УДК 519.218 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 3
MSC 60G18

О некоторых локальных асимптотических свойствах последовательностей со случайным индексом*

О. В. Русаков[1], *Ю. В. Якубович*[1], *Б. А. Баев*[2]

[1] Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9
[2] Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
Российская Федерация, 190008, Санкт-Петербург, ул. Союза Печатников,16

Для цитирования: *Русаков О. В., Якубович Ю. В., Баев Б. А.* О некоторых локальных асимптотических свойствах последовательностей со случайным индексом // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 3. С. 453–468. https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.308

Мы рассматриваем случайные последовательности со случайным индексом, управляемым дважды стохастическим пуассоновским процессом. Мы называем процессом пуассоновского случайного индекса (ПСИ-процессом) случайный процесс с непрерывным временем $\psi(t)$, полученный путем субординации последовательности случайных величин (ξ_j), $j = 0, 1, \ldots$, дважды стохастическим пуассоновским процессом $\Pi_1(t\lambda)$ посредством замены $\psi(t) = \xi_{\Pi_1(t\lambda)}$, $t \geqslant 0$, где случайная интенсивность λ предполагается независимой от стандартного пуассоновского процесса Π_1. В настоящей статье мы ограничиваемся случаем независимых одинаково распределенных случайных величин (ξ_j) с конечной дисперсией. Для дробного процесса Орнштейна — Уленбека с показателем Хёрста $H \in (0, 1/2)$, который был введен и исследован Р. Вольпертом и М. Такку (2005), мы находим представление в виде предела нормированных сумм независимых одинаково распределенных ПСИ-процессов с явно заданным распределением случайной интенсивности λ. Такой дробный процесс Орнштейна — Уленбека локально в окрестности нулевого момента времени приближает в средне квадратичном дробное броуновское движение с тем же показателем Хёрста $H \in (0, 1/2)$. Мы детально изучаем следующие два примера ПСИ-процессов со случайной интенсивностью λ, порождающей дробный процесс Орнштейна — Уленбека в смысле Р. Вольперта и М. Такку. Это телеграфный процесс, который возникает, когда ξ_0 имеет распределение Радемахера ± 1 с вероятностью $1/2$, и ПСИ-процесс с равномерным распределением для ξ_0. Для этих примеров мы вычисляем точные и асимптотические значения локального модуля непрерывности для одного ПСИ-процесса по малому интервалу времени фиксированной длины.

Ключевые слова: дробный процесс Орнштейна — Уленбека, дробное броуновское движение, псевдо-пуассоновский процесс, случайная интенсивность, телеграфный процесс, модуль непрерывности.

1. Введение. Стохастические процессы с непрерывными траекториями, обладающие свойствами автомодельности (самоподобия — self-similarity), после работ Б. Мандельброта [1, 2] представляют не только теоретический интерес, но и имеют важные практические применения, особенно в сфере финансов и телекоммуника-

---

*Работа О. В. Русакова и Ю. В. Якубовича выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 20-01-00646 А).

ций. В ряду самоподобных стохастических процессов, безусловно, на первом месте стоит дробное броуновское движение (дБд) — гауссовский процесс с нулевым начальным значением, со стационарными приращениями, со степенным ростом дисперсии t^{2H}, где время $t \geqslant 0$. Здесь $H \in (0, 1]$ — так называемый показатель Хёрста. В настоящей работе мы изучаем дБд при $H \in (0,\ 1/2)$ для вогнутой функции накопленной дисперсии. В этом случае дБд локально в окрестности нуля приближается дробным процессом Орнштейна—Уленбека. Дробный процесс Орнштейна—Уленбека в данной статье рассматривается в смысле Р. Вольперта и М. Такку [3], как дробная производная решения классического стохастического дифференциального уравнения (СДУ) Ланжевена (см., напр., [4]). Классический процесс Орнштейна—Уленбека (ОУ) (стационарный гауссовский марковский процесс) есть стационарное решение СДУ Ланжевена. После пионерской работы Дж. Ламперти [5], где посредством неслучайной замены времени, так называемого преобразования Ламперти, устанавливается прямая связь между броуновским движением и процессом ОУ, появилась возможность изучать броуновское движение посредством ОУ и наоборот. Эта связь в дальнейшем распространилась и на дБд. Однако для применения преобразования Ламперти с целью получения дБд необходимо рассматривать другой дробный процесс Орнштейна—Уленбека, а именно в смысле О. Е. Барндорфа-Нильсена [6, 7]. Необходимо отметить еще одно обобщение процесса ОУ на «дробный» случай — когда в СДУ Ланжевена вместо приращений обычного броуновского движения рассматриваются приращения дБд (см., напр., [8]). Дробные процессы Орнштейна—Уленбека, построенные во всех обозначенных здесь смыслах, всегда стационарны и гауссовы.

ПСИ-процессы, которые мы изучаем в данной статье, представляют собой дважды стохастические пуассоновские субординаторы для последовательностей $(\xi) = (\xi_j)$, $j = 0, 1, \ldots$, состоящих из независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым средним и конечной дисперсией. Более детальное описание ПСИ-процессов представлено в следующем разделе статьи.

В настоящей работе мы предлагаем конструкцию построения дробного процесса Орнштейна—Уленбека в смысле Р. Вольперта и М. Такку, основанную на приближении суммами независимых одинаково распределенных ПСИ-процессов со случайной интенсивностью $\varrho_\varkappa$, имеющей гамма-распределение со случайным гамма-распределенным масштабом (см. формулу (14) из теоремы 1 в разделе 3), или, что эквивалентно, корня из обращенного бета-распределения (см. формулу (27)).

Найденное распределение случайной интенсивности $\varrho_\varkappa$ позволяет получить требуемую ковариацию ПСИ-процесса, совпадающую с ковариацией дробного процесса Орнштейна—Уленбека в смысле Р. Вольперта и М. Такку. Последующее применение центральной предельной теоремы для векторов устанавливает слабую сходимость конечномерных распределений и позволяет вывести ряд асимптотических соотношений. Для дальнейшего исследования пределов сумм ПСИ-процессов со случайной интенсивностью с целью установления фактов сходимости в функциональных пространствах в работе доказана лемма о локальном модуле непрерывности для ПСИ-процессов. Функциональная предельная теорема для нормированных сумм ПСИ-процессов с неслучайной интенсивностью доказана в [9].

Одним из простейших, но уже содержательных примеров ПСИ-процесса является так называемый телеграфный процесс [10]. Телеграфный процесс мы рассматриваем в качестве основного пробного процесса для дальнейшего исследования тотального модуля непрерывности ПСИ-процессов — супремума локального модуля непрерывности, взятого по всему времени процесса.

Вычисление точного распределения локального модуля непрерывности для произвольного распределения членов последовательности (ξ) представляет собой весьма сложную и трудоемкую задачу. Мы предлагаем решение этой задачи для двух случаев: распределения Радемахера, дающего телеграфный процесс, и равномерного распределения. Для этих двух распределений в конце статьи мы приводим точные и асимптотические значения локального модуля непрерывности для одного ПСИ-процесса с интенсивностью $\varrho_{\varkappa}$ по малому интервалу времени фиксированной длины.

Напомним необходимые определения и свойства стандартного дробного броуновского движения.

