

Формулировка критерия усталостной прочности композиционных материалов*

А. Р. Арутюнян

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: Арутюнян А. Р. Формулировка критерия усталостной прочности композиционных материалов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 3. С. 511–517.
<https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.313>

Согласно результатам многочисленных экспериментов, композиционные материалы при циклических нагружениях деформируются и разрушаются вследствие накопления дефектов различной природы. В работе на основе этих результатов и с учетом концепции рассеянного повреждения и разрушения сформулирован критерий усталостной прочности для этих материалов. В общей постановке кинетическое уравнение для параметра поврежденности рассматривалось в работах Говарда и Бокшицкого. Согласно этим работам поврежденность системы, в соответствии с представлениями статистической физики, протекает со скоростью, зависящей от некоторых внешних факторов (механических, физических, химических и др.), а также от величины накопленной поврежденности. Реальные материалы имеют случайную структуру, поэтому параметр сплошности или поврежденности является статистическим показателем, который может быть задан с помощью некоторого кинетического уравнения. Относительное изменение модуля упругости в процессе циклических нагружений рассматривается в качестве параметра сплошности (поврежденности). Критическая величина повреждений принимается в качестве условия разрушения и на этой основе формулируется критерий усталостной прочности. Конкретизированы коэффициенты критерия и построены кривые накопления повреждений и кривые усталости. Наблюдается хорошее согласие теоретических кривых поврежденности и усталости с результатами соответствующих опытов по усталости стеклопластиков. Таким образом, предлагаемый подход позволяет прогнозировать усталостную прочность композиционных материалов на основе относительного изменения модуля упругости в процессе циклических нагружений.

Ключевые слова: композиционные материалы, циклические нагружения, сплошность, накопление повреждений, принцип эквивалентности напряжений и деформаций, модуль Юнга, эффективное время, эффективное напряжение, критерий усталостной прочности.

1. Введение. Первые исследования по усталости композиционных материалов были выполнены в 1964 г. Боллером [1]. В работе [1] представлены результаты циклического растяжения пластмасс, армированных стекловолокном. С этого времени началось интенсивное исследование усталости композитов, которое продолжается и в настоящее время. Накоплен значительный объем экспериментальных данных для различных типов композиционных материалов [2–7]. Согласно этим исследованиям, основные процессы усталостного разрушения вызваны накоплением поврежденно-

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18-01-00146).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2020

сти. При этом мера повреждения определяется различными процессами деградации материала: разрушение волокон, расслоение, разрушение матрицы, совместное разрушение матрицы и волокон, отрывы на поверхности раздела, повторные включения. До того как произойдет полное разрушение материала, последовательность указанных повреждений может быть самой разнообразной. В отличие от металлов, для которых образование и развитие трещин являются основными механизмами, определяющими долговечность материала, для композитов эти механизмы определяются кинетикой развития поврежденного состояния вплоть до окончательного разрушения. При этом, как показывают опыты [2], кривая накопления суммарной величины повреждений является возрастающей функцией времени (числа циклов нагружения) до момента макроразрушения. В данной работе обращается внимание на возможности описания этих процессов и формулировки критерия усталостной прочности методами механики материалов на основе концепции поврежденности [8–15].

В общей постановке кинетическое уравнение для параметра поврежденности рассматривалось в работах [8, 9]. Согласно этим работам поврежденность системы, в соответствии с представлениями статистической физики, протекает со скоростью, зависящей от некоторых внешних факторов (механических, физических, химических и др.), а также от величины накопленной поврежденности. При рассмотрении этой концепции исходят из следующих положений. Реальные материалы имеют случайную структуру, поэтому параметр сплошности ψ (или параметр поврежденности $\omega = 1 - \psi$) является статистическим показателем, который может быть задан с помощью некоторого кинетического уравнения, базирующегося на двух гипотезах:

$$\frac{d\psi}{dt} = -f[\sigma(t)], \quad \frac{d\psi}{dt} = -f[\sigma(t), \psi]. \quad (1)$$

Согласно первой гипотезе хрупкое разрушение протекает со скоростью, зависящей только от напряжения. Согласно второй гипотезе, и в соответствии с представлениями статистической физики, скорость хрупкого разрушения зависит от напряжения и величины накопленной поврежденности. В уравнениях (1) $\sigma(t)$ — напряжение, зависящее от времени t .

