УДК 517.537 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 3
AMS 30E10

Приближение целыми функциями на счетном множестве континуумов*

О. В. Сильванович[1], *Н. А. Широков*[2]

[1] Санкт-Петербургский горный университет,
Российская Федерация, 199106, Санкт-Петербург, 21 линия В. О., 2
[2] Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Сильванович О. В., Широков Н. А.* Приближение целыми функциями на счетном множестве континуумов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 3. С. 481–489.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.310

Настоящая работа продолжает серию исследований авторов о приближении функций с производной из класса типа Гёльдера. В статье рассматривается вопрос о приближении функций, заданных на бесконечном множестве континуумов. На континуумы и их расположения накладываются ограничения. Получена оценка скорости приближения в терминах роста целой функции, согласованная с возможным обратным утверждением — набор аналитических функций, который можно приближать с указанной оценкой, имеет обсуждаемую гладкость.

Ключевые слова: классы Гёльдера, аппроксимация, целые функции экспоненциального типа.

1. Введение. В проблеме приближения функций, аналитических в какой-то области и непрерывных в ее замыкании, с помощью алгебраических полиномов можно выделить несколько этапов. Первый этап был связан с описанием в терминах приближений функций, аналитических в более широкой, чем рассматриваемая, области, и связан с работами С. Н. Бернштейна и Дж. Л. Уолша [1, 2]. Затем решалась проблема о возможности приближения функции, аналитической во внутренности компакта и непрерывной на нем. Принципиальные продвижения в этом направлении связаны с результатами М. В. Келдыша и С. Н. Мергеляна. Оценки полиномиального приближения, учитывающие гладкость функции на замыкании континуума, стали появляться с конца 1950-х годов в работах С. Я. Альпера [3], В. К. Дзядыка [4, 5]. Большую библиографию по этому вопросу можно найти в книге В. К. Дзядыка [6]. Наиболее сильный результат принадлежит В. И. Белому [7], который предполагал квазиконформность границы области. Приближение с помощью одного полинома не может быть равномерным на неограниченном множестве. Для равномерного приближения на всей оси или ее части естественно использовать целые функции экспоненциального типа [8, 9] или целые функции порядка $\frac{1}{2}$ при приближении на полуоси [10]. В работах [8–10] приближались функции, заданные на множествах отрезков.

В настоящей работе изучен вопрос о приближении функций, заданных на бесконечном множестве континуумов. На континуумы и их расположения накладываются ограничения. Мы полагаем, что получаемая оценка скорости приближения

*Работа Н. А. Широкова выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 20-01-00209).

в терминах роста типа целой функции согласована с возможным обратным утверждением — набор аналитических функций, который можно приближать с указанной оценкой, будет иметь обсуждаемую гладкость. В п. 2 даны определения и формулировка основного результата, в п. 3. собраны важные вспомогательные результаты, в п. 4 построены приближающие целые функции.

2. Определения и формулировка результата. Далее через $D_r(a)$ будем обозначать круг $D_r(a) = \{z : |z-a| < r\}$, $\overline{D}_r(a)$ — его замыкание, $\mathbb{D} = D_1(0)$; $G_n, n \in \mathbb{Z}$, — жордановы области, $\Gamma_n = \partial G_n$. Предполагаем, что все кривые Γ_n спрямляемы. Для $z_1, z_2 \in \Gamma_n$ через $\gamma_n(z_1, z_2)$ обозначаем дугу наименьшей длины на Γ_n с концами z_1 и z_2, $|\gamma_n(z_1, z_2)|$ — длина такой дуги.

A. Предполагаем, что все кривые Γ_n удовлетворяют равномерному chord-arc-условию, именно: существует постоянная b, не зависящая от z_1, z_2 и n такая, что

$$|\gamma_n(z_1, z_2)| \leq b|z_2 - z_1|.$$

Также предполагаем, что все кривые Γ_n — равномерно гладкие в следующем смысле. Пусть $a_n \in G_n$, функции $g_n(\lambda)$ конформно отображают $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ на $\mathbb{C} \setminus \overline{G}_n$ так, что в окрестности ∞ имеется соотношение $g_n(\lambda) = \beta_n\lambda + a_n + O_n(1) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, $v_n(\lambda) = \log g_n'(\lambda)$.

B. Предполагаем, что семейство функций $\{v_n(\lambda), n \in \mathbb{Z}\}$ равностепенно непрерывно в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$.

На метрические свойства областей G_n и их расположение накладываются следующие ограничения.

C. Существуют $\delta > 0, \Delta > 0$ такие, что $\overline{D_\delta}(a_n) \subset G_n \subset \overline{D_\Delta}(a_n)$.

