Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 3
УДК 519.245+519.244.5
MSC 65C05

Метод стохастической сетки в задачах оптимальной остановки*

Ю. Н. Каштанов, И. П. Федяев

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Каштанов Ю. Н., Федяев И. П.* Метод стохастической сетки в задачах оптимальной остановки // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 3. С. 425–434.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.306

В работе рассмотрено применение метода стохастической сетки при решении многомерной задачи оптимальной остановки для диффузионного процесса в случае нелинейных платежных функций. Для решения задачи в случае платежных функций азиатского опциона с геометрическим средним приводится специальная схема дискретизации диффузионного процесса. Данная схема дискретизации позволяет избавиться от сингулярностей в переходных вероятностях. Далее приводятся две оценки решения задачи методом стохастической сетки для случая переходных вероятностей стохастической сетки, заданных в виде усредненных плотностей. Доказывается состоятельность приведенных оценок. Показано, что дисперсия оценок решения обратно пропорциональна числу точек в каждом слое сетки. Полученный результат расширяет область применения метода стохастической сетки и методы работы с азиатскими опционами. Представлен численный пример результата применения полученных оценок к опциону покупки и опциону продажи в сравнении с ценами опционов, полученными при помощи регулярной сетки.

Ключевые слова: задачи оптимальной остановки, метод стохастической сетки, азиатский опцион с геометрическим средним.

1. Введение. Предположим, что ξ_n — марковская цепь в $\mathbb{R}^d$ и на траекториях этой цепи заданы «платежные функции» f_n — случайные величины, измеримые относительно $\mathcal{F}_n = \sigma\{\xi_i\}_{i=1}^n$. Задача об оптимальной остановке связана с вычислением функции

$$\mathcal{C}_N = \sup_{\tau<N} \mathbf{E} f_\tau,$$

где τ — марковский момент. В случае, когда платежная функция является функцией текущего состояния $f_n = f_n(S_n)$, решение данной задачи может быть представлено (см. [1, с. 79]) в виде $\mathcal{C}_N = Y_0(\xi_0)$, где

$$Y_N(x) = f_N(x), \quad Y_n(x) = \max\left(f_n(x), \mathbf{E}_{n,x} Y_{n+1}(\xi_{n+1})\right). \tag{1}$$

Для ее решения можно использовать регулярную сетку в пространстве значений исходного процесса, однако в многомерном случае вычислительная работа возрастает экспоненциально.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 17-01-00267 и 20-01-00011).

В работе [2] для вычисления цен опционов американского типа был предложен метод стохастической сетки, который не зависит от размерности d. Там же были сформулированы общие условия, при которых оценки этого метода статистически состоятельны. Аналогичные оценки для обобщенной модели Блэка—Шоулза были рассмотрены в [3].

В [4] были сформулированы условия применимости метода стохастической сетки к диффузионному процессу со скачками. Там же было показано, как с помощью рандомизации данный метод можно распространить на случай, когда платежная функция представлена как сумма на траектории цепи: $f_n = \sum_{i=1}^{n} g_i(\xi_i)$.

Данная работа является продолжением работы [4] в плане распространения метода стохастической сетки на случай нелинейных функционалов на траектории.

2. Постановка задачи. Пусть ξ_t представляет собой диффузионный случайный процесс в $\mathbb{R}^1$ с ограниченными, непрерывными коэффициентами диффузии $a(x)$ и сноса $b(x)$:

$$\xi_t = x_0 + \int_0^t a(\xi_s)dw_s + \int_0^t b(\xi_s)ds,$$

$\eta_t = \int_0^t h_s(\xi_s)ds$ являются интегралами по траекториям, а $f_t = f_t(\xi_t, \eta_t)$ — некоторые платежные функции.

Приведем примеры платежных функций указанного типа. В работе [5, с. 40] показано, что задача оптимальной остановки при добыче ресурсов описывается следующей платежной функцией:

$$f_t = \int_0^t \alpha_u S_u du + \beta_t S_t, \tag{2}$$

где $S_t = \exp(\xi_t)$ — цена ресурса. В случае, если f_t имеют вид

$$f_t = \left(e^{\frac{1}{t}\int_0^t \xi_u du} - K\right)^+, \tag{3}$$

решение задачи определяет цену азиатского опциона с геометрическим средним.

