

Частоты свободных колебаний круглой тонкой пластины с переменными параметрами*

Г. П. Васильев, А. Л. Смирнов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: Васильев Г. П., Смирнов А. Л. Частоты свободных колебаний круглой тонкой пластины с переменными параметрами // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). Вып. 3. С. 518–526. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.314>

В статье исследуются поперечные колебания неоднородной круглой тонкой пластины. С помощью метода возмущений получены асимптотические формулы для частот свободных колебаний пластины, толщина и модуль Юнга которой линейно зависят от радиуса. Проанализировано влияние условий закрепления края пластины на частоты и поведение частот при фиксированной массе пластины. Для низших частот колебаний пластины асимптотические результаты сравниваются с результатами конечно-элементного анализа.

Ключевые слова: свободные колебания пластин, неоднородная круглая пластина, метод возмущений.

1. Введение. Строение спектра свободных поперечных колебаний круглых тонких пластин при различных краевых условиях является хорошо изученной задачей. Это связано, во-первых, с частым применением таких структурных элементов в инженерных конструкциях, а во-вторых, с простотой геометрии, которая в некоторых случаях делает возможным получение аналитического решения. Список работ по этой теме обширен, систематизированный обзор результатов исследований приведен в [1]. Число работ, посвященных колебаниям неоднородных круглых пластин, в частности пластин переменной толщины и жесткости, тоже достаточно велико. Применение численных методов позволяет найти значения частот и формы свободных колебаний для тонкой пластины любой геометрии. В частности, при решении таких задач использовались: метод Рэлея — Ритца [2–4], дифференциальный квадратурный метод [5], метод Фробениуса (бесконечные степенные ряды) [6, 7]. Чаще всего анализ проводился для пластин, параметры которых зависели только от радиальной координаты. Рассматривались колебания пластин с разной формой неоднородности по толщине: линейное [2, 6], квадратичное [2, 3], полиномиальное [7, 4], ступенчатое [8], экспоненциальное [9], пластина с центральным отверстием [10, 11]. Меньшее число работ касалось колебаний пластин с переменным модулем Юнга [12].

Целью нашего исследования является получение асимптотических формул, описывающих влияние неоднородности параметров тонкой пластины, толщины или жесткости, на ее собственные частоты. Алгоритм вывода таких формул описан, например, в [13]. В данном исследовании полагалось, что параметры пластины, гео-

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (гранты № 18-01-00832-а и 19-01-00208-а).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2020

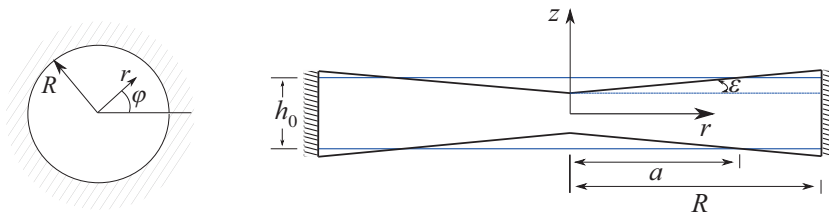


Рис. 1. Круглая пластина переменной толщины и ее сечение.

метрические и физические, являются гладкими функциями координат. Асимптотический подход при исследовании колебаний пластин с неоднородностями в форме отверстий использовался в [10, 11].

2. Уравнения колебаний тонкой круглой пластины с переменными параметрами. Рассмотрим свободные поперечные колебания круглой тонкой пластины с непостоянными модулем Юнга E и толщиной h . Остальные параметры пластины (ρ — плотность материала, ν — коэффициент Пуассона) считаем постоянными. Влияние коэффициента Пуассона на фундаментальную частоту исследовалось в [14].