D. Существуют постоянные $0 < A_1 < A_2$ такие, что $2\Delta + A_1 < \mathrm{Re}(a_{n+1} - a_n) < 2\Delta + A_2$.

E. Выполняется условие $\overline{D_\Delta}(a_n) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset,\ n \in \mathbb{Z}$.

В дальнейшем полагаем $E = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} G_n$. Через $\Lambda_M^{r+\omega}(E), r \geq 0$ обозначаем класс функций f, аналитических в каждой области G_n, непрерывных в $\overline{G_n}$ и таких, что модуль непрерывности функции $f^{(r)}$ в $\overline{G_n}$ не превосходит $c_f\omega(t)$ и $|f(z)| \leq M, z \in E$. На функцию $\omega(t)$ накладывается условие

$$\int\limits_0^x \frac{\omega(t)}{t}dt + x\int\limits_x^\infty \frac{\omega(t)}{t^2}dt \leq c_0\omega(x).$$

Основным результатом настоящей работы является следующий результат.

Теорема. *Пусть функция $f \in \Lambda_M^{r+\omega}(E)$. Тогда существует постоянная c_1, не зависящая от σ и w такая, что при любом $\sigma \geq 1$ можно определить целую функцию F_σ экспоненциального типа $\leq \sigma$, для которой справедливы оценки*

$$|F_\sigma(w) - f(w)| \leq c_1\sigma^{-r}\omega(\sigma^{-1}),\ w \in \Gamma_n, n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

и для которой с некоторыми постоянными c_2 и c_3, не зависящими от $x \in \mathbb{R}$ и $\sigma \geq 1$, выполняется неравенство

$$|F_\sigma(x)| \leq c_2e^{c_3\sigma}M. \tag{2}$$

3. Вспомогательные утверждения. При построении функции F_σ со свойствами (1) и (2) понадобятся следующие факты.

Лемма 1. *Пусть функции g_n и v_n определены в соответствии с условиями A, B, C раздела 2. Положим $m_n = \min\limits_{\zeta\in\mathbb{T}} |g_n'(\zeta)|, M_n = \max\limits_{\zeta\in\mathbb{T}} |g_n'(\zeta)|$, где $\mathbb{T}$ — единичная окружность. Пусть имеется соотношение $g_n(\lambda) = \beta_n\lambda + a_n + O_n(1) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, где $O_n(1)$ — постоянная при данном n и ограниченная при растущем $|n|, \beta_n > 0, \beta_n = cap\, G_n$ — логарифмическая емкость G_n, $v_n(\lambda) = \log g_n'(\lambda)$. Существуют постоянные c_{01} и c_{02}, $0 < c_{01} < c_{02}$, не зависящие от n, такие что*

$$c_{01} \le m_n \le M_n \le c_{02}. \tag{3}$$

Замечание. Принцип максимума влечет равенства

$$m_n = \min_{\zeta\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}} |g_n'(\zeta)|, M_n = \max_{\zeta\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}} |g_n'(\zeta)|.$$

Доказательство леммы. Положим $\Omega(\epsilon) = \sup\limits_{n\in\mathbb{Z}} \sup\{|v_n(\zeta_2) - v_n(\zeta_1)| : \zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{D}, |\zeta_1 - \zeta_2| < \epsilon\}$. Условие B влечет $\Omega(\epsilon) < \infty$ при $\epsilon > 0$ и $\Omega(\epsilon) \xrightarrow[\epsilon\to+0]{} 0$. Если $m_n = |g_n'(\zeta_1)|$, $M_n = |g_n'(\zeta_2)|$, $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{T}$, то $0 \le v_n(\zeta_2) - v_n(\zeta_1) \le \Omega(2)$, т. е.

$$\frac{M_n}{m_n} \le e^{\Omega(2)}. \tag{4}$$

Далее, условие C дает неравенства $2\pi\delta \le |\Gamma_n| = \int\limits_{\mathbb{T}} |g_n'(\lambda)||d\lambda| \le 2\pi M_n$, т. е.

$$M_n \ge \delta, \tag{5}$$

и (4) и (5) влекут

$$m_n \ge e^{-\Omega(2)} M_n \ge e^{-\Omega(2)}\delta. \tag{6}$$

Учтем, что $m_n \le |g'(\infty)| = |\beta_n|$, и в силу условия C получаем

$$|\beta_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{g_n(z) - a_n}{z^2} dz \right| \le \Delta,$$

тогда $m_n \le \Delta,\ M_n \le e^{\Omega(2)}\Delta$. Лемма 1 доказана с $c_{01} = e^{-\Omega(2)}\delta,\ c_{02} = e^{\Omega(2)}\Delta$. □