После дискретизации процесса ξ_t получаем марковскую цепь $\zeta_n = (\xi_n, \eta_n)$ с шагом Δ по времени и переходными вероятностями $p_n(z, dz')$, которая аппроксимирует процесс (ξ_t, η_t), при этом $\eta_n = \sum_{i=1}^{n} h(\xi_i)\Delta$. Решение данной задачи дается схемой обратной индукции (1) с заменой ξ_n на ζ_n. Для оценки математических ожиданий в (1) мы применим метод стохастической сетки, который заключается в следующем.

Для каждого шага n строится набор случайных точек $\bar{z}_n = \{z_{n,i}\}_{i=1}^{M}$ как марковская цепь с переходными вероятностями $\bar{q}_n(\bar{z}, d\bar{z}') = q_n(\bar{z}, dz'_1)\ldots q_n(\bar{z}, dz'_M)$. При этом предполагается, что существуют плотности $\rho_n(\bar{z}, z, z') = p_n(z, dz')/q_n(\bar{z}, dz')$. Соблюдение этого условия в нашем случае требует специальной схемы дискретизации, о которой пойдет речь в следующем параграфе.

Схема (1) аппроксимируется стохастической схемой

$$\check{Y}_N(z) = f_N(z), \quad \check{Y}_n(z) = \max\left(f_n(z), \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M} \rho_{n+1}(z, j)\check{Y}_{n+1}(j)\right), \tag{4}$$

где для сокращения записи введены случайные величины: $\rho_n(z, j) = \rho_{n,j}(\bar{z}_{n-1}, z, z_{nj})$, $\rho_n(i, j) = \rho_n(z_{n-1,i}, j)$, $\check{Y}_{n+1}(j) = \check{Y}_{n+1}(z_{n+1,j})$.

Обозначим через $\mathcal{F}_n$ σ-алгебру, порожденную величинами $\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n$. Определим для каждого n случайные величины j_n, принимающие значения $1, \ldots, M$ с равными вероятностями, независимые в совокупности и относительно $\mathcal{F}_N$. Если выполнено условие

$$\mathbf{E}[\rho_1(z_0, j_1) \ldots \rho(j_{n-1}, j_n) Y_n(j_n)]^2 < \infty, \quad n = 1, \ldots, N, \tag{5}$$

то имеет место неравенство [2]

$$\mathbf{E}(\check{Y}_0 - \mathcal{C}_N)^2 \leqslant C/M \tag{6}$$

и, следовательно, $\check{Y}_0$ является состоятельной оценкой $\mathcal{C}_N$.

В работе [4] было доказано условие (5) для некоторых оценок в модели, удовлетворяющей неравенству

$$p_n(z, z') \leqslant C\varphi(z - z', \sigma^2 I), \tag{7}$$

где φ — нормальная плотность с ковариационной матрицей $\sigma^2 I$. Для ряда оценок, для которых условие (5) не выполняется, была предложена модификация базовой схемы (4) в виде

$$\check{Y}_n(i) = \max\Big(f_n(i), \frac{\sum_j \rho_{n+1}(i,j)\check{Y}_{n+1}(j)}{\sum_j \rho_{n+1}(i,j)}\Big) \tag{8}$$

и доказана ее состоятельность.

В случае, когда f_n является линейной функцией от η_n, как в (2), для выполнения условия (7) можно рандомизировать η_n добавлением нормальной случайной величины ε_n. При этом, как показано в [4], сохраняется несмещенность оптимизационной задачи. Однако этот способ рандомизации не работает в нелинейном случае, например в (3). В данной работе предлагается рандомизировать функционал η_n другим способом и доказывается состоятельность предложенных оценок.