Данная концепция была использована в работах Качанова — Работнова [11, 12] и на ее основе сформулирован критерий хрупкого разрушения в условиях высокотемпературной ползучести. Согласно этим работам вводится параметр сплошности ψ или поврежденности ω ($\psi = 1 - \omega$, $d\psi = -d\omega$), зависящий от времени t . Причем при $t = 0$, $\omega = 0$, т. е. в начальном состоянии, система не повреждена. Система разрушается при условии $\omega = 1$. Используется кинетическое уравнение (1), правая часть которого задается в виде степенной зависимости от величины эффективного напряжения и для этого простого случая формулируется критерий длительной прочности.

2. Параметр поврежденности (сплошности) композиционных материалов. Далее при формулировке критерия усталостной прочности композиционных материалов на основе концепции поврежденности воспользуемся параметрами поврежденности и сплошности, выраженными через отношения модулей упругости поврежденного и неповрежденного материала. Диаграмма напряжение — деформация для этих материалов близка к линейной с предельной деформацией в пределах двух-трех процентов. Поэтому в первом приближении для этих материалов можно

использовать модель упругой среды. Принимается принцип эквивалентных напряжений [15], согласно которому компоненты тензора напряжений поврежденной среды определяются через компоненты тензора напряжений неповрежденной среды. Для случая простого растяжения имеем

$$\sigma_\omega = \frac{\sigma}{1 - \omega} = \frac{\sigma}{\psi}, \quad (2)$$

где σ и σ_ω — соответственно, напряжения неповрежденной и поврежденной сред.

Далее принимается принцип эквивалентности деформаций, согласно которому деформация поврежденной среды ε_D при простом растяжении выражается соотношением

$$\varepsilon_D = \frac{\sigma}{1 - \omega} \frac{1}{E}, \quad \varepsilon_D = \frac{\sigma}{E_D}, \quad (3)$$

где E , E_D — модули упругости, соответственно, неповрежденного и поврежденного материала.

Из соотношений (3) следует

$$\omega = 1 - \frac{E_D}{E}, \quad \psi = \frac{E_D}{E}. \quad (4)$$

Таким образом, параметры поврежденности и сплошности выражаются через отношение модулей упругости поврежденной и неповрежденной среды. Эти соотношения используются для металлов [16, 17] и композитов [7, 18–20].

Учитывая соотношения (4) и принимая концепцию поврежденности, сформулируем критерий усталости для композитов. Введем понятие эффективного напряжения σ_a/ψ , где σ_a — амплитуда напряжения цикла.

Кинетическое уравнение для параметра поврежденности зададим в виде

$$\frac{d\psi}{dt} = -A \left(\frac{\sigma_a}{\psi} \right)^n, \quad (5)$$

где A , n — постоянные.

Решение уравнения (5) при начальном условии $t = 0$, $\psi = 1$ имеет вид

$$\psi = [1 - (n + 1)A\sigma_a^n t]^{\frac{1}{n+1}}. \quad (6)$$

С учетом соотношения $t = N/f$, где N — число циклов нагружения, f — частота нагружения, уравнение (6) можно записать через число циклов нагружения:

$$\psi = [1 - (n + 1)A\sigma_a^n f^{-1} N]^{\frac{1}{n+1}}. \quad (7)$$

Кривая $\psi = E_D/E$ согласно формуле (7) и опытные точки, полученные при циклическом нагружении образцов из однонаправленного стеклопластика согласно работе [20], показаны на рис. 1. При расчетах приняты следующие значения коэффициентов: $n = 8$, $A = 2,26 \cdot 10^{-26}$ [МПа]⁻⁸ [Гц], $f = 5$ Гц, $\sigma_a = 347$ МПа.