Следствие. *Пусть*

$$\Gamma_{n,h} = \{z \in \mathbb{C} : z = g_n(\zeta), |\zeta| = 1 + h\}, h > 0, \quad \rho_{n,h}(z) = \mathrm{dist}(z, \Gamma_{n,h}), z \in \Gamma_n.$$

Тогда существуют постоянные c_{11}, c_{12}, не зависящие от z и n, такие что

$$0 < c_{11}h \le \rho_{n,h}(z) \le c_{12}h. \tag{7}$$

Доказательство. По лемме Померенке [11] для $z_0 = g_n((1 + h)e^{i\theta})$ выполнено

$$4|g_n'(1 + h)e^{i\theta})|h \ge \mathrm{dist}(z_0, \Gamma_n) \ge \frac{1}{4}|g_n'((1 + h)e^{i\theta})|h,$$

поэтому нижняя оценка в (7) следует из нижней оценки в (6). Далее, если $z = g_n((1 + h)e^{i\theta})$, то (3) влечет

$$\rho_{n,h}(z) \le \int\limits_0^h |g_n'((1 + h)e^{i\theta})|dt \le c_{01}h.$$

Следствие доказано. □

Выберем $\epsilon_0 > 0$ так, чтобы при любом $n \in \mathbb{Z}$ и $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$, $|\lambda_2 - \lambda_1| < \epsilon_0$ для функции $\Psi_n(\lambda) = \mathrm{Im} v_n(\lambda)$ было справедливо неравенство

$$|\Psi_n(\lambda_2) - \Psi_n(\lambda_1)| < \frac{\pi}{6},$$

и определим $\epsilon_1, 0 < \epsilon_1 \le \epsilon_0$. Обозначим через $\overline{B}_{\theta_0,\epsilon_1}$ множество $\overline{\mathbb{D}} \cup [e^{i\theta_0}, (1+\epsilon_1)e^{i\theta_0}]$ и пусть $G_{n,z_0,\epsilon_1} = \mathbb{C} \setminus g_n(\mathbb{C} \setminus \overline{B}_{\theta_0,\epsilon_1})$, где $z_0 = g_n(e^{i\theta_0})$. Через $g_{n,z_0,\epsilon}$ обозначим функцию, конформно отображающую $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ на $\mathbb{C} \setminus G_{n,z_0,\epsilon_1}$ и имеющую разложение в окрестности ∞ вида

$$g_{n,z_0,\epsilon_1}(\zeta) = \tilde{\beta}_n \zeta + a_n + O_n(1) + O\left(\frac{1}{\zeta}\right).$$

Пусть

$$\Gamma_{n,h}(z_0, \epsilon_1) = \{z = g_{n,z_0,\epsilon_1}(\zeta), |\zeta| = 1 + h\},$$

$$\rho_{n,h}(z; z_0, \epsilon_1) = \mathrm{dist}(z, \Gamma_{n,h}(z_0, \epsilon_1)),\ \ z \in \Gamma_{n,h}(z_0, \epsilon_1).$$

Лемма 2. *Существует постоянная c_{21}, зависящая от ϵ_1 и не зависящая от n, z и z_0, такая что при $z \in \Gamma_n, z \ne z_0, 0 < h \le 1$ и при $z = g_n((1+t)e^{i\theta_0}), 0 \le t \le \frac{\epsilon_1}{2}$, имеется оценка*

$$\rho_{n,h}(z; z_0, \epsilon_1) \le c_{21}(|z - z_0| + h^{\frac{1}{2}})^{-1} \cdot h.$$

Доказательство. Пусть функция $\Psi(\zeta)$ отображает $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ на $\mathbb{C} \setminus \overline{B}_{\theta_0,\epsilon_1}$ с нормировкой $\Psi(\zeta) = \beta\zeta + \gamma_0 + O\left(\frac{1}{\zeta}\right), \Psi(1) = (1+\epsilon_1)e^{i\theta_0}$. Тогда

$$g_{n,z_0,\epsilon_1}(\zeta) = g_n\left(\Psi(\zeta)\right),$$

$$g'_{n,z_0,\epsilon_1}(\zeta) = g'_n\left(\Psi(\zeta)\right) \cdot \Psi'(\zeta). \tag{8}$$

При отображении функцией Ψ у точки $e^{i\theta_0}$ имеются два прообраза α_+ и $\alpha_-, \mathrm{Im}\alpha_+ > 0, \mathrm{Im}\alpha_- < 0$, и существуют окрестности $U_+ \ni \alpha_+$ и $U_- \ni \alpha_-$, в которых при $\zeta \to \alpha_\pm$ выполняются соотношения

$$\Psi'(\zeta) = \frac{1}{2} c_\pm (\zeta - \alpha_\pm)^{-\frac{1}{2}}(1 + o(1)) \tag{9}$$