Определение 1. *Стандартное дробное броуновское движение* $W_H(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, *с параметром Хёрста (индексом самоподобия)* $H \in (0,1]$ определяется как начинающийся из нуля гауссовский процесс с нулевым средним и ковариационной функцией

$$\mathbb{E}\{W_H(s)W_H(t)\} \stackrel{\triangle}{=} R_H(s,t) = \frac{1}{2}\left(s^{2H} + t^{2H} - |t-s|^{2H}\right), \qquad s,t \in \mathbb{R}_+. \tag{1}$$

Траектории процессов дБд непрерывны и нигде не дифференцируемы (кроме вырожденного случая $H = 1$, когда траектории представляют собой, почти наверное, случайные полупрямые, лежащие в правой полуплоскости). Процессы дБд характеризуются стационарными приращениями и, главное, свойством степенного самоподобия (автомодельности)

$$W_H(at) \stackrel{d}{=} a^H W_H(t), \qquad \forall a > 0, \qquad t \in \mathbb{R}_+. \tag{2}$$

Знак $\stackrel{d}{=}$ обозначает равенство конечномерных распределений.

Важно заметить, что если у центрированного гауссовского процесса дисперсия нарастает как t^{2H} и он имеет стационарные приращения, то с необходимостью этот процесс есть дБд с параметром Хёрста $H \in (0,1]$. Принято классифицировать следующие случаи: когда $H \in (0,1/2)$ и функция накопленной дисперсии строго вогнута, приращения дБд отрицательно коррелированы; когда $H = 1/2$ и функция накопленной дисперсии линейна (стандартное броуновское движение), приращения независимы; когда $H \in (1/2,1)$ и функция накопленной дисперсии строго выпукла, приращения дБд положительно коррелированы; когда $H = 1$ и траектории процесса линейны с вероятностью 1, корреляция приращений равна единице. Заметим, что марковское свойство для дБд выполнено только для случая стандартного броуновского движения, то есть когда $H = 1/2$.

2. ПСИ-процессы: определение и основные свойства. Опишем используемую в настоящей работе конструкцию субординации индекса случайной последовательности дважды стохастическим пуассоновским процессом. Рассмотрим стандартный пуассоновский процесс единичной интенсивности $\Pi_1(t)$, $t \geqslant 0$. Пусть $(\xi) = (\xi_n)$, $n = 0, 1, \ldots$, — некоторая последовательность случайных величин, $\lambda = \lambda(\omega)$, $\omega \in \Omega$, — некоторая неотрицательная случайная величина, причем λ, (ξ) и Π_1 независимы в совокупности.

Определение 2. *Процессом пуассоновского случайного индекса (ПСИ-процессом) назовем* случайный процесс ψ_λ с непрерывным временем, полученный рандомизацией последовательности (ξ) дважды стохастическим пуассоновским процессом со случайной интенсивностью λ,

$$\psi(s) = \psi_\lambda(s) \stackrel{\triangle}{=} \xi_{\Pi_1(s\lambda)}, \qquad s \geqslant 0. \tag{3}$$

Пуассоновский процесс Π_1 назовем *ведущим*, а последовательность (ξ) — *подчиняющейся*, или *ведомой*.

В качестве простого (но уже нетривиального) примера ПСИ-процесса выделим телеграфный процесс [10], канонически определяемый следующим образом:

$$g(s) = g_\mu(s) \stackrel{\triangle}{=} c \cdot (-1)^{\Pi_\mu(s)}, \quad s \geqslant 0\,, \tag{4}$$

где c есть независимая от пуассоновского процесса Π_μ случайная величина с распределением Радемахера, принимающая значения ± 1 с вероятностями $1/2$; интенсивность $\mu > 0$ здесь понимается неслучайной. Также естественным образом определяется телеграфный процесс со случайной положительной интенсивностью μ: $\Pi_\mu(s)$ в (4) следует заменить на $\Pi_1(\mu s)$, где Π_1 и μ предполагаются независимыми.

Вследствие «теоремы о раскраске» [11, гл. 5] телеграфный процесс имеет распределение ПСИ-процесса, когда величины в последовательности (ξ) независимые и имеют одинаковое распределение Радемахера, причем у соответствующего телеграфного процесса интенсивность уменьшается в два раза, то есть

$$\xi_{\Pi_1(\lambda s)} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \xi_0 (-1)^{\Pi_1(\lambda s/2)}\,, \qquad s \geqslant 0\,, \tag{5}$$

где равенство $\mathcal{D}$ по распределению понимается в пространстве Скорохода $\mathcal{D}$ на $\mathbb{R}_+$.

Непосредственно из определения 2 для ПСИ-процесса нетрудно увидеть, что случайный процесс ψ является стационарным в узком смысле, если подчиняющаяся последовательность (ξ) стационарна в узком смысле.

В настоящей работе мы рассматриваем только ситуацию, когда ведомая последовательность (ξ) состоит из независимых одинаково распределенных случайных величин. В статье [12] показано, что в этом случае при $\mathbb{E}\xi_0 = 0$, $\mathbb{D}\xi_0 = 1$ процесс ψ имеет ковариационную функцию

$$\operatorname{cov}(\psi_\lambda(s), \psi_\lambda(t)) = L_\lambda(|t-s|), \qquad s, t \geqslant 0\,, \tag{6}$$

где $L_X(t) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{-Xt})$, $t \geqslant 0$, — преобразование Лапласа неотрицательной случайной величины X.

Помимо собственно ПСИ-процессов, мы рассматриваем нормированные суммы их независимых копий. Будем предполагать, что все члены ведомой последовательности имеют нулевое среднее и единичную дисперсию.

Определение 3. Под *предельным ПСИ-процессом* Ψ_λ мы понимаем процесс, получаемый как предел при $N \to \infty$ нормированных на $\sqrt{N}$ сумм $N \in \mathbb{N}$ независимых копий ПСИ-процесса ψ_λ:

$$\frac{\psi^{(1)}_{\lambda_1}(t) + \cdots + \psi^{(N)}_{\lambda_N}(t)}{\sqrt{N}} \Rightarrow \Psi_\lambda(t), \qquad t \geqslant 0.$$

Здесь $\left(\psi^{(i)}_{\lambda_i}\right)$ — независимые копии процесса ψ_λ; сходимость $\Rightarrow$ понимается в смысле слабой сходимости конечномерных распределений.

Заметим, что процессы вида $\left(\psi^{(i)}_{\lambda_i}\right)$, $i \in \mathbb{N}$, зависят от случайных интенсивностей (λ_i) как от случайных величин, в то время как предельный ПСИ-процесс Ψ_λ зависит от λ исключительно через ее распределение.

Используя центральную предельную теорему для векторов и равенство (6), нетрудно видеть (см. [12]), что в предположениях определения 3 предельный ПСИ-процесс существует и является стационарным гауссовским процессом с ковариационной функцией

$$\operatorname{cov}(\Psi_\lambda(s), \Psi_\lambda(t)) = \operatorname{cov}(\psi_\lambda(s), \psi_\lambda(t)) = L_\lambda(|t-s|)\,, \quad s,t \geqslant 0\,. \tag{7}$$

3. Дробный процесс Орнштейна — Уленбека в смысле Р. Вольперта и М. Такку и сходимость к нему ПСИ-процессов. Рассмотрим стационарный дробный процесс Орнштейна — Уленбека в смысле Р. Вольперта и М. Такку (дОУВ-Т) $Z_t^\varkappa$, $t \geqslant 0$, снабженный параметром скорости (velocity parameter) $\beta > 0$ и параметром масштаба $\sigma > 0$, который выражается в виде стохастического интеграла

$$Z_t^\varkappa = \sigma\sqrt{2\beta}\int_{-\infty}^{t} \frac{\beta^{\varkappa-1}(t-s)^{\varkappa-1}}{\Gamma(\varkappa)}\mathrm{e}^{-\beta(t-s)}W(\mathrm{d}s), \qquad \varkappa > \frac{1}{2}\,. \tag{8}$$

Здесь W — гауссовская мера с независимыми значениями, заданная на борелевских множествах $\mathbb{R}$, имеющая структурную меру Лебега.[1] Легко видеть, что $Z_t^\varkappa$ представляет собой центрированную гауссовскую функцию.