3. Формулировка критерия усталостной прочности композиционных материалов. Принимая условие разрушения $N = N_f$, $\psi = 0$, из (7) получим следующий критерий усталости:

$$\sigma_a^n N_f = \frac{f}{(n + 1)A}. \quad (8)$$

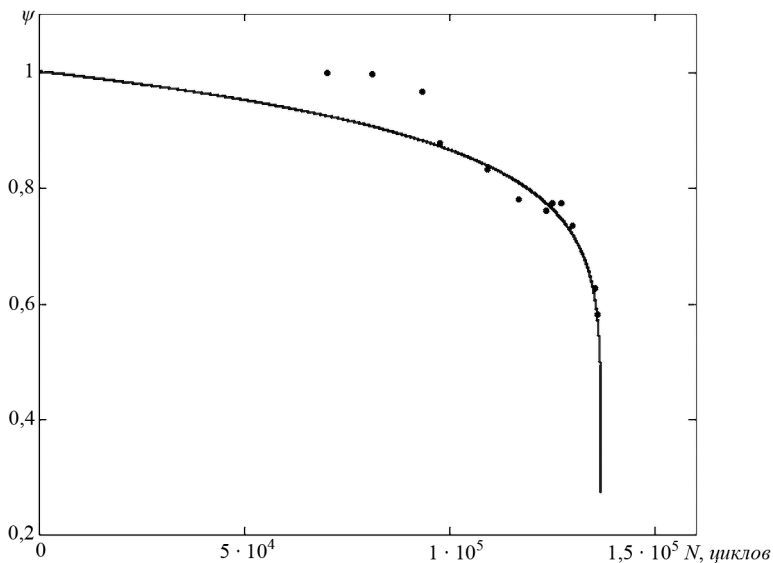


Рис. 1. Кривая поврежденности согласно формуле (7) и опытные точки, полученные при циклическом нагружении образцов из однонаправленного стеклопластика согласно работе [20].

В реальных условиях в момент разрушения величина параметра поврежденности (согласно рис. 1) не достигает нулевого значения. Разрушение наступает при некоторой критической величине $\psi = \psi_*$. Принимая в (7) условие разрушения в виде $N = N_f$, $\psi = \psi_*$ ($\psi_* \neq 0$), получим следующий критерий усталости:

$$\sigma_a^n N_f = \frac{(1 - \psi_*^{n+1})f}{(n + 1)A}. \quad (9)$$

В двойных логарифмических координатах $lg\sigma_a - lgN_f$ критерии (8) и (9) выражаются в виде прямой линии, что согласуется с результатами многочисленных опытов на усталость, например для образцов из углепластика и стеклопластика [5, 6].

Кривая усталости согласно критерию (9) и экспериментальные точки для однонаправленного углепластика согласно работе [20] представлены на рис. 2. При расчетах приняты следующие значения коэффициентов: $n = 8$, $A = 2,26 \cdot 10^{-26} [\text{МПа}]^{-8} [\text{Гц}]$, $f = 5 \text{ Гц}$, $\psi_* = 0,6$.

4. Заключение. Результаты обзорных исследований усталости композиционных материалов показывают, что в процессе длительного циклического нагружения этих материалов, в частности стеклопластиков и углепластиков, основным механизмом деформирования и разрушения можно считать различного рода повреждения, которые описываются с помощью параметра поврежденности, кинетическое уравнение для которого разработано методами механики рассеянного повреждения и разрушения. Параметр поврежденности (сплошности) определяется относительным изменением модуля упругости в процессе циклических нагружений. В качестве условия разрушения рассматривается критическая величина повреждений и на этой основе формулируется критерий усталостной прочности. Конкретизированы коэффи-

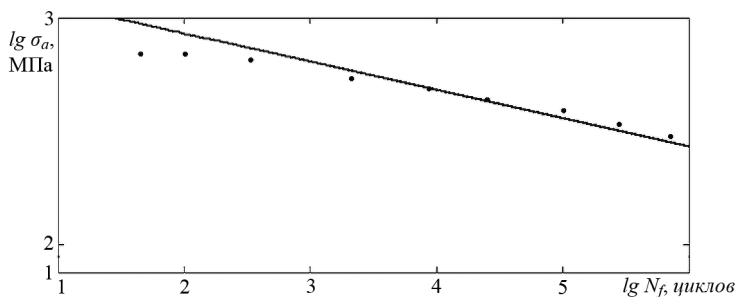


Рис. 2. Кривая усталости согласно критерию (9) и экспериментальные точки для однонаправленного углепластика согласно работе [20].