с постоянными $c_\pm \ne 0$. Полагая $\eta = \Psi(\zeta)$ при $V_\pm \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Psi(U_\pm), \eta \in V_\pm$ имеем из (9)

$$\Psi'(\zeta) = \tilde{c}_\pm \frac{1}{\eta - e^{i\theta_0}}(1 + o(1)). \tag{10}$$

Из соотношений (8) при $\tilde{\zeta} = (1+h)\zeta \in U_\pm, \zeta \in \mathbb{T}, h > 0$, с некоторыми постоянными $c_{0\pm} \ne 0, c_{1\pm} \ne 0$ следуют оценки $c_{0\pm}(|\zeta - \alpha_\pm| + h)^{-\frac{1}{2}} \le |\Psi'(\tilde{\zeta})| \le c_{1\pm}(|\zeta - \alpha_\pm| + h)^{-\frac{1}{2}}$, что с учетом (9) дает с другими постоянными $\tilde{c}_{0\pm}, \tilde{c}_{1\pm}$ соотношения

$$\tilde{c}_{0\pm}(|\eta - e^{i\theta_0}| + h^{\frac{1}{2}})^{-1} \le |\Psi'(\tilde{\zeta})| \le \tilde{c}_{1\pm}(|\eta - e^{i\theta_0}| + h^{\frac{1}{2}})^{-1}. \tag{11}$$

Применяя соотношение (7) следствия, лемму Поммеренке [11], равенство (8) и неравенства (11), получаем утверждение леммы 2. $\square$

4. Построение функции F_σ. При построении приближающей функции $F_\sigma(z)$ определяем семейство кривых $\Xi^-(t)$, которые делят комплексную плоскость $\mathbb{C}$ на области $D_+(t)$ и $D_-(t)$. Далее при фиксированном t строится функция $F_\sigma(w,t)$, при этом существенно используется односвязность областей $D_+(t)$ и $D_-(t)$. Начнем с геометрического построения. Пусть $z_{n_0} \in \Gamma_n$ — ближайшая (или одна из таких) точка к прямой $\mathbb{R}_- \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R} - 2i\Delta,\ \zeta_{n_0} = g_n^{-1}(z_{n_0}) \in \mathbb{T}$. Положим $\epsilon_1 = \min\left(\dfrac{\pi}{2}, \epsilon_0, \dfrac{1}{2c_{02}}A_1\right)$, такое что $2\epsilon_2 \cdot \Omega(2\epsilon_2) \cdot \dfrac{c_{02}}{c_{01}} < \frac{1}{2}c_{01}\epsilon_1$. Если $e^{i\theta_{n_0}} = \zeta_{n_0}$, то обозначим $\gamma_n = \{g_n(e^{i\theta}) : \theta_{n_0} - 2\epsilon_2 \le \theta \le \theta_{n_0} + 2\epsilon_2\},\ \Gamma_n^0 = \Gamma_n \setminus \gamma_n$.

При $0 \le t \le \epsilon_2$ запишем

$$\zeta_n^-(t) = \zeta_{n_0} \cdot e^{-2i\epsilon_2 + it}, \quad \zeta_n^+(t) = \zeta_{n_0} \cdot e^{2i\epsilon_2 - it}, \quad \eta_n^\pm(t) = (1+\epsilon_1)\zeta_n^\pm(t),$$

$$\gamma_n(t) = \{g_n(e^{i\theta}) : \theta_{n_0} - 2\epsilon_2 + t \le \theta \le \theta_{n_0} + 2\epsilon_2 - t\}, \quad l_n^\pm(t) = g_n([\zeta_n^\pm(t), \eta_n^\pm(t)]),$$