В модели пластины, использующей гипотезы Кирхгофа — Лява, уравнения поперечных колебаний имеют вид [1]

$$\Delta(D\Delta w) - (1 - \nu) \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(D \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(D \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) - 2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left(D \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \right] + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (1)$$

Здесь $D(x_1, x_2) = \frac{E(x_1, x_2)h^3(x_1, x_2)}{12(1 - \nu^2)}$ — жесткость пластины, $E(x_1, x_2)$ — модуль Юнга, $h(x_1, x_2)$ — толщина пластины, $w(x_1, x_2, t)$ — прогиб. Разделив переменные в уравнении (1) по формуле

$$w(x_1, x_2, t) = W(x_1, x_2) \sin(\omega t),$$

где ω — частота свободных колебаний, и перейдя к полярной системе координат $x_1 = r \cos \varphi$, $x_2 = r \sin \varphi$, получим уравнение колебаний круглой пластины с непостоянными параметрами

$$\sum_{i,j=0}^4 a_{i,j} \frac{\partial^{i+j}}{\partial \varphi^i \partial r^j} w(r, \varphi) = 0, \quad (2)$$

коэффициенты которого таковы:

$$\begin{aligned} a_{00} &= -\rho h \omega^2, \\ a_{10} &= -\frac{2(1-\nu)}{r^3} D''_{\varphi r} + \frac{2(1-\nu)}{r^4} D'_{\varphi}, & a_{12} &= \frac{2}{r^2} D'_{\varphi}, \\ a_{01} &= -\frac{1}{r^2} D'_r + \frac{1}{r^3} D + \frac{1}{r^3} D''_{\varphi \varphi} + \frac{\nu}{r} D''_{rr}, & a_{22} &= \frac{2}{r^2} D, \\ a_{11} &= \frac{2\nu}{r^3} D'_{\varphi} + \frac{2(1-\nu)}{r^2} D''_{\varphi r}, & a_{30} &= \frac{2}{r^4} D'_{\varphi}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{20} &= \frac{\nu}{r^2} D''_{rr} + \frac{1}{r^4} D''_{\varphi\varphi} - \frac{3}{r^3} D'_r + \frac{4}{r^4} D, & a_{03} &= 2D'_r + \frac{2}{r} D, \\
a_{02} &= D''_{rr} + \frac{\nu}{r^2} D''_{\varphi\varphi} + \frac{\nu+2}{r} D'_r - \frac{1}{r^2} D, & a_{40} &= \frac{1}{r^4} D, \\
a_{21} &= -\frac{2}{r^3} D + \frac{2}{r^2} D'_r, & a_{04} &= D, \\
D &= D(\varphi, r), & h &= h(\varphi, r).
\end{aligned}$$

Далее в статье рассматривается случай, когда параметры пластины зависят только от радиуса. После разделения пространственных переменных

$$w(r, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} w_m(r) \cos(m\varphi),$$

где m — число волн в окружном направлении, уравнение (2) принимает вид

$$L(w_m(r)) - \rho h(r) \omega^2 w_m(r) = 0, \quad L(w_m(r)) = \sum_{i=0}^4 b_i \frac{d^i}{dr^i} w_m(r). \quad (3)$$

Коэффициенты линейного дифференциального оператора L таковы:

$$\begin{aligned}
b_0 &= \frac{m^4 - 4m^2}{r^4} D - \frac{\nu m^2}{r^2} D'' + \frac{3m^2}{r^3} D', \\
b_1 &= -\frac{2m^2 + 1}{r^2} D' + \frac{2m^2 + 1}{r^3} D + \frac{\nu}{r} D'', \\
b_2 &= -\frac{2m^2 + 1}{r^2} D + \frac{2 + \nu}{r} D' + D'', \\
b_3 &= \frac{2}{r} D + 2D', \quad b_4 = D, \quad D = D(r).
\end{aligned} \quad (4)$$

Для частного случая осесимметричных колебаний ($m = 0$) уравнение (3) записывается как

$$(D(r)rw''(r))'' + \nu(D'(r)w'(r))' - \left[\frac{D(r)w'(r)}{r} \right]' - \omega^2 \rho r h(r)w(r) = 0. \quad (5)$$