3. Предварительные утверждения. Построим марковскую цепь ζ_n, которая аппроксимирует процесс $\zeta_t = (\xi_t, \eta_t)$ и переходные плотности которой не имеют сингулярностей. Пусть $\Delta = T/(2N)$ и ε_i — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение. Определим

$$\begin{aligned}
\xi_{2n+1} &= \xi_{2n} + a(\xi_{2n})\varepsilon_{2n+1}\sqrt{\Delta} + b(\xi_{2n})\Delta, \\
\xi_{2n+2} &= \xi_{2n+1} + a(\xi_{2n})\varepsilon_{2n+2}\sqrt{\Delta} + b(\xi_{2n})\Delta, \\
\eta_n &= \sum_{i=1}^{n} \xi_i \Delta, \quad \zeta_n = (\zeta_n^{(1)}, \zeta_n^{(2)}) = (\xi_{2n}, \eta_{2n}).
\end{aligned}$$

Выпишем переходные плотности для цепи ζ_n. Переход от $(\xi_{2n}, \eta_{2n}) = (x, y)$ в точку $(\xi_{2n+1}, \eta_{2n+1}) = (x', y')$ определяется переходными вероятностями

$$P_1(x, y; dx', dy') = \varphi\big(x + b(x)\Delta - x', a^2(x)\Delta\big)dx' \; \delta_{y+x'\Delta}(dy'),$$

где $\delta_{y+x'\Delta}(\cdot)$ — мера, сосредоточенная в точке $y + x'\Delta$. Аналогично, переход из точки $(\xi_{2n+1}, \eta_{2n+1}) = (x', y')$ в точку $(\xi_{2n+2}, \eta_{2n+2}) = (x'', y'')$ определяется вероятностями

$$P_2(x', y'; dx'', dy'') = \varphi\big(x' + b(x)\Delta - x'', a^2(x)\Delta\big)dx'' \; \delta_{y'+x''\Delta}(dy'').$$

Проинтегрировав по $dx'\,dy'$ произведение $P_1(x,y;dx',dy')P_2(x',y';dx'',dy'')$, получим вероятности перехода $P(z,dz'')=p(z,z'')dx''dy''$ из $z=(x,y)$ в $z''=(x'',y'')$, где
$$p(z,z'')=\frac{1}{\Delta}\varphi(x+b(x)\Delta-x',a^2(x)\Delta)\,\varphi(x'+b(x)\Delta-x'',a^2(x)\Delta).$$
В данной формуле $x'=(y''-y)/\Delta-x''$.

Хотя мы и избавились от сингулярности, результаты [4] не могут быть применены напрямую, поскольку не выполнено неравенство (7).

Определим переходные плотности $\psi(z,z')=\varphi(x-x',A^2\Delta)\delta_{y+x'\Delta}(y')$, где A — некоторая константа, и их итерации запишем в виде
$$\psi^{(n)}(z',z'')=\int dz\,\psi(z',z)\,\psi^{(n-1)}(z,z''),\quad \psi^{(1)}(z',z'')=\psi(z',z'').$$

Лемма 1. *Итерации ψ имеют представление*
$$\psi^{(n)}(z',z'')=\varphi(x''-x',nA^2\Delta)\varphi(y''-y'-a_nx''\Delta-b_nx'\Delta,c_nA^2\Delta^3),\tag{9}$$
где $a_n=(n+1)/2$, $b_n=(n-1)/2$, $c_n=(n-1)n(n+1)/12$.

Доказательство. Лемма доказывается по индукции. □

Лемма 2. *Пусть $n\geqslant 2$ и $m>1$, тогда существуют такие константы $C>0$ и $m_1>1$, что*
$$\int dz'\,\psi(z,z')\,[\psi^{(n)}(z',z'')]^m\leqslant C[\psi^{(n+1)}(z,z'')]^{m_1}.\tag{10}$$