$$w_n^\pm(t) = g_n(\eta_n^\pm(t)), \quad W_n^\pm(t) = w_n^\pm(t) - 2i\Delta.$$

Выбор ϵ_0 и ϵ_1 показывает, что кривые $l_n^\pm(t)$ лежат в полосе $\{z : \mathrm{Re}a_n - A_1/2 - \Delta \le \mathrm{Re}z \le \mathrm{Re}a_n + \Delta + A_1/2\}$, а выбор ϵ_2 и точки z_{n_0} влекут, что если $[w_n^\pm(t), W_n^\pm(t)] \cap \Gamma_n^0 \ne \varnothing$, то $[w_n^\pm(t), W_n^\pm(t)] \cap \Gamma_n \subset \Gamma_n^0$. Выбор точки z_{n_0} показывает, что $[z_{n_0}, z_{n_0} - 2i\Delta] \cap \Gamma_n = \{z_{n_0}\}$, а также, что при $0 \le t \le \epsilon_2$ выполняется $\mathrm{Re}w_n^-(t) < \mathrm{Re}z_{n_0} < \mathrm{Re}w_n^+(t)$. Если нет точек $z_* \in \Gamma_n$ таких, что $\mathrm{Re}w_n^-(t) < \mathrm{Re}z_* < \mathrm{Re}z_{n_0}$, то полагаем, что $\Lambda_n^-(t) = [w_n^-(t), W_n^-(t)]$, соответственно. Если нет точек $z_* \in \Gamma_n$ таких, что $\mathrm{Re}z_{n_0} < \mathrm{Re}z_* < \mathrm{Re}w_n^+(t)$, то полагаем, что $\Lambda_n^+(t) = [w_n^+(t), W_n^+(t)]$.

Нашей следующей целью является построение кривых $\Lambda_n^-(t), \Lambda_n^+(t)$, соединяющих соответственно точки $w_n^-(t)$ и $w_n^+(t)$ с прямыми $\mathrm{Im}z = g_m w_n^-(t) - 2\Delta$ и $\mathrm{Im}z = g_m w_n^+(t) - 2\Delta$. Если нет точек $z_* \in \Gamma_n$ таких, что $\mathrm{Re}w_n^-(t) < \mathrm{Re}z_* < \mathrm{Re}z_{n0}$, то полагаем $\Lambda_n^-(t) = [w_n^-(t), W_n^-(t)]$. Если нет точек $z_* \in \Gamma_n$, таких что $\mathrm{Re}z_{n0} < \mathrm{Re}z_* < \mathrm{Re}w_n^+(t)$, то полагаем $\Lambda_n^+(t) = [w_n^+(t), W_n^+(t)]$. Если же есть точки $z_* \in \Gamma_n$, такие что $\mathrm{Re}w_n^-(t) < \mathrm{Re}z_* < \mathrm{Re}z_{n0}(t)$, то при $y \in [\mathrm{Im}w_n^-(t) - 2\Delta, \mathrm{Im}w_n^-(t)]$ определим множества $\lambda_n^-(t,y)$, каждое из которых является точкой или отрезком, следующим образом: если нет точек $z_* = x_* + iy$, таких что $x_* > \mathrm{Re}w_n^-(t)$, то полагаем $\lambda_n^-(t,y) = \mathrm{Re}w_n^-(t)$. Пусть $L_n(y) = \Gamma_n \cap \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}z = y\}$. Если есть точки $z_* \in \Gamma_n$, такие что $x_* = \mathrm{Re}z_* > \mathrm{Re}w_n^-(t)$, то положим $\tilde\lambda_n^-(t,y) = \max\limits_{z \in L_n(y), \mathrm{Re}z < \mathrm{Re}z_{n0}} \mathrm{Re}z$, тогда $\tilde\lambda_n^-(t,y) + iy \in L_n(y)$. Получаем, что либо точка $\tilde\lambda_n^-(t) + iy$ не является концом целого сегмента, содержащегося в $L_n(y)$, либо является концом отрезка $[\tilde\lambda_n^-(t,y) + iy, \hat\lambda_n^-(t,y) + iy] \subset L_n(y)$, при этом считаем, что данный отрезок является максимальным. В первом случае полагаем $\lambda_n^-(t,y) = \tilde\lambda_n^-(t,y)$, во втором случае полагаем $\lambda_n^-(t,y) = [\tilde\lambda_n^-(t,y), \hat\lambda_n^-(t,y)]$. Теперь предположим, что

$$\Lambda_n^-(t) = \bigcup_{y \in [\mathrm{Im}w_n^-(t) - 2\Delta, \mathrm{Im}w_n^-(t)]} \{\lambda_n^-(t,y) + iy\}.$$

Аналогично, если есть точки $z_* \in \Gamma_n$ такие, что $\mathrm{Re}z_{n0} < \mathrm{Re}z_* < \mathrm{Re}w_n^+(t)$, то положим $\tilde\lambda_n^+(t,y) = \min\limits_{z \in L_n(y), \mathrm{Re}z > \mathrm{Re}z_{n0}} \mathrm{Re}z$ и аналогично определению $\lambda_n^-(t,y)$ определим $\lambda_n^+(t,y)$ и $\Lambda_n^+(t)$.