Здесь и далее индекс m опущен, $w(r) = w_m(r)$. Такое уравнение исследовалось в статье [5]. Для удобства перейдем в уравнениях (3) и (5) к безразмерным переменным со значком \sim , который в дальнейшем опускается:

$$\begin{aligned}
D(r) &= D_0 \tilde{D}(\tilde{r}), \quad h(r) = h_0 \tilde{h}(\tilde{r}), \quad E(r) = E_0 \tilde{E}(\tilde{r}), \quad w(r) = R w(\tilde{r}), \\
r &= R \tilde{r}, \quad \lambda^4 = \frac{12(1 - \nu^2)R^4 \omega^2 \rho}{E_0 h_0^2}, \quad D_0 = \frac{E_0 h_0^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad 0 \leq \tilde{r} \leq 1.
\end{aligned}$$

Здесь λ — безразмерная собственная частота. Уравнение (3) приобретает вид

$$L(w(r)) - \lambda^4 h(r)w(r) = 0,$$

где коэффициенты оператора L определяются формулами (4).

3. Метод возмущений. Для исследования частот колебаний круглой пластины с параметрами жесткости и толщины, близкими к постоянным, применим метод возмущений. Полагаем

$$\begin{aligned} h(r) &= 1 + \varepsilon h_1(r) + \dots, & E(r) &= 1 + \varepsilon E_1(r) + \dots, \\ \lambda &= \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \dots, & w(r) &= w_0(r) + \varepsilon w_1(r) + \dots, \quad \varepsilon \ll 1. \end{aligned} \quad (6)$$

После подстановки (6) в уравнение (5) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ε получаем серию краевых задач:

$$\begin{aligned} \varepsilon^0: & \Delta^2 w_0(r) - \lambda_0^4 w_0(r) = 0, \\ \varepsilon^1: & \Delta^2 w_1(r) - \lambda_0^4 w_1(r) = F_{11}(\lambda_0, w_0(r)) + F_{12}(\lambda_0, w_0(r)) \lambda_1, \\ \varepsilon^2: & \Delta^2 w_2(r) - \lambda_0^4 w_2(r) = F_{21}(\lambda_0, w_0(r), \lambda_1, w_1(r)) + \\ & + F_{22}(\lambda_0, w_0(r), \lambda_1, w_1(r)) \lambda_2, \\ \varepsilon^3: & \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь Δ — лапласиан. Условием существования решения системы является ортогональность правых частей уравнений решению $w_0(r)$ [2]. Например,

$$\int_0^1 (F_{11}(\lambda_0, w_0(r)) + F_{12}(\lambda_0, w_0(r)) \lambda_1) w_0(r) r dr = 0,$$

откуда определяем величину λ_1 , которая является первой поправкой к частоте. Явный вид операторов F_{ij} приводится ниже.

4. Собственные частоты колебаний круглой пластины переменной толщины. Рассмотрим круглую пластину переменной толщины, полагая модуль Юнга постоянным, $E(r) = 1$. Зависимость толщины пластины от радиуса считаем линейной, близкой к постоянной, полагая

$$h(r) = h_0 (1 + \varepsilon(r - a)),$$

где h_0 — невозмущенная толщина, ε — малый параметр. При выборе a рассмотрим два случая: 1) толщина меняется по закону $h(r) = h_0 (1 + \varepsilon r)$ ($h(0) = h_0$ и $a = 0$) и 2) изменение толщины задается так, что сохраняются объем и, следовательно, масса пластины. Во втором случае параметр a находится из условия

$$\int_0^1 \varepsilon(r - a)r \, dr d\varphi = 0 \Rightarrow a = \frac{2}{3}.$$

Будем рассматривать два вида граничных условий — заделанный край и свободно опертый край. В первом случае граничные условия имеют вид

$$w(1) = w'(1) = 0,$$

во втором —

$$w(1) = M(1) = 0, \quad M(r) = w''(r) + \nu \left(\frac{1}{r} w'(r) - \frac{m}{r^2} w(r) \right),$$

где $M(r)$ — изгибающий момент. Запишем общее решение уравнения нулевого приближения

$$w_0(r) = C_1 J_m(\lambda_0 r) + C_2 I_m(\lambda_0 r) + C_3 Y_m(\lambda_0 r) + C_4 K_m(\lambda_0 r),$$

