, при четном d имеем $\mathcal{S}^1_{B,n,n} = Q_{d,3} = S_{d,1}$. Для нечетного d пространство $\mathcal{S}^1_{B,n,n}$ есть n-мерное подпространство $Q_{d,3}$.

4. Положим в теореме 3 $m = n$, $B = B_{n,d}\bigl(\cdot - \frac{\pi}{2n}\bigr)$. Тогда пространство $\widetilde{\mathcal{S}}^1_{B,n,n}$ есть n-мерное подпространство четных сплайнов из $\mathbb{S}^{\times}_{B,n}$. Рассмотрим пространство $Q_{d,4}$ сплайнов s с узлами $\left\{\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{2n}\right\}_{k=0}^{n-1}$, удовлетворяющих граничным условиям

$$s^{(k)}(0) = s^{(k)}(\pi) = 0, \quad 0 \leqslant k \leqslant d, \quad k \text{ нечетно}.$$

Его размерность равна n для нечетных d и $n+1$ для четных d. Заметим, что точки 0 и π не являются узлами. Следовательно, при нечетном d имеем $\mathcal{S}^1_{B,n,n} = Q_{d,4} = S_{d,1}$. Для четного d пространство $\mathcal{S}^1_{B,n,n}$ есть n-мерное подпространство $Q_{d,4}$.

5. Заменим в теореме 4 n на $2n+1$ и положим $m = n$, $B = B_{2n+1,d}$. Рассмотрим пространство $Q_{d,5}$ сплайнов s с узлами $\left\{\frac{k\pi}{2n+1}\right\}_{k=1}^{n}$, удовлетворяющих граничным условиям

$$s^{(k)}(0) = s^{(l)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad 0 \leqslant k < d,\ 0 \leqslant l \leqslant d, \quad k \text{ четно},\ l \text{ нечетно}.$$

Его размерность равна n для нечетных d и $n+1$ для четных d. Следовательно, при нечетном d имеем $\mathcal{S}^2_{B,2n+1,n} = Q_{d,5} = S_{d,2}$. Для четного d пространство $\mathcal{S}^2_{B,2n+1,n}$ есть n-мерное подпространство $Q_{d,5}$.

6. Заменим в теореме 4 n на $2n+1$ и положим $m = n$, $B = B_{2n+1,d}\bigl(\cdot - \frac{\pi}{2(2n+1)}\bigr)$. Рассмотрим пространство $Q_{d,6}$ сплайнов s с узлами $\left\{\frac{k\pi}{2n+1} + \frac{\pi}{2(2n+1)}\right\}_{k=0}^{n-1}$, удовлетворяющих граничным условиям

$$s^{(k)}(0) = s^{(l)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad 0 \leqslant k \leqslant d,\ 0 \leqslant l < d, \quad k \text{ четно},\ l \text{ нечетно}.$$

Его размерность равна n для четных d и $n+1$ для нечетных d. Следовательно, при четном d имеем $\mathcal{S}^2_{B,2n+1,n} = Q_{d,6} = S_{d,2}$. Для нечетного d пространство $\mathcal{S}^2_{B,2n+1,n}$ есть n-мерное подпространство $Q_{d,6}$.

Выбирая в теоремах 2–4 другие значения m и n и B-сплайн (сдвинутый или нет) в роли функции B, можно получить и другие экстремальные подпространства сплайнов с равноотстоящими узлами.

Литература

1. *Floater M. S., Sande E.* Optimal spline spaces for L^2 n-width problems with boundary conditions // Constructive Approximation. 2018. P. 1–18.

2. *Kolmogorov A.* Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse // Ann. Math. 1936. Vol. 37. P. 107–110.

3. *Виноградов О. Л., Улицкая А. Ю.* Точные оценки среднеквадратичных приближений классов дифференцируемых периодических функций пространствами сдвигов // Вестник С.-Петерб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 1. С. 22–31. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.103

4. *Schoenberg I. J.* Cardinal Spline Interpolation. 2 ed. Philadelphia: SIAM, 1993.