Полученные кривые $\Lambda_n^\pm(t)$ являются chord-arc-кривыми с постоянной b', зависящей от b, Δ и δ, c_{01}, c_{02}. Внутри кривой, образованной кривыми $\Lambda_n^\pm(t), l_n^\pm(t), \gamma_n(t)$ и отрезком $[W_n^-(t), W_n^+(t)]$, нет точек области G_n. Далее полагаем

$$\Xi^-(t) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left(l_{n-1}^+(t) \cup \Lambda_{n-1}^+(t) \cup [W_{n-1}^+(t), W_n^-(t)] \cup l_n^-(t) \cup \Lambda_n^-(t)\right) \cup \gamma_n(t),$$

$$\Xi^+(t)=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\left(l^+_{n-1}(t)\cup\Lambda^+_{n-1}(t)\cup[W^+_{n-1}(t),W^-_n(t)]\cup l^-_n(t)\cup\Lambda^-_n(t)\right)\cup(\Gamma_n\setminus\gamma_n(t).$$

Кривая $\Xi^-(t)$ делит комплексную плоскость $\mathbb{C}$ на две области: $D_-(t):-4i\Delta\in D_-(t)$ и $D_+(t):4i\Delta\in D_+(t)$.

Пусть функция $\Psi_+(\zeta,t)$ отображает верхнюю полуплоскость $\mathbb{C}_+=\{\zeta:\mathrm{Im}\zeta>0\}$ на область $D_+(t)$ так, что

$$\Psi_+(\infty,t)=\infty,\ \frac{\Psi_+(i\zeta,t)}{i\zeta}\xrightarrow[\zeta\to+\infty]{}1,$$

$\varphi_+(z,t)$ — обратное к $\Psi_+(\zeta,t)$ отображение. Функция $\Psi_-(\zeta,t)$ отображает нижнюю полуплоскость $\mathbb{C}_-=\{\zeta:\mathrm{Im}\zeta<0\}$ на область $D_-(t)$ с нормировкой

$$\Psi_-(\infty,t)=\infty,\ \frac{\Psi_-(i\zeta,t)}{i\zeta}\xrightarrow[\zeta\to-\infty]{}1,$$

$\varphi_-(z,t)$ — обратное к $\Psi_-(\zeta,t)$ отображение.

Далее, пусть $\zeta>0, s\in\mathbb{R}$, положим

$$z^+_{\zeta,s}(z,t)=\Psi_+((\varphi_+(z,t)+s+i\zeta),t)\text{ при }z\in D_+(t),$$

$$z^-_{\zeta,s}(z,t)=\Psi_-((\varphi_-(z,t)+s-i\zeta),t)\text{ при }z\in D_-(t).$$

Далее, для натурального k и $w\in E,\zeta>0,s\in\mathbb{R}$ положим

$$R_k(z,w,\zeta,s,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{z^+_{\zeta,s}(z,t)-w}\left(1+\sum\limits_{\nu=1}^{k}\left(\dfrac{z^+_{\zeta,s}(z,t)-z}{z^+_{\zeta,s}(z,t)-w}\right)^{\nu}\right), & z\in D_+(t),\\ \dfrac{1}{z^-_{\zeta,s}(z,t)-w}\left(1+\sum\limits_{\nu=1}^{k}\left(\dfrac{z^-_{\zeta,s}(z,t)-z}{z^-_{\xi,s}(z)-w}\right)^{\nu}\right), & z\in D_-(t).\end{cases}$$

Обозначим через Q_n прямоугольник:

$$Q_n=\{z=x+iy:-\frac{A_1}{2}-\Delta-a_n\le x\le\frac{A_1}{2}+\Delta+a_n,\ -2\Delta\le y\le 2\Delta\}.$$

Пусть $Q=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}Q_n$. Пользуясь методом Е. М. Дынькина [12], продолжим каждую функцию $f_n\overset{\mathrm{def}}{=}f|_{G_n}$ на всю плоскость $\mathbb{C}$ так, чтобы для продолжения f_{n_0} выполнялись условия $f_{n_0}\in C(\mathbb{C}),\mathrm{supp}f_{n_0}\subset Q_n, f_{n_0}\in C^1(\mathbb{C}\setminus G_n)$ и

$$|f'_{n_0\overline{z}}(z)|\le c_3\mathrm{dist}^{r-1}(z,G_n)\omega(\mathrm{dist}(z,G_n)),z\in\mathbb{C}\setminus G_n,$$

а также положим $f_0(z)=f_{n_0}(z)$ при $z\in Q_n, f_0(z)\equiv 0, z\notin Q$. Выберем параметры k и m, такие как в [9]: $k+1=4(r+1), m=8(k+1)+2$. Постоянная d_m такая, что

$$d_m\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\tau}{\tau}\right)^m d\tau=1,$$