где $J_m(r)$, $I_m(r)$, $Y_m(r)$, $K_m(r)$ — функции Бесселя и модифицированные функции Бесселя первого и второго рода, а C_1, C_2, C_3, C_4 — постоянные, определяемые из краевых условий. Поскольку функции $Y(r)$ и $K(r)$ имеют особенность в нуле, следует положить $C_3 = C_4 = 0$. Для условий жесткой заделки невозмущенная частота λ_0 находится из уравнения [2]

$$J_m(\lambda_0)I'_m(\lambda_0) - J'_m(\lambda_0)I_m(\lambda_0) = 0, \quad (8)$$

а для условия шарнирного опирания —

$$J_m(\lambda_0)I'_m(\lambda_0) - J'_m(\lambda_0)I_m(\lambda_0) - \frac{2\lambda_0}{1-\nu}J_m(\lambda_0)I_m(\lambda_0) = 0. \quad (9)$$

Формы колебаний в обоих случаях таковы:

$$w_0(r) = C(J_m(\lambda_0 r) + A I_m(\lambda_0 r)), \quad A = -J_m(\lambda_0) I_m(\lambda_0), \quad C = \text{const.}$$

Из частотных уравнений (8) и (9) определяются двухпараметрические семейства частот $\lambda_0^{m,n}$, где n — число волн в радиальном направлении. Операторы F_{11} и F_{12} в (7) задаются формулами

$$F_{12} = 4\lambda_0^3 w_0(r), \quad F_{11} = \sum_{i=0}^4 f_i w_0^{(i)}(r),$$

где

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{a(3m^4 - 12m^2 - \lambda_0^4 r^4) - 3m^4 r + 3m^2 r + \lambda_0^4 r^5}{r^4}, \\ f_1 &= \frac{3a(2m^2 + 1)}{r^3}, \quad f_2 = -\frac{3(2am^2 + a + r(-2m^2 + \nu + 1))}{r^2}, \\ f_3 &= \frac{6a}{r} - 12, \quad f_4 = 3(a - r). \end{aligned}$$

Отсюда получаем формулу для первой поправки к частоте

$$\lambda_1 = -\frac{I_{11}}{I_{12}}, \quad I_{1k} = \int_0^1 F_{1k} w_0(r) r dr, \quad k = 1, 2.$$

Интегралы I_{11} и I_{12} могут быть вычислены аналитически, однако формулы для определения λ_1 получаются громоздкими. В свою очередь, численное определение поправок в пакете Maple 2015 по указанным формулам не представляет большой сложности. В таблице 1 приведены низшие частоты $\lambda_0^{0,n}$ и поправки к ним, вычисленные при $\nu = 0.3$ для пластины с жестко заделанным краем.

На рис. 2, а изображена зависимость от параметра ε низших частот поперечных колебаний защемленной пластины, толщина которой меняется по закону $h(r) = h_0(1 + \varepsilon r)$. Здесь и далее сплошная линия соответствует частотам, вычисленным по асимптотической формуле (6), точечная линия — численным значениям частот, найденным с использованием пакета COMSOL Multiphysics 5.4. С увеличением толщины пластины растут ее жесткость и масса, однако влияние жесткости, зависящей от куба толщины, оказывается более существенным, что объясняет монотонный рост частоты с ростом ε . При малых значениях ε асимптотические значения близки к точным. Снижение частоты при существенном уменьшении толщины пластины к краю происходит заметно быстрее, чем по линейному закону.