Доказательство. После интегрирования будем иметь
$$\int dz'\psi(z,z')[\psi^{(n)}(z',z'')]^m=C_{nm}\exp\left(-\frac{u^2}{sA^2\Delta}-\frac{(v+\alpha u)^2}{tA^2\Delta}\right),\tag{11}$$
где $u=x-x''$, $v=(y''-y)/\Delta-a_{n+1}x''-b_{n+1}x$,
$$s=\frac{m+n}{m},\quad t=\frac{c_n}{m}+a_n^2\frac{n}{m+n},\quad \alpha=\frac{n(m-1)}{2(m+n)}.$$
Заметим, что $t<c_n+a_n^2n/(n+1)=c_{n+1}$. Возьмем $\beta>0$ и, применяя неравенство
$$-2\alpha uv\leqslant u^2\alpha^2(1+\beta)+v^2/(1+\beta)$$
к аргументу в правой части (11), получим
$$-\frac{u^2}{s}-\frac{(v+\alpha u)^2}{t}\leqslant -u^2\frac{t-s\alpha^2\beta}{st}-v^2\frac{\beta}{t(1+\beta)}.$$
Для доказательства существования $m_1>1$ достаточно, чтобы выполнялись условия
$$t-s\alpha^2\beta>0,\quad st/(t-s\alpha^2\beta)<n+1,\quad t(1+\beta)/\beta<c_{n+1},$$
которые эквивалентны двойному неравенству
$$\frac{t}{c_{n+1}-t}<\beta<\frac{t(1-s/(n+1))}{s\alpha^2}.\tag{12}$$

Для того чтобы показать, что такое β существует, проверим условие

$$c_{n+1} - t - \frac{s\alpha^2}{1 - s/(n+1)} > 0. \tag{13}$$

Подставляя значения величин в неравенство (13), получим, что его левая часть равна $c_n(m-1)/m$. Лемма доказана. $\square$

Замечание. Из доказательства леммы 2 следует, что $st/(t - s\alpha^2\beta) < (n+1)/m_1$. Значит,

$$m_1 < \frac{n+1}{s} = \frac{(n+1)m}{n+m} < m.$$

Лемма 3. *Пусть η_i, $i = 1, \ldots, M$, — положительные независимые случайные величины и $\zeta_i = \eta_i^{1+\varepsilon}$, где $0 < \varepsilon \leqslant 1$, тогда*

$$\mathbf{E}\frac{\sum_i \zeta_i}{\sum_i \eta_i} \leqslant 3\frac{\sum_i \mathbf{E}\zeta_i}{\sum_i \mathbf{E}\eta_i}.$$

Доказательство приведено в [4].

4. Состоятельные оценки. Будем рассматривать платежные функции опционов

$$f_n(z) = f(\exp(y/(2n\Delta))), \tag{14}$$

где для опциона покупки имеем $f(x) = (x-K)^+$, а для опциона продажи — $f(x) = (K-x)^+$. Обозначим $\psi^{(2)}(z, z')$ через $q(z, z')$, а итерации q — через $q^{(n)}$.

Теорема 1. *Пусть $A > \max a(x)$, тогда неравенство* (6) *выполнено для схемы* (4) *с переходными плотностями*

$$q(\bar{z}, z') = \frac{1}{M}\sum_i q(z_i, z').$$

Доказательство. Рассмотрим $\left|\check{Y}_n - Y_n\right|$. Поскольку для любого x выполнено неравенство $|\max(x, b_1) - \max(x, b_2)| \leqslant |b_1 - b_2|$, то

$$\left|\check{Y}_n(z) - Y_n(z)\right| \leqslant \left|M^{-1}\sum_j \rho_{n+1}(z, j)\check{Y}_{n+1}(j) - \int p_{n+1}(z, dz')Y_{n+1}(z')\right|.$$

Добавим и вычтем под модулем в правой части величину $M^{-1}\sum_j \rho_{n+1}(z, j)Y_{n+1}(j)$. Получим

$$\left|\check{Y}_n(z) - Y_n(z)\right| \leqslant \Delta_n(z) + M^{-1}\sum_j \rho_{n+1}(z, j)\left|\check{Y}_{n+1}(j) - Y_{n+1}(j)\right|, \tag{15}$$

где

$$\Delta_n(z) = \left|M^{-1}\sum_j \rho_{n+1}(z, j)Y_{n+1}(j) - \int p_{n+1}(z, dz')Y_{n+1}(z')\right|. \tag{16}$$