$\sigma_1 = \dfrac{\sigma}{m}$, величины $A = \dfrac{2\pi}{\epsilon_2}, b_r$ удовлетворяют соотношению

$$b_r \int\limits_0^{\epsilon_2} \sin^{2r+2} At dt = 1.$$

Теперь полагаем, что при $w \in E$:

$$F_\sigma(w,t) = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\pi} \int\limits_{Q_n} f'_{0\bar{z}}(z) \left(\frac{d_m}{\sigma_1^{m-1}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin s\sigma_1}{s}\right)^m R_k(z,w,\frac{1}{\sigma_1},s,t)ds \right) dm_2(z),$$

где $m_2(z)$ — плоская мера Лебега и

$$F_\sigma(w) = b_r \int\limits_0^{\epsilon_2} \sin^{2r+2} A(t-w) F_\sigma(w,t)dt. \tag{12}$$

При проведении оценок разности $F_\sigma(w) - f(w)$ используется следующий факт.

Лемма 3. *При $w \in \mathbb{C}$ справедливо тождество*

$$\int\limits_0^{\epsilon_2} \sin^{2r+2} A(t-w)dt = \int\limits_0^{\epsilon_2} \sin^{2r+2} Atdt. \tag{13}$$

Доказательство. Пусть $b_r(w) = \int\limits_0^{\epsilon_2} \sin^{2r+2} A(t-w)dt$. Тогда $b_r(w)$ — целая функция экспоненциального типа $\le (2r+2)A$ с периодом ϵ_2. При $w = x \in \mathbb{R}$ имеем

$$b_r(x) = \int\limits_0^{\epsilon_2} \sin^{2r+2} A(t-x)dt = \int\limits_{-x}^{\epsilon_2 - x} \sin^{2r+2} \sin A\tau d\tau =$$
$$= \frac{1}{A} \int\limits_{-Ax}^{2\pi - Ax} \sin^{2r+2} \theta d\theta = \frac{1}{A} \int\limits_0^{2\pi} \sin^{2r+2} \theta d\theta = \int\limits_0^{\epsilon_2} \sin^{2r+2} Atdt. \tag{14}$$

Поскольку $b_r(w)$ — целая функция, то (13) следует из (14). Лемма 3 доказана. □

Из леммы 3 и определения (12) для разности $F_\sigma(w) - f(w)$ получается формула

$$F_\sigma(w) - f(w) = -\frac{1}{\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int\limits_{Q_n} f'_{0\bar{z}}(z) \left(b_r \int\limits_0^{\epsilon_2} \sin^{2r+2} A(t-w)dt \cdot \right.$$
$$\left. \cdot \frac{d_m}{\sigma_1^{m-1}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin s\sigma_1}{s}\right)^m \left(\frac{1}{z-w} - R_k(z,w,\frac{1}{\sigma_1},s,t) \right) ds \right) dm_2(z). \tag{15}$$

Разность в (15) оценивается по аналогии с работой [9] с учетом утверждений из п. 3.

Литература

1. *Бернштейн С. Н.* Собрание сочинений: в 4 томах. Т. 1. Конструктивная теория функций. М.: Изд-во Академии наук СССР, 1952.

2. *Уолш Дж. Л.* Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. М.: ИЛ, 1961.

3. *Альпер С. Я.* О равномерных приближениях функций комплексного переменного в замкнутой области // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1955. Т. 19. Вып. 6. С. 423–444.

4. *Дзядык В. К.* О проблеме С. М. Никольского в комплексной области // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1959. Т. 23. Вып. 5. С. 697–736.

5. *Дзядык В. К.* К вопросу о приближении непрерывных функций в замкнутых областях с углами и о проблеме С. М. Никольского. I // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1962. Т. 26. Вып. 6. С. 797–824.

6. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977.

7. *Белый В. И.* Конформные отображения и приближение аналитических функций в областях с квазиконформной границей // Матем. сб. 1977. Т. 102 (144), № 3. С. 331–361.

8. *Сильванович О. В., Широков Н. А.* Приближение целыми функциями на счетном объединении отрезков вещественной оси. 2. Доказательство основной теоремы // Вестник С.-Петерб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62). Вып. 1. С. 53–63. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.108

9. *Сильванович О. В., Широков Н. А.* Приближение целыми функциями на счетном объединении отрезков вещественной оси. 3. Дальнейшее обобщение // Вестник С.-Петерб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 2. С. 270–277. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.207

10. *Сильванович О. В., Широков Н. А.* Целые функции порядка 1/2 в приближении функций на полуоси // Вестник С.-Петерб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 4. С. 627–635. https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.408

11. *Pommerenke Ch.* Boundary behavior of conformal maps. Berlin: Springer-Verlag, 1992. (Vol. 299 of Grundlehren der mathematischen Wissenschaften.)