циенты критерия и дано сравнение с результатами опытов по усталости стеклопластиков. Построена кривая накопления повреждений в зависимости от числа циклов нагружения для заданного уровня напряжения. Наблюдается хорошее согласие теоретических кривых поврежденности и усталости с результатами соответствующих опытов для однонаправленного углепластика. Таким образом, предлагаемый подход позволяет прогнозировать усталостную прочность композиционных материалов на основе относительного изменения модуля упругости в процессе циклических нагружений.

Литература

1. *Boller K. H.* Fatigue Fundamentals for Composite Materials. In: Composite Materials: Testing and Design. West Conshohocken, PA: ASTM International, 1969. Vol. 460. P. 217–235. <https://doi.org/10.1520/STP49819S>
2. *Salkind M. J.* Fatigue of composites. In: Composite Materials: Testing and Design. West Conshohocken, PA: ASTM International, 1972. Vol. 497. P. 143–169. <https://doi.org/10.1520/STP27745S>
3. *Dew-Hughes D., Way J. L.* Fatigue of fiber-reinforced plastics: a review // Composites. 1973. Vol. 4. Iss. 4. P. 167–173. [https://doi.org/10.1016/0010-4361\(73\)90108-0](https://doi.org/10.1016/0010-4361(73)90108-0)
4. *Фудзиси Т., Дзако М.* Механика разрушения композиционных материалов: пер. с англ. М.: Мир, 1982.
5. *Оуэн М. Дж.* Усталостное повреждение стеклопластиков. В кн.: Композиционные материалы. Т. 5. Разрушение и усталость / под ред. Л. Браутмана, Р. Крока, пер. с англ. М.: Мир, 1978. С. 333–362.
6. *Оуэн М. Дж.* Усталость углепластиков. В кн.: Композиционные материалы. Т. 5. Разрушение и усталость / под ред. Л. Браутмана, Р. Крока, пер. с англ. М.: Мир, 1978. С. 363–393.
7. *Philippidis T. P., Vassilopoulos A. P.* Fatigue design allowables for GRP laminates based on stiffness degradation measurements // Composites Science and Technology. 2000. Vol. 60. P. 2819–2828. [https://doi.org/10.1016/S0266-3538\(00\)00150-0](https://doi.org/10.1016/S0266-3538(00)00150-0)
8. *Haward R. N.* The extension and rupture of cellulose acetate and celluloid // Trans. Farad. Soc. 1942. Vol. 38. P. 394–400.
9. *Божиницкий М. Н.* Длительная прочность полимеров. М.: Химия, 1978.
10. *Качанов Л. М.* О времени разрушения в условиях ползучести // Изв. АН СССР. ОТН. 1958. № 8. С. 26–31.
11. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций М.: Наука, 1966.
12. *Арутюнян Р. А.* Накопление повреждений и разрушение высокоэластичного тонкого слоя при циклическом обжатии // Вестник С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2012. Вып. 4. С. 53–61.
13. *Arutyunyan R. A.* High-temperature embrittlement and long-term strength of metallic materials // Mechanics of Solids. 2015. Vol. 50. Iss. 2. P. 191–197. <https://doi.org/10.3103/S0025654415020089>
14. *Арутюнян Р. А.* Проблема деформационного старения и длительного разрушения в механике материалов. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2004.
15. *Lemaître J., Desmorat R.* Engineering Damage Mechanics. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2005.