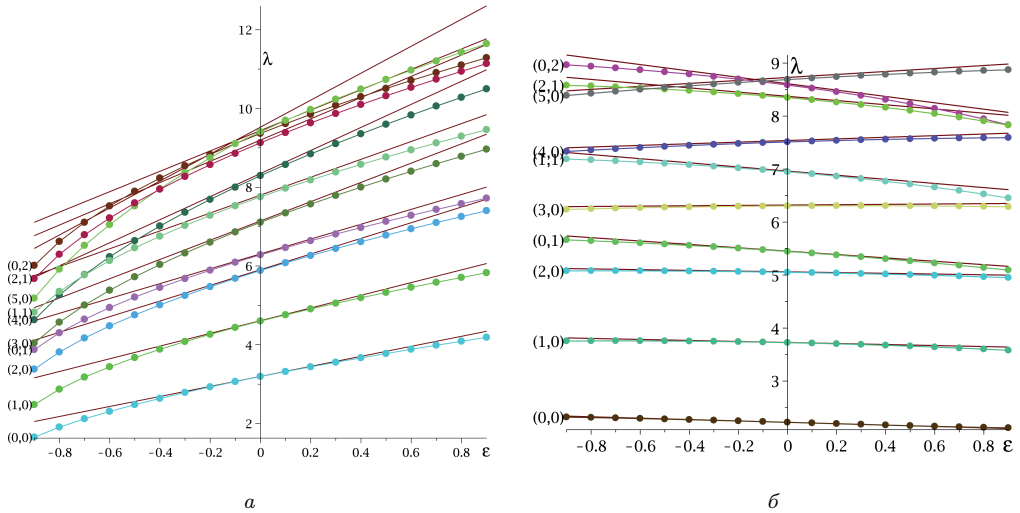


Рис. 2. Низшие частоты поперечных колебаний защемленной пластины с толщиной $h(r) = h_0(1 + \varepsilon r)$ (а) и шарнирно опертой пластины с толщиной $h(r) = h_0(1 + \varepsilon(r - 2/3))$ (б).

Таблица 1. Низшие частоты осесимметричных колебаний и поправки к ним

n	$\lambda_0^{0,n}$	$\lambda_1^{0,n}$	
		$a = 0$	$a = 2/3$
0	3.19622	1.27289	0.20749
1	6.30644	1.88521	-0.21694
2	9.43950	2.58903	-0.55747
3	12.57713	3.32796	-0.86441
4	15.71644	4.08319	-1.15562
5	18.85654	4.84731	-1.43820

Перейдем к случаю, когда масса пластины не меняется при линейном изменении ее толщины. На рис. 2, б изображена зависимость от параметра ε низших частот поперечных колебаний шарнирно опертой пластины, толщина которой меняется по закону $h(r) = h_0(1 + \varepsilon(r - 2/3))$. При сохранении массы пластины низшие частоты слабо зависят от изменения толщины. При различных граничных условиях разница в характере зависимостей низших частот от параметра ε невелика, однако при шарнирном опирании края пластины фундаментальная частота убывает с ростом ε , а при жесткой заделке — растет. С ростом волновых чисел m и n зависимость частот от изменения толщины усиливается, будучи близкой к линейной, и нарушается порядок следования частот, например, последовательность частот $\lambda^{2,1} < \lambda^{0,2} < \lambda^{5,0}$ при $\varepsilon = 0$ переходит в $\lambda^{5,0} < \lambda^{2,1} < \lambda^{0,2}$ при $\varepsilon = -0.6$.

5. Собственные частоты колебаний круглой пластины с переменным модулем Юнга. Рассмотрим круглую пластину постоянной толщины $h(r) = 1$. Зависимость модуля Юнга материала пластины от радиуса считаем линейной, близкой к постоянной, полагая

$$E(r) = E_0 (1 + \varepsilon(r - a)),$$

где E_0 — невозмущенный модуль Юнга, ε — малый параметр. При выборе a рассмотрим два случая: 1) $E(r) = E_0 (1 + \varepsilon r)$ ($a = 0$) и 2) такое изменение модуля Юнга,