12. *Dyn'kin E. M.* The pseudoanalytic extension // J. Anal. Math. 1993. Vol. 60. P. 45–70. https://doi.org/10.1007/BF03341966

Статья поступила в редакцию 18 февраля 2020 г.;
после доработки 16 марта 2020 г.;
рекомендована в печать 19 марта 2020 г.

Контактная информация:

Сильванович Ольга Васильевна — канд. физ.-мат. наук; olamamik@gmail.com
Широков Николай Алексеевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; nikolai.shirokov@gmail.com

Approximation by entire functions on a countable set of continuums

O. V. Silvanovich[1], *N. A. Shirokov*[2]

[1] St. Petersburg Mining University, 2, 21-ia liniia V. O., St. Petersburg, 199106, Russian Federation
[2] St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Silvanovich O. V., Shirokov N. A. Approximation by entire functions on a countable set of continuums. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2020, vol. 7 (65), issue 3, pp. 481–489. https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.310 (In Russian)

We consider a problem of approximation by entire functions of exponential type of functions defined on a countable set E of continuums $G_n, E = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} G_n$. We assume that all G_n are pairwise disjoint and are situated near the real axis. We assume too that all G_n are commensurable in a sense and have uniformly smooth boundaries. A function f is defined independantly on each G_n and is bounded on E and $f^{(r)}$ has a module of continuity ω which satisfies a condition

$$\int\limits_0^x \frac{\omega(t)}{t}dt + x\int\limits_x^\infty \frac{\omega(t)}{t^2}dt \le c\omega(x).$$

Then we construct an entire function F_σ of exponential type $\le \sigma$ such that we have the following estimate of approximation of the function f by functions F_σ:

$$|f(z) - F_\sigma(z)| \le c_f\sigma^{-r}\omega(\sigma^{-r}),\ z \in \mathbb{Z},\ \sigma \ge 1.$$

Keywords: Hölder classes, approximation, entire functions of exponential type.

References

1. Bernshtein S. N., *Collected Works. Constructive Function Theory* **1** (The USSR Academy of Sciences Publ., Moscow, 1952). (In Russian)

2. Uolsh D. L., *Interpolation and approximation by rational functions in a complex domain* (IL Publ., Moscow, 1961). (In Russian)

3. Al'per S. Ya., "On uniform approximations of functions of a complex variable in a closed region", *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **19**, iss. 6, 423–444 (1955). (In Russian)

4. Dzyadyk V. K., "On a problem of S. M. Nikol'skii in a complex region", *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **23**, iss. 5, 697–736 (1959). (In Russian)

5. Dzyadyk V. K., "On the approximation of continuous functions in closed regions with corners and on a problem of S. M. Nikol'skii. I", *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.* **26**, iss. 6, 797–824 (1962). (In Russian)

6. Dzyadyk V. K., *Introduction to the theory of uniform approximation of functions by polynomials* (Nauka Publ., Moscow, 1977). (In Russian)

7. Belyi V. I., "Conformal mappings and the approximation of analytic functions in domains with a quasiconformal boundary", *Math. USSR-Sb.* **31** (3), 289–317 (1977). https://doi.org/10.1070/SM1977v031n03ABEH002304

8. Silvanovich O. V., Shirokov N. A., "Approximation by entire functions on countable unions of segments of the real axis. 2. Proof of the main theorem", *Vestnik St. Petersb. Univ. Math.* **50**, 35–43 (2017). https://doi.org/10.3103/S1063454117010125

9. Silvanovich O. V., Shirokov N. A., "Approximation by Entire Functions on a Countable Union of Segments on the Real Axis: 3. Further Generalization", *Vestnik St. Petersb. Univ. Math.* **51**, 164–168 (2018). https://doi.org/10.3103/S1063454118020085

10. Silvanovich O. V., Shirokov N. A., "Entire Functions of Order 1/2 in the Approximation to Functions on a Semiaxis", *Vestnik St. Petersb. Univ. Math.* **52**, 394–400 (2019). https://doi.org/10.1134/S1063454119040101

11. Pommerenke Ch., *Boundary behavior of conformal maps* (Springer-Verlag, Berlin, 1992, vol. 299 of Grundlehren der mathematischen Wissenschaften).

12. Dyn'kin E. M., "The pseudoanalytic extension", *J. Anal. Math.* **60**, 45–70 (1993). https://doi.org/10.1007/BF03341966

Received: February 18, 2020
Revised: March 16, 2020
Accepted: March 19, 2020

Authors' information:

Olga V. Silvanovich — olamamik@gmail.com
Nikolai A. Shirokov — nikolai.shirokov@gmail.com