Обозначим через $\mathbf{E}_{\mathcal{F}_n}$ условное математическое ожидание относительно $\mathcal{F}_n$ и перепишем неравенство (15) в виде

$$\left|\check{Y}_n(z) - Y_n(z)\right| \leqslant \Delta_n(z) + \mathbf{E}_{\mathcal{F}_N}\rho_{n+1}(z, j_{n+1}) \left|\check{Y}_{n+1}(j_{n+1}) - Y_{n+1}(j_{n+1})\right|.$$

Итерируя это неравенство и полагая $n = 0$, получаем

$$\left|\check{Y}_0(z_0) - Y_0(z_0)\right| \leqslant \Delta_0(z_0) + \sum_{k=1}^{N-1} \mathbf{E}_{\mathcal{F}_N}\rho_1(z_0, j_1)\ldots\rho_k(j_{k-1}, j_k)\Delta_k(j_k). \qquad (17)$$

Заметим, что из $p(z, z') \leqslant Cq(z, z')$ следует, что $\rho_1(z_0, j) \leqslant C$ для любого j. Далее для любого j имеем

$$\mathbf{E}_{\mathcal{F}_N}\rho_2(j_1, j) = \frac{\frac{1}{M}\sum_i p_2(z_{1i}, z_{2j})}{\frac{1}{M}\sum_i q(z_{1i}, z_{2j})} \leqslant C.$$

Индукцией получаем

$$\left|\check{Y}_0 - Y_0\right| \leqslant C\sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{E}_{\mathcal{F}_N}\Delta_k(j_k).$$

Возведем в квадрат, возьмем математическое ожидание и применим неравенство Гельдера для сумм, получим

$$\mathbf{E}\left|\check{Y}_0 - Y_0\right|^2 \leqslant CN\sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{E}\mathbf{E}_{\mathcal{F}_k}\Delta_k^2(j_k).$$

Поскольку $\mathbf{E}_{\mathcal{F}_k}\Delta_k^2(j_k)$ является дисперсией выборочного среднего независимых одинаково распределенных случайных величин, то

$$\mathbf{E}_{\mathcal{F}_k}\Delta_k^2(j_k) \leqslant \frac{1}{M}\mathbf{E}_{\mathcal{F}_k}\rho_{k+1}^2(j_k, 1)Y_{k+1}^2(1).$$

Таким образом, получаем неравенство

$$\mathbf{E}\left|\check{Y}_0 - Y_0\right|^2 \leqslant \frac{C}{M}\sum_{k=0}^{N-1}\int dz'\, Y_{k+1}^2(z')\, \mathbf{E}\mathbf{E}_{\mathcal{F}_{k-1}}\frac{\sum_i q^2(z_{ki}, z')}{\sum_i q(z_{ki}, z')}.$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что интеграл сходится. Применим лемму 3 к математическому ожиданию в правой части, полагая $\eta_i = q(z_{ki}, z')$, $\varepsilon = 1$, получим

$$\mathbf{E}_{\mathcal{F}_{k-1}}\frac{\sum_i q^2(z_{ki},\, z')}{\sum_i q(z_{ki},\, z')} \leqslant 3\frac{\sum_i \mathbf{E}_{\mathcal{F}_{k-1}}q^2(z_{ki},\, z')}{\sum_i \mathbf{E}_{\mathcal{F}_{k-1}}q(z_{ki},\, z')}.$$

Далее применим леммы 1 и 2 к знаменателю и числителю соответственно, запишем

$$\frac{\sum_i \mathbf{E}_{\mathcal{F}_{k-1}}q^2(z_{ki},\, z')}{\sum_i \mathbf{E}_{\mathcal{F}_{k-1}}q(z_{ki},\, z')} \leqslant C\frac{\sum_i [q^{(2)}(z_{k-1,i},\, z')]^{m_1}}{\sum_i q^{(2)}(z_{k-1,i}, z')},$$

где $m_1 > 1$. К полученному выражению можно также применить вышеупомянутые леммы. После k итераций получим оценку

$$\mathbf{E}\frac{\sum_i q^2(z_{ki}, z')}{\sum_i q(z_{ki}, z')} \leqslant C[q^{(k)}(z_0, z')]^{\varepsilon}.$$

Поскольку $f_k(z) \leqslant \exp(y/(2k\Delta))$, интеграл $\int dz'\, Y_{k+1}^2(z')[q^{(k)}(z_0,z')]^{\varepsilon}$ конечен. Теорема доказана. $\square$

Замечание. В [1] было доказано, что оценка (4) является оценкой сверху. Как показывают расчеты, смещение вверх может быть весьма значительным. Чтобы его нивелировать, требуется очень большое значение M. Те же расчеты показывают, что оценки на базе схемы (8) лишены этого недостатка. Покажем, что они также являются состоятельными.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и платежные функции ограничены, тогда неравенство* (6) *имеет место для схемы* (8).