Процесс $Z^\varkappa$ определен в работе Р. Вольперта и М. Такку [3]. В ней доказаны следующие свойства стохастического процесса $Z^\varkappa$.

1. Процесс $Z^\varkappa$ получается путем дробного интегрирования классического процесса Орнштейна — Уленбека (ОУ): стационарного, гауссовского, марковского случайного процесса. Параметр $\varkappa$ задает порядок дробного интегрирования. При этом интегрирование подразумевается в потраекторном смысле.

2. Стационарный гауссовский процесс $Z_t^\varkappa$, $t \geqslant 0$, при $1/2 < \varkappa < 1$ локально в окрестности нуля приближается в среднеквадратичном смысле к дробному броуновскому движению, точнее, дисперсия приращения $\mathbb{D}\{Z^\varkappa(t) - Z^\varkappa(0)\}$ эквивалентна b^2t^{2H} при $t \to 0+$, когда коэффициент Хёрста $H \in (0, 1/2)$ равен $\varkappa - 1/2$, то есть $2H = 2\varkappa - 1$; множитель b задается равенством

$$b^2 \triangleq \frac{-2\sigma^2\beta^{2\varkappa-1}}{\Gamma(2\varkappa)\cos(\pi\varkappa)}\,. \tag{9}$$

3. Ковариация $Z^\varkappa$ имеет следующий вид:

$$\rho^\varkappa(t) \triangleq \mathbb{E}(Z_t^\varkappa Z_0^\varkappa) = \frac{2\sigma^2\mathrm{e}^{-\beta t}}{\Gamma(\varkappa)^2}\int_0^\infty (\beta t + x)^{\varkappa-1}x^{\varkappa-1}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x\,, \quad t \geqslant 0. \tag{10}$$

Данная формула для ковариации в оригинальной статье Р. Вольперта и М. Такку [3] имеет номер (7) и представлена на стр. 1525.

[1] Заметим, что интеграл вида (8) эквивалентно можно определить как стохастический интеграл по приращениям стандартного двустороннего броуновского движения $\mathrm{d}W(s)$, $s \in \mathbb{R}$, записав их формально в (8) вместо $W(\mathrm{d}s)$ (см., напр., [13, гл. IX]).

4. Как показано в оригинальной статье Р. Вольперта и М. Такку (см. формулу (8) из [3]), ковариационная функция $Z_t^{\varkappa}$ при неотрицательных t представляется через модифицированную функцию Бесселя второго рода $\mathcal{K}_{\varkappa-\frac{1}{2}}$:

$$\rho^{\varkappa}(t) = \frac{2^{\frac{3}{2}-\varkappa}\sigma^2\beta^{\varkappa-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\varkappa)\sqrt{\pi}} t^{\varkappa-\frac{1}{2}}\mathcal{K}_{\varkappa-\frac{1}{2}}(\beta t)\,. \tag{11}$$

Нетрудно вычислить дисперсию $Z^{\varkappa}$ и преобразовать ее, используя свойства функций Бесселя и формулу удвоения Лежандра для гамма-функции:

$$V^2 \stackrel{\triangle}{=} \rho^{\varkappa}(0) = \mathbb{E}(Z_0^{\varkappa})^2 = \frac{2^{2-2\varkappa}\sigma^2\Gamma(2\varkappa-1)}{\Gamma(\varkappa)^2} = \frac{\Gamma(\varkappa-1/2)\,\sigma^2}{\Gamma(\varkappa)\,\sqrt{\pi}}\,. \tag{12}$$

Здесь последнее выражение представлено в оригинальной статье Р. Вольперта и М. Такку [3] на стр. 1525.

5. В [3] вычислена спектральная плотность процесса $Z^{\varkappa}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,\theta t}\rho^{\varkappa}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2\sigma^2}{\beta}\left(1+\frac{\theta^2}{\beta^2}\right)^{-\varkappa}, \qquad \theta\in\mathbb{R}\,. \tag{13}$$

В качестве одного из основных результатов данной статьи мы представляем следующую теорему.

Теорема 1. *При $\frac{1}{2}<\varkappa<1$ стохастический процесс $Z_t^{\varkappa}$, $t\geqslant 0$, с точностью до множителя V из (12) является предельным ПСИ-процессом Ψ_λ в смысле определения 3, когда все ведомые последовательности вида (ξ) состоят из тотально независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым средним и единичной дисперсией, а случайная интенсивность λ имеет следующее распределение:*

$$\lambda \stackrel{d}{=} \beta\left(1+\frac{\gamma_{1-\varkappa}}{\eta/2}\right) \stackrel{\triangle}{=} \varrho_{\varkappa}\,, \tag{14}$$

где $\beta>0$ — неслучайный параметр масштаба; случайная величина η распределена по гамма-закону $\Gamma_{2\varkappa-1}$ с единичным масштабом и параметром формы $2\varkappa-1$; случайная величина $\gamma_{1-\varkappa}$ не зависит от η и имеет гамма-распределение $\Gamma_{1-\varkappa}$ с единичным масштабом и параметром формы $1-\varkappa$.

Плотность $p_{\varkappa}$ случайной интенсивности $\varrho_{\varkappa}$ из (14) для ПСИ-процесса, реализующего $Z^{\varkappa}$, имеет вид

$$p_{\varkappa}(x) = \frac{\Gamma(\varkappa)(2\beta)^{2\varkappa-1}}{\Gamma(1-\varkappa)\Gamma(2\varkappa-1)}\,\frac{1}{(x^2-\beta^2)^{\varkappa}}\,\mathbb{I}_{(\beta,\infty)}(x)\,, \qquad x\in\mathbb{R}\,, \tag{15}$$

$\mathbb{I}$ обозначает индикаторную функцию.

Имеет место следующая асимптотика при $t\to 0+$:

$$\mathbb{E}(Z_t^{\varkappa}-Z_0^{\varkappa})^2 = \frac{2\sigma^2\sqrt{\pi}}{\Gamma(\varkappa)\sin((\varkappa-\frac{1}{2})\pi)}\times$$
$$\times\left(\frac{\beta^{2\varkappa-1}}{2^{2\varkappa-1}\Gamma(\varkappa+\frac{1}{2})}t^{2\varkappa-1} - \frac{\beta^2}{4\Gamma(\frac{5}{2}-\varkappa)}t^2 + \frac{\beta^{2\varkappa+1}}{2^{2\varkappa+1}\Gamma(\varkappa+\frac{3}{2})}t^{2\varkappa+1} - O(t^4)\right). \tag{16}$$

Заметим, что (14) описывает смесь гамма-распределений со случайным параметром скорости (rate) $\eta/(2\beta)$, который, в свою очередь, распределен по гамма-закону.

Доказательство теоремы начнем с формулы (10) для функции ковариации процесса $Z^\varkappa$. Покажем сначала, что эта ковариация с точностью до скалярного множителя V^2, который определен в (12), является значением в точке t преобразования Лапласа некоторой неотрицательной случайной величины λ.