16. *Lemaitre J., Dufailly J.* Damage measurements // *Engineering Fracture Mechanics*. 1987. Vol. 28. Iss. 5–6. P. 643–661. [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(87\)90059-2](https://doi.org/10.1016/0013-7944(87)90059-2)
17. *Kim S., Kim W.* A progressive damage modeling based on the continuum damage mechanics and its finite element analysis // *J. Appl. Mech.* 1994. Vol. 61, no. 1. P. 45–53. <https://doi.org/10.1115/1.2901419>
18. *Lemaitre J., Leckie F., Sherman D.* Cracking of laminates // *European Journal of Mechanics — A/Solids*. 1992. Vol. 11, no. 3. P. 289–304.
19. *Tang C., Plumtree A.* Damage mechanics applied to polymers // *Engineering Fracture Mechanics*. 1994. Vol. 49, iss. 4. P. 499–508. [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(94\)90044-2](https://doi.org/10.1016/0013-7944(94)90044-2)
20. *Dharan C.* Fatigue Failure Mechanisms in a Unidirectionally Reinforced Composite Material. In: *Fatigue of Composite Materials*. West Conshohocken, PA: ASTM International, 1975. P. 171–188. <https://doi.org/10.1520/STP33172S>

Статья поступила в редакцию 28 мая 2019 г.;
после доработки 24 февраля 2020 г.;
рекомендована в печать 19 марта 2020 г.

Контактная информация:

Арutyunyan Александр Робертович — канд. физ.-мат. наук, доц.; a.arutyunyan@spbu.ru

Formulation of the fatigue fracture criterion of composite materials

A. R. Arutyunyan

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Arutyunyan A. R. Formulation of the fatigue fracture criterion of composite materials. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2020, vol. 7 (65), issue 3, pp. 511–517. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.313> (In Russian)

According to numerous studies of different types of composite materials was found that the main processes of fatigue fracture in these materials are caused by the accumulation of damage. The measure of damage is determined by various degradation processes of the material: the fibers fracture, delamination, destruction of the matrix, the joint destruction of the matrix and fibers, separation on the interface, re-inclusion. The sequence of these damages can be various up to full fracture of a material. Unlike metals, for which the formation and development of cracks are the main mechanisms that determine the durability of the material, for composite materials, these mechanisms are determined by the kinetics of the development of the damaged state until the final fracture. The cumulative damage accumulation curve is an increasing function of the time (number of loading cycles) until the moment of macro-fracture. In the general formulation of the kinetic equation for the damage parameter was considered in the works of Howard and Bokshitsky. According to these works, the damage of the system, in accordance with the conception of statistical physics, proceeds at a rate that depends on some external factors (mechanical, physical, chemical, etc.), as well as the value of the accumulated damage. Since that the real materials have a random structure, therefore, the continuity or damage parameter is a statistical index. This index can defined using a kinetic equation, the right part of which is given in the form of a power dependence on the value of the effective stress. The given conception was used in the works of Kachanov-Rabotnov and on its basis, the criterion of brittle fracture under high-temperature creep was formulated. In this paper, the damage conception is used to describe the damage processes of composite materials and the formulation of the fatigue strength criterion. The relative changes of the elasticity modulus in the process of cyclic loadings is considered as a continuity (damage) parameter. The critical value of damages is accepted as a fracture condition and on this basis the criterion of fatigue strength is formulated. The coefficients of the criterion are concretized and damage accumulation curves and fatigue

curves are plotted. A good agreement between the theoretical damage and fatigue curves with the results of the corresponding experiments on the fatigue of carbon fiber plastics is observed.

Keywords: composite materials, cyclic loadings, continuity, damage accumulation, the principle of stresses and strains equivalence, Young's modulus, effective time, effective stress, fatigue fracture criterion.