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 1 получаем

$$\left|\check{Y}_n(z) - Y_n(z)\right| \leqslant \Delta_n(z) + \left|\frac{\sum_j \rho_{n+1}(z,j)\check{Y}_{n+1}(j)}{\sum_j \rho_{n+1}(z,j)} - \frac{1}{M}\sum_j \rho_{n+1}(z,j)Y_{n+1}(j)\right|,$$

где Δ_n определяется формулой (16). Второе слагаемое оценивается сверху выражением

$$\left|\frac{\sum_j \rho_{n+1}(z,j)\check{Y}_{n+1}(j)}{\sum_j \rho_{n+1}(z,j)}\right| \left|\frac{1}{M}\sum_j \rho_{n+1}(z,j) - 1\right| + \frac{1}{M}\sum_j \rho_{n+1}(z,j)\left|\check{Y}_{n+1}(j) - Y_{n+1}(j)\right|.$$

В силу ограниченности платежной функции дробь в первом слагаемом ограничена константой, поэтому

$$\left|\check{Y}_n(z) - Y_n(z)\right| \leqslant C\widetilde{\Delta}_n(z) + \frac{1}{M}\sum_j \rho_{n+1}(z,j)\left|\check{Y}_{n+1}(j) - Y_{n+1}(j)\right|,$$

где $\widetilde{\Delta}_n(z) = \Delta_n(z) + \left|M^{-1}\sum_j \rho_{n+1}(z,j) - 1\right|$. Отметим, что как и в первом, так и во втором слагаемых в $\widetilde{\Delta}_n(z)$ под модулем стоят выборочные средние независимых случайных величин с нулевым математическим ожиданием. Дальнейший ход доказательства совпадает с приведенным в теореме 1. $\square$

Что касается неограниченных функций, то будем считать, что возможна следующая трансформация. Пусть существуют такие функции $g_n(z)$, что выполнено $f_n(z) \leqslant g_n(z)$, и, кроме того, известны интегралы $P_n(z) = \int p(z,dz')g_n(z')$. В этом случае определим новую плотность $\widetilde{p}_n(z,z') = p(z,z')g_n(z')/P_n(z)$, а также новую платежную функцию $\widetilde{f}_n(z) = f_n(z)/g_n(z)$ и новую индукционную схему

$$\widetilde{Y}_N(z) = \widetilde{f}_N(z), \quad \widetilde{Y}_n(z) = \max\left(\widetilde{f}_n(z), \alpha_n(z)\int \widetilde{p}_{n+1}(z,dz')\widetilde{Y}_{n+1}(z')\right), \tag{18}$$

где $\alpha_n(z) = P_{n+1}(z)/g_n(z)$. Заметим, что при этом $\widetilde{Y}_n(z) = Y_n(z)/g_n(z)$ и схема (8) преобразуется в схему

$$\check{Y}_N(z) = \widetilde{f}_N(z), \quad \check{Y}_n(z) = \max\left(\widetilde{f}_n(z), \alpha_n(z)\frac{\sum_j \widetilde{\rho}_{n+1}(z,j)\,\check{Y}_{n+1}(j)}{\sum_j \widetilde{\rho}_{n+1}(z,j)}\right), \tag{19}$$

где $\widetilde{\rho}$ — соответствующие плотности.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1, платежная функция определена формулой* (14) *с* $f(x) = (x - K)^+$ *и*

$$g_n(z) = \sum_{s=\pm 1} \sum_{j=0}^{N-n} e^{sy/(2n\Delta)} e^{sjx/n}. \tag{20}$$

Тогда для схемы (19) *выполнено неравенство* (6).