При $\varkappa < 1$ выражение $x^{1-\varkappa}(\beta t + x)^{\varkappa-1}$ $\forall x > 0$ как функция от $t \geqslant 0$ есть преобразование Лапласа гамма-распределения:

$$\frac{x^{1-\varkappa}}{(\beta t + x)^{1-\varkappa}} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-tu} \frac{x^{1-\varkappa} u^{-\varkappa} \mathrm{e}^{-xu/\beta}}{\Gamma(1-\varkappa)\beta^{1-\varkappa}} \mathrm{d}u = \int_0^\infty \frac{v^{-\varkappa} \mathrm{e}^{-v(1+t\beta/x)}}{\Gamma(1-\varkappa)} \mathrm{d}v\,. \tag{17}$$

Подставим это равенство в (10) и поменяем порядок интегрирования:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z_t^\varkappa Z_0^\varkappa) &= \frac{2\sigma^2 \mathrm{e}^{-\beta t}}{\Gamma(\varkappa)^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{v^{-\varkappa} \mathrm{e}^{-v(1+t\beta/x)}}{\Gamma(1-\varkappa)} \mathrm{d}v\, x^{2\varkappa-2} \mathrm{e}^{-2x} \mathrm{d}x = \\ &= \frac{2\sigma^2 \mathrm{e}^{-\beta t}}{\Gamma(\varkappa)^2 \Gamma(1-\varkappa)} \int_0^\infty v^{-\varkappa} \mathrm{e}^{-v} \mathrm{d}v \int_0^\infty x^{2\varkappa-2} \mathrm{e}^{-2x - vt\beta/x} \mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{18}$$

Сделаем во внутреннем интеграле замену $v/x = y$, получим равенство

$$\int_0^\infty x^{2\varkappa-2} \mathrm{e}^{-2x-vt\beta/x} \mathrm{d}x = \int_0^\infty v^{2\varkappa-1} y^{-2\varkappa} \mathrm{e}^{-2v/y - t\beta y} \mathrm{d}y.$$

Подставим его в (18) и снова заменим порядок интегрирования:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z_t^\varkappa Z_0^\varkappa) &= \frac{2\sigma^2 \mathrm{e}^{-\beta t}}{\Gamma(\varkappa)^2 \Gamma(1-\varkappa)} \int_0^\infty v^{-\varkappa} \mathrm{e}^{-v} \mathrm{d}v \int_0^\infty v^{2\varkappa-1} y^{-2\varkappa} \mathrm{e}^{-2v/y - t\beta y} \mathrm{d}y = \\ &= \frac{2\sigma^2 \mathrm{e}^{-\beta t}}{\Gamma(\varkappa)^2 \Gamma(1-\varkappa)} \int_0^\infty y^{-2\varkappa} \mathrm{e}^{-t\beta y} \mathrm{d}y \int_0^\infty v^{\varkappa-1} \mathrm{e}^{-v(1+2/y)} \mathrm{d}v = \\ &= \frac{2\sigma^2 \mathrm{e}^{-\beta t}}{\Gamma(\varkappa)^2 \Gamma(1-\varkappa)} \int_0^\infty y^{-2\varkappa} \mathrm{e}^{-t\beta y} \frac{\Gamma(\varkappa)}{(1+2/y)^\varkappa} \mathrm{d}y = \\ &= \frac{2\sigma^2}{\Gamma(\varkappa)\Gamma(1-\varkappa)} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t\beta(y+1)} \frac{1}{y^\varkappa (y+2)^\varkappa} \mathrm{d}y.\end{aligned} \tag{19}$$

Равенство (19) показывает, что $\lambda \overset{d}{=} \beta(Y+1)$, где Y имеет плотность на $(0,\infty)$, пропорциональную $y^{-\varkappa}(y+2)^{-\varkappa}$. Найдем коэффициент пропорциональности. Замена $r = 2/(y+2)$ при $1/2 < \varkappa < 1$ дает цепочку равенств

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}y}{y^\varkappa (y+2)^\varkappa} = \\ &\quad = 2^{-2\varkappa} \int_0^\infty \Big(\frac{y}{y+2}\Big)^{-\varkappa} \Big(\frac{2}{y+2}\Big)^{2\varkappa} \mathrm{d}y = 2^{1-2\varkappa} \int_0^1 (1-r)^{-\varkappa} r^{2\varkappa-2} \mathrm{d}r = \\ &\quad = 2^{1-2\varkappa} B(1-\varkappa, 2\varkappa-1) = 2^{1-2\varkappa} \frac{\Gamma(1-\varkappa)\Gamma(2\varkappa-1)}{\Gamma(\varkappa)}\,,\end{aligned} \tag{20}$$

где B обозначает бета-функцию. Таким образом, плотность Y равна

$$p_Y(y) = \frac{2^{2\varkappa-1}\Gamma(\varkappa)}{\Gamma(1-\varkappa)\Gamma(2\varkappa-1)}\,\frac{1}{y^{\varkappa}(y+2)^{\varkappa}}, \tag{21}$$

из чего следует формула (15) для плотности λ.

Остается заметить, что

$$\rho^{\varkappa}(t) = V^2\,\frac{\mathrm{e}^{-\beta t}}{\Gamma(2\varkappa-1)}\int_0^\infty \frac{(y/2\beta)^{1-\varkappa}}{\left(t+\frac{y}{2\beta}\right)^{1-\varkappa}}\,y^{(2\varkappa-1)-1}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y, \tag{22}$$

причем множитель, следующий за V^2, как функция от t есть преобразование Лапласа «гамма по гамме» распределения со сдвигом на β: $\beta + 2\beta\gamma_{1-\varkappa}/\eta$, где $\gamma_{1-\varkappa}$ имеет распределение $\Gamma_{1-\varkappa}$ с единичным масштабом и не зависит от случайной величины η, которая, в свою очередь, имеет распределение $\Gamma_{2\varkappa-1}$ единичным масштабом.

Рассмотрим $N \in \mathbb{N}$ независимых копий ПСИ-процесса со случайной интенсивностью, распределенной, как λ. При этом все члены всех подчиняющихся последовательностей вида (ξ) независимы совокупно, имеют одинаковое распределение, нулевое среднее и дисперсию, заданную равенством (12). Нормированная на $\sqrt{N}$ сумма N таких независимых копий по центральной предельной теореме для векторов сходится при $N \to \infty$ к распределению процесса $Z^{\varkappa}$ в смысле слабой сходимости конечномерных распределений.

Перейдем к доказательству асимптотики. Известно (см., напр., [14, гл. 9]) следующее представление модифицированной функции Бесселя второго рода:

$$\mathcal{K}_s(t) = \frac{\pi}{2}\frac{\mathcal{I}_{-s}(t) - \mathcal{I}_s(t)}{\sin(s\pi)}, \quad s \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}_+\,, \tag{23}$$

где $\mathcal{I}_s(t)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода, которая раскладывается в ряд как

$$\mathcal{I}_s(t) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!\Gamma(m+s+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2m+s}. \tag{24}$$

Как следствие, при $t \geqslant 0$ ковариационная функция $\rho^{\varkappa}$ раскладывается в следующий ряд:

$$\rho^{\varkappa}(t) = \frac{2\sigma^2}{\Gamma(\varkappa)\sqrt{\pi}}\left(\frac{\beta t}{2}\right)^{\varkappa-\frac{1}{2}}\mathcal{K}_{\varkappa-\frac{1}{2}}(\beta t) = \frac{\sigma^2\sqrt{\pi}}{\Gamma(\varkappa)\sin((\varkappa-\frac{1}{2})\pi)}\times$$
$$\times\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!\Gamma(m+\frac{3}{2}-\varkappa)}\left(\frac{\beta t}{2}\right)^{2m} - \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!\Gamma(m+\varkappa+\frac{1}{2})}\left(\frac{\beta t}{2}\right)^{2m+2\varkappa-1}\right). \tag{25}$$