5. *Golomb M.* Approximation by periodic spline interpolants on uniform meshes // Journal of Approximation Theory. 1968. Vol. 1. P. 26–65. https://doi.org/10.1016/0021-9045(68)90055-5

6. *Kamada M., Toriachi K., Mori R.* Periodic spline orthonormal bases // Journal of Approximation Theory. 1988. Vol. 55. P. 27–34. https://doi.org/10.1016/0021-9045(88)90108-6

7. *Виноградов О. Л.* Аналог сумм Ахиезера — Крейна — Фавара для периодических сплайнов минимального дефекта // Проблемы математического анализа. 2003. Вып. 25. С. 29–56.

8. *Виноградов О. Л.* Точные неравенства для приближений классов периодических сверток пространствами сдвигов нечетной размерности // Математические заметки. 2009. Т. 85, № 4. С. 569–584. https://doi.org/10.4213/mzm4162

Статья поступила в редакцию 19 февраля 2020 г.;
после доработки 14 марта 2020 г.;
рекомендована в печать 19 марта 2020 г.

Контактная информация:

Виноградов Олег Леонидович — д-р физ.-мат. наук, проф.; olvin@math.spbu.ru
Улицкая Анастасия Юрьевна — аспирант; baguadadao@gmail.com

Optimal subspaces for mean square approximation of classes of differentiable functions on a segment*

O. L. Vinogradov, A. Yu. Ulitskaya

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Vinogradov O. L., Ulitskaya A. Yu. Optimal subspaces for mean square approximation of classes of differentiable functions on a segment. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2020, vol. 7 (65), issue 3, pp. 404–417. https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.304 (In Russian)

In this paper, we specify a set of optimal subspaces for L_2 approximation of three classes of functions in the Sobolev spaces $W_2^{(r)}$, defined on a segment and subject to certain boundary conditions. A subspace X of dimension not exceeding n is called optimal for a function class A if the best approximation of A by X equals the Kolmogorov n-width of A. These boundary conditions correspond to subspaces of periodically extended functions with

*This work is supported by the Russian Science Foundation under grant no. 18-11-00055.

symmetry properties. All of the approximating subspaces are generated by equidistant shifts of a single function. The conditions of optimality are given in terms of Fourier coefficients of a generating function. In particular, we indicate optimal spline spaces of all degrees $d \geqslant r-1$ with equidistant knots of several different types.

Keywords: spaces of shifts, splines, n-widths.

References

1. Floater M. S., Sande E., "Optimal spline spaces for L^2 n-width problems with boundary conditions", *Constructive Approximation*, 1–18 (2018).

2. Kolmogorov A., "Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse", *Ann. Math.* **37**, 107–110 (1936).

3. Vinogradov O. L., Ulitskaya A. Yu., "Sharp estimates for mean square approximation of classes of differentiable periodic functions by shift spaces", *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **51**, iss. 1, 15–22 (2018). https://doi.org/10.3103/S1063454118010120

4. Schoenberg I. J., *Cardinal Spline Interpolation* (2 ed., Philadelphia, SIAM, 1993).

5. Golomb M., "Approximation by periodic spline interpolants on uniform meshes", *Journal of Approximation Theory* **1**, 26–65 (1968). https://doi.org/10.1016/0021-9045(68)90055-5

6. Kamada M., Toriachi K., Mori R., "Periodic spline orthonormal bases", *Journal of Approximation Theory* **55**, 27–34 (1988). https://doi.org/10.1016/0021-9045(88)90108-6

7. Vinogradov O. L., "Analog of the Akhiezer — Krein — Favard sums for periodic splines of minimal defect", *Journal of Mathematical Sciences* **114**(5), 1608–1627 (2003). https://doi.org/10.1023/A:1022360711364

8. Vinogradov O. L., "Sharp inequalities for approximations of classes of periodic convolutions by odd-dimensional subspaces of shifts", *Mathematical Notes* **85**, 544–557 (2009). https://doi.org/10.1134/S0001434609030250

Received: February 19, 2020
Revised: March 14, 2020
Accepted: March 19, 2020

Authors' information:

Oleg L. Vinogradov — olvin@math.spbu.ru
Anastasiya Yu. Ulitskaya — baguadadao@gmail.com