Доказательство. Введем функции $g_{nsj}(z) = \exp(sy/(2n\Delta) + sjx/n)$ и рассмотрим преобразование $P_{nsj}(z) = \int dz'\, p(z, z')\, g_{nsj}(z')$. Нетрудно посчитать, что

$$P_{nsj}(z) \leqslant C \exp\Big(\frac{sy}{2n\Delta} + \frac{sx(j+1)}{n}\Big). \tag{21}$$

Поскольку $P_n(z) = \sum_s \sum_j P_{nsj}(z)$, то

$$P_{n+1}(z) \leqslant C \sum_{j=1}^{N-n} \Big[\exp\Big(\frac{y + 2\Delta jx}{2\Delta(n+1)}\Big) + \exp\Big(-\frac{y + 2\Delta jx}{2\Delta(n+1)}\Big)\Big].$$

Воспользуемся следующим неравенством: пусть $1 < a < b$, тогда $a + 1/a < b + 1/b$, из которого следует, что

$$P_{n+1}(z) \leqslant C \sum_{j=0}^{N-n} \Big[\exp\Big(\frac{y + 2\Delta jx}{2\Delta n}\Big) + \exp\Big(-\frac{y + 2\Delta jx}{2\Delta n}\Big)\Big] = C g_n(z).$$

Таким образом, $\alpha_n(z) \leqslant C$. Определим переходную плотность

$$\begin{aligned}\tilde{p}_{nsj}(z, z') = p(z, z') g_{nsj}(z')/P_{nsj}(z) = \\ = \varphi(x' - x - 2b(x)\Delta - \delta_1,\ a^2(x)2\Delta)\times \\ \times \varphi(y' - y - 0.5x\Delta - 1.5x'\Delta - \delta_2,\ 0.5a^2(x)\Delta^3),\end{aligned}$$

где $\delta_1 = sa^2(x)\Delta(2j + 1.5)/n$, $\delta_2 = sa^2(x)\Delta^2/(4n)$. Отсюда следует, что

$$p_{nsj}(z, z') \leqslant Cq(z, z'). \tag{22}$$

Заметим, что $\tilde{p}_n(z, z')$ может быть представлена в виде

$$\tilde{p}_n(z, z') = \sum_{s=\pm 1} \sum_{j=0}^{N-n} \lambda_{nsj}(z) \tilde{p}_{nsj}(z, z'), \tag{23}$$

где $\lambda_{nsj}(z) = P_{nsj}(z)/P_n(z)$, при этом $\sum_s \sum_j \lambda_{nsj}(z) = 1$. Из представления (23) следует, что для $\tilde{p}_n(z, z')$ также верна оценка (22). Далее можем применить теорему 2. □

5. Численные результаты. Рассмотрим случай, когда $S_t = S_0 \exp(\xi_t)$ является ценой некоторого финансового актива. В этом случае диффузионный процесс ξ_t определяется формулой

$$d\xi_t = a(\xi_t) dw_t + (r - 0.5a^2(\xi_t)) dt, \tag{24}$$

где $a(x)$ — волатильность актива, r — процентная ставка. Пусть $\eta_t = \int_0^t \xi_u du$. Платежные функции имеют вид $f_t = e^{-rt} f\left(S_0 e^{\eta_t/t}\right)$, где $f(x) = (K - x)^+$ в случае опциона продажи и $f(x) = (x - K)^+$ в случае опциона покупки.

Для численного примера функция волатильности $a(x)$ взята убывающей от 0.6 до 0.1 при изменении x от $-\infty$ до ∞; остальные параметры имеют следующие значения: $S_0 = 100$, $K = 100$, $T = 1$, $r = 0$. В качестве альтернативы методу случайной сетки была использована регулярная двумерная сетка, которая дает значения 6.80 для опциона продажи и 6.23 для опциона покупки.

Что касается метода стохастической сетки, то, как уже отмечалось, схема (4) дает завышенную оценку. Результаты вычислений по схемам (8) и (19) приведены в таблице. Расчеты проводились для 20 шагов, ошибка соответствует правилу трех сигм и рассчитана на основе 20 реализаций.