Отсюда можно найти разложение дисперсии приращения в ряд Тейлора до сколь угодно большой точности (у сумм разные нижние границы из-за положительности ковариации в нуле):

$$\mathbb{E}(Z_t^{\varkappa} - Z_0^{\varkappa})^2 = 2(\rho^{\varkappa}(0) - \rho^{\varkappa}(t)) = \frac{2\sigma^2\sqrt{\pi}}{\Gamma(\varkappa)\sin((\varkappa-\frac{1}{2})\pi)}\times$$
$$\times\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!\Gamma(m+\varkappa+\frac{1}{2})}\left(\frac{\beta t}{2}\right)^{2m+2\varkappa-1} - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!\Gamma(m+\frac{3}{2}-\varkappa)}\left(\frac{\beta t}{2}\right)^{2m}\right) =$$

$$= \frac{2\sigma^2\sqrt{\pi}}{\Gamma(\varkappa)\sin((\varkappa-\frac{1}{2})\pi)}\left(\frac{\beta^{2\varkappa-1}}{2^{2\varkappa-1}\Gamma(\varkappa+\frac{1}{2})}t^{2\varkappa-1} - \right.$$
$$\left. - \frac{\beta^2}{4\Gamma(\frac{5}{2}-\varkappa)}t^2 + \frac{\beta^{2\varkappa+1}}{2^{2\varkappa+1}\Gamma(\varkappa+\frac{3}{2})}t^{2\varkappa+1} + O(t^4)\right). \quad \square \tag{26}$$

Отметим еще одно представление случайной величины $\varrho_\varkappa$ — через бета-распределение. Для простоты положим, что параметр $\beta = 1$.

Утверждение 1. *Имеет место следующее равенство по распределению*

$$\varrho_\varkappa \overset{d}{=} \frac{1}{\sqrt{\beta_{\varkappa-1/2,1-\varkappa}}}, \tag{27}$$

где случайная величина $\beta_{a,b}$ имеет бета-распределение с плотностью, которая пропорциональна $z^{a-1}(1-z)^{b-1}$, $a, b > 0$, $z \in (0,1)$.

Доказательство. Действительно, простое вычисление показывает, что при $x > 1$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathbf{P}\left(\beta_{a,b}^{-1/2} \leqslant x\right) = \frac{1}{B(a,b)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x^{-2}}^{1} z^{a-1}(1-z)^{b-1}\mathrm{d}z =$$
$$= \frac{2x^{-3}}{B(a,b)}x^{2-2a}(1-x^{-2})^{b-1} = \frac{2\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^{1-2a-2b}(x^2-1)^{b-1}. \tag{28}$$

При $a = \varkappa - \frac{1}{2}$, $b = 1-\varkappa$ это выражение дает $\frac{2\Gamma(1/2)}{\Gamma(\varkappa-1/2)\Gamma(1-\varkappa)}(x^2-1)^{-\varkappa}$, что приводится к виду (15) использованием формулы удвоения Лежандра для гамма-функции. $\square$

4. Локальный модуль непрерывности в нуле для ПСИ-процесса со случайной интенсивностью. Для получения результатов о более сильной сходимости ПСИ-процессов, в частности для сходимости в функциональных пространствах, мы нуждаемся в оценках вероятности больших колебаний ПСИ-процессов со случайной интенсивностью. Следующая в этом разделе лемма создает определенную базу для таких оценок.

Определение 4. Определим снабженный параметром $\delta > 0$ *случайный процесс χ_δ локального модуля непрерывности ПСИ-процесса ψ* следующим образом:

$$\chi_\delta(t) \overset{\triangle}{=} \sup_{s\in[t,t+\delta]}\left|\psi_\lambda(s) - \psi_\lambda(t)\right|, \qquad t \in \mathbb{R}_+\,. \tag{29}$$

В силу стационарности ψ_λ очевидно, что χ_δ — стационарный процесс. По теореме о стационарном продолжении [15] можно рассматривать $t \in \mathbb{R}$.

Лемма 1. *Пусть $(\xi) = (\xi_0, \xi_1, \dots)$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $F(x) = \mathbf{P}(\xi_0 \leqslant x)$, $x \in \mathbb{R}$, λ — неотрицательная случайная величина с преобразованием Лапласа $L_\lambda(t) = \mathbf{E}\left(\mathrm{e}^{-\lambda t}\right)$ и $\Pi_1(s) = \Pi(s)$, $s \geqslant 0$, — стандартный процесс Пуассона. Предположим, что ξ, λ и Π совместно независимы. Рассмотрим заданный в соответствии с определением 2 ПСИ-процесс ψ_λ со случайной интенсивностью λ. Тогда для произвольного фиксированного $\delta > 0$ выполнено*

$$\mathbf{P}\left(\chi_\delta(0) \geqslant r\right) = \mathbf{P}\left(\chi_\delta(t) \geqslant r\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[1 - L_\lambda\big(\delta(1-F(x+r)+F(x-r))\big)\right]\mathrm{d}F(x) \tag{30}$$

для всех тех $r > 0$, для которых $F(x)$ и $F(x+r)$ не имеют общих точек, где происходят скачки.

Выражение в левой части (30), как неслучайную функцию от δ и r назовем *локальным модулем непрывности*. Отметим, что локальный модуль непрерывности не зависит от t.

Доказательство. Сначала предположим, что λ фиксировано. Если у $\Pi(\lambda s)$ нет скачков на $[0,\delta] \ni s$, тогда $\psi_\lambda(s) = \psi_\lambda(0)$. Если же $\Pi(\lambda s)$ имеет $k > 0$ скачков на $[0,\delta]$, то $\chi_\delta(0) = \max\{|\xi_1 - \xi_0|, \ldots, |\xi_k - \xi_0|\}$. Так как члены (ξ) независимы и одинаково распределены, то по формуле полной вероятности, интегрируя по x — условию, накладываемому на начальное значение ПСИ-процесса, $\psi(0) = \xi_0 = x$, мы получаем

$$\mathbf{P}\left(\max\{|\xi_1 - \xi_0|, \ldots, |\xi_k - \xi_0|\} < r\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}^k\left(|\xi_1 - x| < r\right) \mathrm{d}F(x)\,.$$

Когда $F(y)$ и $F(y+r)$ как функции от y не имеют общих точек разрыва, выполняется равенство

$$\mathbf{P}\left(\max\{|\xi_1 - \xi_0|, \ldots, |\xi_k - \xi_0|\} \geqslant r\right) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \big(F(x+r) - F(x-r)\big)^k \mathrm{d}F(x)\,.$$

Для фиксированного λ пуассоновский процесс $\Pi(\lambda s)$ имеет k скачков на интервале $[0,\delta]$ с вероятностью $\frac{(\lambda\delta)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda\delta}$, поэтому по формуле полной вероятности, суммируя по k и используя разложение экспоненты, получаем цепочку равенств

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\Big(\chi_\delta(0) \geqslant r \;\Big|\; \lambda\Big) &= \sum_{k=1}^{\infty}\Big(1 - \int_{-\infty}^{\infty}\big(F(x+r) - F(x-r)\big)^k \mathrm{d}F(x)\Big)\frac{(\lambda\delta)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda\delta} = \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\delta} - \mathrm{e}^{-\lambda\delta}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\exp\big(\lambda\delta\big(F(x+r) - F(x-r)\big)\big) - 1\Big)\mathrm{d}F(x) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\Big(1 - \exp\big(-\lambda\delta\big(1 - F(x+r) + F(x-r)\big)\big)\Big)\mathrm{d}F(x),\end{aligned}$$

где смена порядка суммирования и интегрирования оправдывается теоремой Фубини. Также мы используем очевидное свойство $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}F(x) = 1$.