References

1. Boller K. H., "Fatigue Fundamentals for Composite Materials", in: *Composite Materials: Testing and Design* **460**, 217–235 (ASTM International, West Conshohocken, PA, 1969). <https://doi.org/10.1520/STP49819S>
2. Salkind M. J., "Fatigue of composites", in: *Composite Materials: Testing and Design* **497**, 143–169 (ASTM International, West Conshohocken, PA, 1972). <https://doi.org/10.1520/STP27745S>
3. Dew-Hughes D., Way J. L., "Fatigue of fiber-reinforced plastics: a review", *Composites* **4**, iss. 4, 167–173 (1973). [https://doi.org/10.1016/0010-4361\(73\)90108-0](https://doi.org/10.1016/0010-4361(73)90108-0)
4. Fujii T., Zako M., *Fracture and Mechanics of Composite Materials* (Jikkyo Shuppan, Tokyo, 1978).
5. Owen M. J., "Fatigue damage in glass-fiber-reinforced plastics", in: *Composite materials. Vol. 5: Fracture and Fatigue*, 314–340 (L. Brautman, R. Crock (eds.), Academic Press, New York, 1974).
6. Owen M. J., "Fatigue of carbon-fiber-reinforced plastics", in: *Composite materials. Vol. 5: Fracture and Fatigue*, 342–369 (L. Brautman, R. Crock (eds.), Academic Press, New York, 1974).
7. Philippidis T. P., Vassilopoulos A. P., "Fatigue design allowables for GRP laminates based on stiffness degradation measurements", *Composites Science and Technology* **60**, 2819–2828 (2000). [https://doi.org/10.1016/S0266-3538\(00\)00150-0](https://doi.org/10.1016/S0266-3538(00)00150-0)
8. Haward R. N., "The extension and rupture of cellulose acetate and celluloid", *Trans. Farad. Soc.* **38**, 394–400 (1942).
9. Bokshitsky M. N., *Long-term strength of polymers* (Chemistry Publ., Moscow, 1978). (In Russian)
10. Kachanov L. M., "On the time of fracture under creep conditions", *Izvestija AN SSSR. OTN* (8), 26–31 (1958). (In Russian)
11. Rabotnov Yu. N., *The creep of structural elements* (Nauka Publ., Moscow, 1966). (In Russian)
12. Arutyunyan R. A., "Damage accumulation and fracture of highly elastic thin layer under cyclic compression", *Vestnik of Saint Petersburg University. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, iss. 4, 53–61 (2012). (In Russian)
13. Arutyunyan R. A., "High-temperature embrittlement and long-term strength of metallic materials", *Mechanics of Solids* **50**(2), 191–197 (2015). <https://doi.org/10.3103/S0025654415020089>
14. Arutyunyan R. A., *The problem of deformation aging and long-term fracture in the mechanics of materials* (St. Petersburg University Press, St. Petersburg, 2004). (In Russian)
15. Lemaitre J., Desmorat R., *Engineering Damage Mechanics* (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2005).
16. Lemaitre J., Dufailly J., "Damage measurements", *Engineering Fracture Mechanics* **28**, iss. 5–6, 643–661 (1987). [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(87\)90059-2](https://doi.org/10.1016/0013-7944(87)90059-2)
17. Kim S., Kim W., "A progressive damage modeling based on the continuum damage mechanics and its finite element analysis", *J. Appl. Mech.* **61**(1), 45–53 (1994). <https://doi.org/10.1115/1.2901419>
18. Lemaitre J., Leckie F., Sherman D., "Crazing of laminates", *European Journal of Mechanics – A/Solids* **11**(3), 289–304 (1992).
19. Tang C., Plumtree A., "Damage mechanics applied to polymers", *Engineering Fracture Mechanics* **49**, iss. 4, 499–508 (1994). [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(94\)90044-2](https://doi.org/10.1016/0013-7944(94)90044-2)
20. Dharan C., "Fatigue Failure Mechanisms in a Unidirectionally Reinforced Composite Material", in: *Fatigue of Composite Materials*, 171–188 (ASTM International, West Conshohocken, PA, 1975). <https://doi.org/10.1520/STP33172S>

Received: May 28, 2019
Revised: February 24, 2020
Accepted: March 19, 2020

Author's information:

Alexander R. Arutyunyan — a.arutyunyan@spbu.ru