M	Опцион продажи	Опцион покупки
2400	6.89 ± 0.17	6.24 ± 0.19
9600	6.84 ± 0.08	6.12 ± 0.11

6. Заключение. В работе исследовался метод стохастической сетки для решения задачи оптимальной остановки для диффузионного процесса в случае платежных функций, являющихся нелинейными функционалами вдоль траекторий. Были рассмотрены две оценки решения задачи в случае переходных вероятностей стохастической сетки, заданных в виде усредненных плотностей, и было показано, что среднеквадратичное отклонение этих оценок обратно пропорционально количеству узлов в каждом слое сетки.

Литература

1. *Shiryaev A. N.* Optimal Stopping Rules. Springer-Verlag Berlin and Heidelberg, 2008.
2. *Broadie M., Glasserman P.* A stochastic mesh method for pricing high-dimensional American options // Journal of Computational Finance. 2004. Vol. 7, no. 4. P. 35–72.
3. *Bally V., Caramellino L., Zanette A.* Pricing and hedging American options by Monte Carlo methods using a Malliavin calculus approach // Journal of Monte Carlo Methods and Applications. 2005. Vol. 11. Iss. 2. P. 121–129. https://doi.org/10.1515/mcma-2017-0107
4. *Kashtanov Yu.* Stochastic mesh method for optimal stopping problems // Monte Carlo Methods and Applications. 2017. Vol. 23. P. 121–130.
5. *Øksendal B., Sulem A.* Applied stochastic control of jump diffusions. Berlin; Heidelberg: Springer, 2006.

Статья поступила в редакцию 14 октября 2019 г.;
после доработки 16 декабря 2019 г.;
рекомендована в печать 19 марта 2020 г.

Контактная информация:

Каштанов Юрий Николаевич — канд. физ.-мат. наук, доц.; y.kashtanov@spbu.ru
Федяев Игорь Павлович — студент; flooppik@gmail.com

Stochastic mesh method for optimal stopping problems

Yu. N. Kashtanov, I. P. Fedyaev

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Kashtanov Yu. N., Fedyaev I. P. Stochastic mesh method for optimal stopping problems. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2020, vol. 7 (65), issue 3, pp. 425–434. https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.306 (In Russian)

The stochastic mesh method for solving a multidimensional optimal stopping problem for a diffusion process with non-linear payoff is considered. To solve the problem in the case of payoff for an Asian option with geometric average we provide a special discretization scheme for the diffusion process. This sampling scheme allows one to get rid of singularities in transition probabilities. Then, we consider transition probabilities of a stochastic mesh defined as averaged densities. Two estimates of the solution to the problem by the stochastic mesh method are given. The consistency of the defined estimates is proved. It is shown that the variance of the solution estimates is inversely proportional to the number of points in each mesh layer. The result extends the application area of the stochastic mesh method. A numerical example of the result is presented. We applying estimates to the call and put options compared to the option prices obtained through the regular mesh.

Keywords: optimal stopping, stochastic mesh, Asian option with geometric average.

References

1. Shiryaev A. N., *Optimal Stopping Rules* (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2008).

2. Broadie M., Glasserman P., "A stochastic mesh method for pricing high-dimensional American options", *Journal of Computational Finance* **7**(4), 35–72 (2004).

3. Bally V., Caramellino L., Zanette A., "Pricing and hedging American options by Monte Carlo methods using a Malliavin calculus approach", *Journal of Monte Carlo Methods and Applications* **11**, 97–134 (2005).

4. Kashtanov Yu., "Stochastic mesh method for optimal stopping problems", *Monte Carlo Methods and Applications* **23**, iss. 2, 121–129 (2017). https://doi.org/10.1515/mcma-2017-0107

5. Øksendal B., Sulem A., *Applied stochastic control of jump diffusions* (Springer, Berlin, Heidelberg, 2006).

Received: October 14, 2019
Revised: December 16, 2019
Accepted: March 19, 2020

Authors' information:

Yuriy N. Kashtanov — y.kashtanov@spbu.ru
Igor P. Fedyaev — flooppik@gmail.com