Остается заметить, что равенство (30) получается усреднением по λ. Изменение порядка интегрирования опять обеспечивается применением теоремы Фубини. □

Отметим, что для вероятности в (30) легко выписать оценку в терминах функции концентрации для распределения случайной величины ξ_0. Напомним определение функции концентрации Q для случайной величины X:

$$Q_X(r) \stackrel{\triangle}{=} \sup_{x\in\mathbb{R}} \mathbf{P}(x \leqslant \xi \leqslant x + r)\,.$$

После прямых вычислений получаем, что представление (30) влечет

$$\mathbf{P}\left(\chi_\delta(0) \geqslant r\right) \leqslant 1 - L_\lambda\big(\delta(1 - Q_{\xi_0}(2r))\big)\,, \qquad r > 0\,. \tag{31}$$

5. Телеграфный процесс как частный случай ПСИ-процесса. Предположим, что распределение независимых одинаково распределенных членов ведомой последовательности (ξ) имеет дискретную компоненту. Тогда при каждом $n \in \mathbb{N}$ с положительной вероятностью выполняется $\xi_{n-1} = \xi_n$. Это означает, что когда ведущий процесс $\Pi_1(\lambda t)$ совершает n-й скачок, ПСИ-процесс скачка не совершает. Это представляет определенную трудность при работе с дискретно распределенными (ξ_n). Однако для следующего примера за счет симметрии эта трудность легко обходится.

Пример. Рассмотрим в качестве ведомой последовательности (ξ) независимые одинаково распределенные случайные величины с распределением Радемахера, то есть принимающие значения ± 1 с вероятностями $1/2$. Тогда, как отмечено выше, ПСИ-процесс с фиксированной интенсивностью 1 представляет собой телеграфный процесс половинной интенсивности. Чтобы проверить это, заметим, что события $\{\xi_0 = \xi_1\}, \{\xi_1 = \xi_2\}, \ldots$ представляют собой последовательность независимых событий, каждое из которых имеет вероятность $1/2$. Тем самым, если мы будем рассматривать только те точки пуассоновского процесса Π_1, в которых $\xi_{\Pi_1(\cdot)}$ меняет знак, то по теореме о раскраске (см. [11, гл. 5]) они представляют собой пуассоновский процесс интенсивности $\mathbf{P}\{\xi_0 = \xi_1\} = 1/2$ на положительной полупрямой, что и дает представление в правой части (5).

В силу того, что (5) выполняется как равенство распределений процессов, можно произвести случайную замену времени, вводя положительный случайный множитель λ: $t \mapsto \lambda t$, и получить

$$\psi(t) \overset{\mathcal{D}}{=} \xi_0 (-1)^{\Pi_1(\lambda t/2)}, \qquad t \geqslant 0\,.$$

Для такого процесса легко вычислить распределение локального модуля непрерывности χ_δ, поскольку по построению $\chi_\delta(t)$ для любого t принимает только два значения: 0, если $\Pi_1(\lambda s/2)$ не имеет скачков в интервале $s \in [t, t+\delta]$, и 2, если хотя бы один скачок в этом интервале произошел. Поэтому при всех $t \geqslant 0$ получаем

$$\mathbb{P}\left(\chi_\delta(t) = 0\right) = L_\lambda(\delta/2), \qquad \mathbb{P}\left(\chi_\delta(t) = 2\right) = 1 - L_\lambda(\delta/2). \tag{32}$$

Найдем эти же вероятности с использованием формулы (30), тем самым проверим формулу (30) на тестовом примере:

$$\mathbb{P}\left(\chi_\delta(0) \geqslant r\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \bigl[1 - L_\lambda\bigl(\delta(1 - F(x+r) + F(x-r))\bigr)\bigr] \mathrm{d}F(x),$$

где функция распределения $F(x)$ случайной величины ξ_0 принимает значения: $1/2$ на интервале $[-1, 1) \ni x$, 0 — левее этого интервала и 1 — правее. Последний интеграл превращается в сумму двух слагаемых

$$\frac{1}{2}\bigl[1 - L_\lambda\bigl(\delta(1 - F(-1+r) + F(-1-r))\bigr)\bigr] + \frac{1}{2}\bigl[1 - L_\lambda\bigl(\delta(1 - F(1+r) + F(1-r))\bigr)\bigr],$$

каждое из которых равно $1 - L_\lambda(\delta/2)$ при $r \in (0, 2)$ или 0 при $r > 2$, в полном согласии с (32).

Следствие. *Для телеграфного процесса со случайной интенсивностью $\varrho_\varkappa$ мгновенно следует асимптотика для вероятности его приращения в окрестности* *нуля:*

$$\mathbf{P}\left(\chi_\delta(0) > 0\right) \sim b^2 \left(\frac{\delta}{2}\right)^{2H}, \qquad \delta \to 0+, \tag{33}$$

где обозначение для b^2 *введено равенством* (9).

Ковариационная функция процесса $\chi_\delta(t)$, $t \geqslant 0$, задается выражением

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(\chi_\delta(t)) &\overset{\triangle}{=} \mathbf{E}\left\{\left(\chi_\delta(s) - \mathbf{E}\chi_\delta(s)\right)\left(\chi_\delta(t+s) - \mathbf{E}\chi_\delta(t+s)\right)\right\} = \\ &= \mathbf{E}\left(\chi_\delta(0)\chi_\delta(t)\right) - \mathbf{E}^2\chi_\delta(0) \end{aligned} \tag{34}$$

(в силу стационарности, s может быть произвольным).

Утверждение 2. *Для телеграфного процесса со случайной интенсивностью* λ*, имеющей преобразование Лапласа* L_λ*, ковариация процесса локального модуля непрерывности* χ_δ *равна*

$$\operatorname{cov}(\chi_\delta(t)) = \begin{cases} 4\big(L_\lambda\big((t+\delta)/2\big) - L_\lambda(\delta/2)^2\big), & 0 \le t \le \delta\,; \\ 4\big(L_\lambda(\delta) - L_\lambda(\delta/2)^2\big), & t > \delta\,. \end{cases} \tag{35}$$

Доказательство. Если $0 \le t \le \delta$, то интервалы $[0,\delta]$ и $[t, t+\delta]$ пересекаются и образуются три интервала $[0,t]$, $[t,\delta]$, $[\delta, t+\delta]$. Произведение $\chi_\delta(0)\chi_\delta(t)$ равно нулю, если скачков не было в первом и втором, или во втором и третьем, или же во всех трех указанных интервалах, а в противном случае произведение равно 4. При фиксированной интенсивности λ имеем $\mathbf{P}\big(\chi_\delta(0)\chi_\delta(t) = 0 \bigm| \lambda\big) = 2\mathrm{e}^{-\lambda\delta/2}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t/2}) + \mathrm{e}^{-\lambda(t+\delta)/2}$. Поэтому, вычисляя математическое ожидание по λ, получаем $\mathbf{E}\chi_\delta(0)\chi_\delta(t) = 4(1 - 2L_\lambda(\delta/2) + L_\lambda((t+\delta)/2))$. Вычитая квадрат математического ожидания $\mathbf{E}\chi_\delta(0) = 2(1 - L_\lambda(\delta/2))$, которое находится из формул (32), получаем первый случай в формуле (35).

Если же $t > \delta$, то интервалы $[0,\delta]$ и $[t, t+\delta]$ не пересекаются, и произведение $\chi_\delta(0)\chi_\delta(t)$ будет равняться 4 только в случае, если скачки были на обоих интервалах, и нулю в противном случае. Поэтому $\mathbf{E}\big(\chi_\delta(0)\chi_\delta(t) \bigm| \lambda\big) = 4(1 - \mathrm{e}^{-\lambda\delta/2})^2$. Усредняя по λ и вычитая $\mathbf{E}^2\chi_\delta(0)$, получаем второй случай в (35). □

Заметим, что если интенсивность λ вырождена (как у «настоящего» телеграфного процесса), то при $t \geqslant \delta$ ковариация обращается в ноль, так как в этом случае значения $\chi_\delta(0)$ и $\chi_\delta(t)$ независимы. Однако при невырожденной случайной интенсивности ковариация будет положительной и даже не будет стремиться к нулю при $t \to \infty$.

6. Модуль непрерывности ПСИ-процесса для равномерно распределенных членов ведомой последовательности. Рассмотрим случай ПСИ-процесса с равномерным распределением членов ведомой последовательности (ξ). В этом случае удается провести явные вычисления.

Утверждение 3. *Пусть случайные величины* $\xi_0, \xi_1, \ldots$ *независимы и имеют одинаковое равномерное распределение на* $[-a, a]$, $a > 0$*; интенсивность* λ *— произвольная неотрицательная случайная величина с преобразованием Лапласа* L_λ.

Тогда

$$\mathbb{P}(\chi_\delta(0) \geqslant r) = \begin{cases} 0, & r \geqslant 2a; \\ 2 - \frac{r}{a} - \frac{2}{\delta}\int_0^{\frac{\delta(2a-r)}{2a}} L_\lambda(y)\mathrm{d}y, & 2a > r \geqslant a; \\ 1 - \frac{a-r}{a} L_\lambda\left(\frac{\delta(a-r)}{a}\right) - \frac{2}{\delta}\int_{\frac{\delta(a-r)}{a}}^{\frac{\delta(2a-r)}{2a}} L_\lambda(y)\,\mathrm{d}y, & a > r > 0. \end{cases} \tag{36}$$

Данное утверждение получается из леммы 1 непосредственным вычислением, которое сравнительно несложно, поскольку аргумент преобразования Лапласа в формуле (30) является кусочно-линейной функцией.

Получим формулу для локального модуля непрерывности в случае, когда интенсивность имеет преобразование Лапласа, пропорциональное ковариационной функции (10) процесса дОУВ-Т (8).

Распределение (36) локального модуля непрерывности $\chi_\delta(0)$ имеет атом в нуле, и это соответствует ситуации, когда ведущий пуассоновский процесс не имеет скачков на $[0, \delta]$. Очевидно, при $\delta \to 0+$ вес этого атома приближается к 1. Однако при условии, что $\chi_\delta(0) > 0$, распределение имеет следующую нетривиальную асимптотику.

Утверждение 4. *Пусть члены ведомой последовательности* (ξ) *имеют одинаковое равномерное распределение на* $[-a, a]$, *а ведущий дважды стохастический пуассоновский процесс имеет случайную интенсивность* $\varrho_\varkappa$. *Тогда для* χ_δ *выполняется следующее предельное соотношение:*

$$\lim_{\delta\to 0+} \mathbb{P}\big(\chi_\delta(0) \geqslant r \mid \chi_\delta > 0\big) = \begin{cases} 0, & r \geqslant 2a\,; \\ \frac{1}{\varkappa}(1 - \frac{r}{2a})^{2\varkappa}, & 2a > r \geqslant a\,; \\ \frac{1}{\varkappa}\big((1 - \frac{r}{2a})^{2\varkappa} - (1-\varkappa)(1 - \frac{r}{a})^{2\varkappa}\big), & a > r > 0\,. \end{cases} \tag{37}$$

Отметим зависимость этого предельного условного распределения от $\varkappa$, которая объясняется тем, что для рассматриваемой случайной интенсивности $\varrho_\varkappa$ при условии наличия скачков на маленьком интервале $[0, \delta]$ с отделенной от нуля вероятностью окажется, что скачок не один, причем эта вероятность существенно зависит от $\varkappa$.

Доказательство. Из соотношения (25), используя формулу удвоения Лежандра и формулу дополнения Эйлера для гамма-функции, находим асимптотическое разложение в нуле преобразования Лапласа L_λ случайной интенсивности $\varrho_\varkappa$ (и одновременно разложение ковариации $\rho^\varkappa$)

$$L_\lambda(t) = \frac{\rho^\varkappa(t)}{V^2} = 1 - \frac{\Gamma(\frac{3}{2} - \varkappa)}{\Gamma(\varkappa + \frac{1}{2})}\left(\frac{\beta t}{2}\right)^{2\varkappa - 1} + O(t^2)\,, \quad t \to 0+. \tag{38}$$

Обозначая для краткости

$$C \triangleq \frac{\beta^{2\varkappa-1}\Gamma(3/2 - \varkappa)}{2^{2\varkappa-1}\Gamma(\varkappa + 1/2)} \tag{39}$$

и подставляя в формулу (36) соотношение

$$\frac{2}{\delta}\int_{A\delta}^{B\delta}(1 - Cy^{2\varkappa-1} + O(y^2))\mathrm{d}y = 2(B-A) - C\delta^{2\varkappa-1}(B^{2\varkappa} - A^{2\varkappa})/\varkappa + O(\delta^2), \qquad \delta \to 0+,$$

при A и B, соответственно равных значениям верхних и нижних пределов интегрирования в (36), получаем, что при $\delta \to 0+$ выполняется

$$\mathbb{P}(\chi_\delta(0) \geqslant r) = \begin{cases} 0, & r \geqslant 2a\,; \\ \frac{C}{\varkappa}(1-\frac{r}{2a})^{2\varkappa}\delta^{2\varkappa-1} + O(\delta^2), & 2a > r \geqslant a\,; \\ \frac{C}{\varkappa}\big((1-\frac{r}{2a})^{2\varkappa} - (1-\varkappa)(1-\frac{r}{a})^{2\varkappa}\big)\delta^{2\varkappa-1} + O(\delta^2), & a > r > 0\,. \end{cases}$$

Поделив это выражение на вероятность условия $\mathbb{P}(\chi_\delta(0) > 0) = 1 - L_\lambda(\delta) \sim C\delta^{2\varkappa-1}$, $\delta \to 0+$, получаем формулу (37). $\square$

Литература

1. *Мандельброт Б.* Фракталы, случай и финансы. М.: РХД, 2004.

2. *Мандельброт Б., Хадсон Р. Л.* (Не)послушные рынки. Фрактальная революция в финансах. М.: Вильямс, 2006.

3. *Wolpert R. L., Taqqu M. S.* Fractional Ornstein — Uhlenbeck Lévy Processes and the Telecom Process: Upstairs and Downstairs // Signal Processing. 2005. Vol. 85. Iss. 8. P. 1523–1545. https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2004.09.016

4. *Reif F.* Fundamentals of Statistical and Thermal Physics. New York: McGraw Hill, 1965.

5. *Lamperti J. W.* Semi-stable Stochastic Processes // Trans. Amer. Math. Soc. 1962. Vol. 104. P. 62–78.

6. *Barndorff-Nielsen O. E., Pérez-Abreu V.* Stationary and Self-similar Processes Driven by Lévy Processes // Stochastic Processes and their Applications. 1999. Vol. 84. Iss. 2. P. 357—369. https://doi.org/10.1016/S0304-4149(99)00061-7

7. *Rusakov O., Laskin M.* Self-Similarity in the Wide Sense for Information Flows with a Random Load Free on Distribution // 2017 European Conference on Electrical Engineering and Computer Science (EECS), Bern, Switzerland, 2018. P. 142–146. https://doi.org/10.1109/EECS.2017.35

8. *Hu Y., Nualart D., Zhou H.* Parameter estimation for fractional Ornstein–Uhlenbeck processes of general Hurst parameter // Statistical Inference for Stochastic Processes. 2017. Vol. 22. Iss. 1. P. 111–142.

9. *Русаков О. В.* Относительная компактность сумм независимых одинаково распределенных псевдопуассоновских процессов в пространстве Скорохода // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2015. Т. 442. С. 122–132.

10. *Kac M.* A stochastic model related to the telegrapher's equation // Rocky Mountain. J. Math. 1974. Vol. 4. P. 497–510. https://doi.org/10.1216/RMJ-1974-4-3-497

11. *Кингман Дж.* Пуассоновские процессы. М.: Изд-во МЦНМО, 2007.

12. *Русаков О. В.* Псевдо-пуассоновские процессы со стохастической интенсивностью и класс процессов, обобщающих процесс Орнштейна — Уленбека // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4(62). Вып. 2. С. 247–257. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.208

13. *Дуб Дж. Л.* Вероятностные процессы. М.: Изд-во иностр. лит., 1956.

14. *Abramowitz M., Stegun I. A.* Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. New York: Dover, 1972.

15. *Parthasarathy K. R., Varadhan S. R. S.* Extension of Stationary Stochastic Processes // Теория вероятн. и ее примен. 1964. Т. 9. Вып. 1. С. 72–78.

Статья поступила в редакцию 12 июля 2019 г.;
после доработки 11 марта 2020 г.;
рекомендована в печать 19 марта 2020 г.

Контактная информация:

Русаков Олег Витальевич — доц.; ovirusakov@yahoo.co.uk
Якубович Юрий Владимирович — доц.; yuyakub@gmail.com
Баев Будимир Александрович — аспирант; roll-95@mail.ru

On some local asymptotic properties of sequences with a random index

O. V. Rusakov[1], *Yu. V. Yakubovich*[1], *B. A. Baev*[2]

[1] St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation
[2] National Research University Higher School of Economics,
16, ul. Soyuza Pechatnikov, St. Petersburg, 190121, Russian Federation

For citation: Rusakov O. V., Yakubovich Yu. V., Baev B. A. On some local asymptotic properties of sequences with a random index. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2020, vol. 7 (65), issue 3, pp. 453–468.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.308 (In Russian)

We consider sequences of random variables with the index subordinated by a doubly stochastic Poisson process. A Poisson stochastic index process, or PSI-process for short, is a random process $\psi(t)$ with the continuous time t which one can obtain via subordination of a sequence of random variables (ξ_j), $j = 0, 1, \ldots$, by a doubly stochastic Poisson process $\Pi_1(t\lambda)$ as follows: $\psi(t) = \xi_{\Pi_1(t\lambda)}$, $t \geqslant 0$. We suppose that the intensity λ is a non-negative random variable independent of the standard Poisson process Π_1. In the present paper we consider the case of independent identically distributed random variables (ξ_j) with a finite variance. R. Wolpert and M. Taqqu (2005) introduce and investigate a type of the fractional Ornstein — Uhlenbeck (fOU) process. We provide a representation for such fOU process with the Hurst exponent $H \in (0, 1/2)$ as a limit of scaled and normalized sums of independent identically distributed PSI-processes with an explicitly given intensity λ. This fOU process, locally at $t = 0$, approximates in the square mean the fractional Brownian motion with the same Hurst exponent $H \in (0, 1/2)$. We examine in details two examples with the intensity corresponding to the R. Wolpert and M. Taqqu's fOU process: a telegraph process, arising for ξ_0 having the Rademacher distribution ± 1 with probabilities $1/2$, and a PSI-process with the uniform distribution for ξ_0. For these two examples we derive exact and asymptotic formulae for a local modulus of continuity over a small time interval for a single PSI-process.

Keywords: fractional Ornstein — Uhlenbeck process, fractional Brownian motion, pseudo-Poisson process, random intensity, telegraph process, modulus of continuity.

References

1. Mandelbrot B., *Fractales, Hasard Et Finance* (Flammarion, Paris, 2009).

2. Mandelbrot B., Hudson R. L., *The (mis)behavior of markets. A fractal view of risk, ruin, and reward* (Basic Books, New York, 2006).

3. Wolpert R. L., Taqqu M. S., "Fractional Ornstein — Uhlenbeck Lévy Processes and the Telecom process: upstairs and downstairs", *Signal Processing* **85**(8), 1523–1545 (2005). https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2004.09.016

4. Reif F., *Fundamentals of statistical and thermal physics* (McGraw-Hill, New York, 1965).

5. Lamperti J. W., "Semi-stable stochastic processes", *Trans. Amer. Math. Soc.* **104**, 62–78 (1962).

6. Barndorff-Nielsen O. E., Pérez-Abreu V., "Stationary and self-similar processes driven by Lévy processes", *Stoch. Proc. Appl.* **84**(2), 357–369 (1999). https://doi.org/10.1016/S0304-4149(99)00061-7

7. Rusakov O., Laskin M., "Self-similarity in the wide sense for information flows with a random load free on distribution", in *2017 European Conference on Electrical Engineering and Computer Science (EECS)*, Bern, Switzerland, 142–146 (2018). https://doi.org/10.1109/eecs.2017.35

8. Hu Y., Nualart D., Zhou H., "Parameter estimation for fractional Ornstein–Uhlenbeck processes of general Hurst parameter", *Stat. Inference Stoch. Process.* **22**(1), 111–142 (2017).

9. Rusakov O. V., "Tightness of the sums of independent identically distributed pseudo-poissonian processes in the Skorokhod space", *J. Math. Sci.* **225**, 805–811 (2017). https://doi.org/10.1007/s10958-017-3496-z

10. Kac M., "A stochastic model related to the telegrapher's equation" *Rocky Mountain. J. Math.* **4**, 497–510 (1974). https://doi.org/10.1216/RMJ-1974-4-3-497

11. Kingman J. F. C., *Poisson processes* (Claderon Press, Oxford, 1993).

12. Rusakov O. V., “Pseudo-Poisson processes with stochastic intensity and a class of processes which generalize the Ornstein — Uhlenbeck process”, *Vestnik St. Petersburg University: Mathematics.* **50**, 153–160 (2017). https://doi.org/10.3103/S106345411702011X

13. Doob J. L., *Stochastic processes* (John Wiley and Sons, New York, 1953).

14. Abramowitz M., Stegun I. A., *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables* (Dover, New York, 1972).

15. Parthasarathy K. R., Varadhan S. R. S., “Extension of Stationary Stochastic Processes”, *Theory Probab. Appl.* **9**(1), 65–71 (1964). https://doi.org/10.1137/1109006

Received: July 12, 2019
Revised: March 11, 2020
Accepted: March 19, 2020

Authors’ information:

Oleg V. Rusakov — ovirusakov@yahoo.co.uk
Yuriy V. Yakubovich — yuyakub@gmail.com
Budimir A. Baev — roll-95@mail.ru