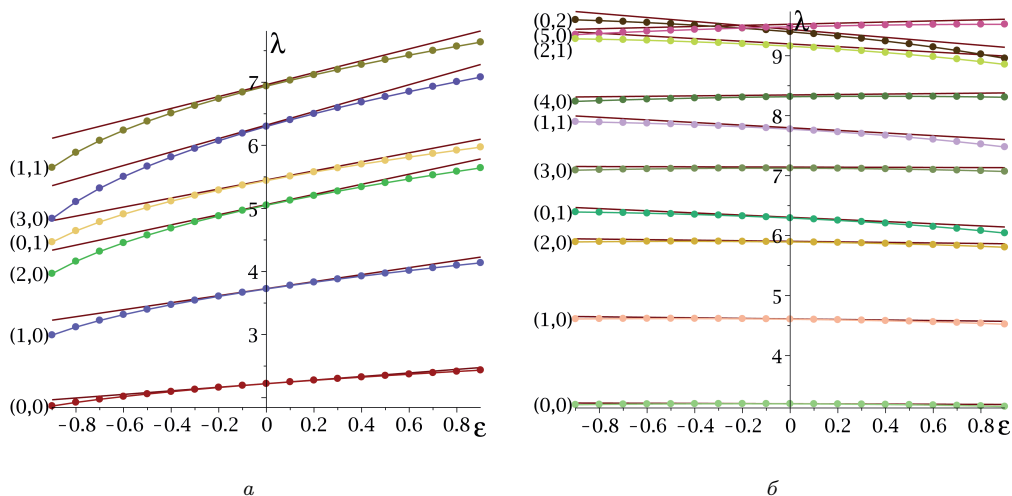


Рис. 3. Низшие частоты поперечных колебаний шарнирно опертой пластины с модулем Юнга $E(r) = E_0(1 + \varepsilon r)$ (а) и защемленной пластины при $E(r) = E_0(1 + \varepsilon(r - 2/3))$ (б).

что его среднее значение сохраняется, при этом условии $a = \frac{2}{3}$. Тогда операторы F_{11} и F_{12} в (7) задаются формулами

$$F_{12} = 4\lambda_0^3 w_0(r), \quad F_{11} = \sum_{i=0}^4 g_i w_0^{(i)}(r),$$

где

$$g_0 = \frac{m^2 (a(m^2 - 4) - m^2 r + r)}{r^4}, \quad g_1 = \frac{a(2m^2 + 1)}{r^3},$$

$$g_2 = -\frac{2am^2 + a - 2m^2 r + \nu r + r}{r^2}, \quad g_3 = \frac{2a}{r} - 4, \quad g_4 = a - r.$$

На рис. 3, а изображена зависимость от параметра ε низших частот поперечных колебаний шарнирно опертой пластины, модуль Юнга которой меняется по закону $E(r) = E_0(1 + \varepsilon r)$. С монотонным ростом модуля Юнга частоты предсказуемо растут. При значительном уменьшении ε убывание частот резко ускоряется, что связано с малой изгибной жесткостью пластины. Выбор граничных условий оказывает слабое влияние на характер поведения частот при изменении ε .

В заключение рассмотрим колебания пластины, сохраняющей среднее значение модуля Юнга ($a = 2/3$) (см. рис. 3, б). И в случае сохранения среднего значения модуля Юнга характер поведения кривых слабо зависит от граничных условий. Зависимость частот от ε близка к линейной даже при значениях параметра возмущения, близких по модулю к 1, причем низшие частоты почти постоянны. Для частот $\lambda^{m,0}$ поправка λ_1 растет с ростом m , для остальных частот $\lambda_1 < 0$ и поправка убывает с ростом волновых чисел.

6. Заключение. Полученные в работе асимптотические формулы позволяют найти хорошие приближения для собственных частот колебаний пластин в случае относительно небольшого линейного изменения параметров толщины и модуля Юнга. При этом при создании конструкции появляется возможность оценивать изменение низших частот при небольшой вариации геометрии или свойств материала

пластины и сохранении массы пластины. Представляет интерес изучение свойств спектра при малом нелинейном изменении параметров, например квадратичном или экспоненциальном, встречающемся в приложениях.

Литература

1. *Leissa A. W.* Vibration of plates. Washington: US Government Printing Office, 1969.
2. *Singh B., Chakraverty S.* Use of characteristic orthogonal polynomials in two dimensions for transverse vibration of elliptic and circular plates with variable thickness // *J. Sound Vibrat.* 1994. Vol. 173. Iss. 3. P. 289–299. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1994.1231>
3. *Singh B., Saxena V.* Transverse vibration of a circular plate with unidirectional quadratic thickness variation // *International Journal of Mechanical Sciences.* 1996. Vol. 38. Iss. 4. P. 423–430. [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(95\)00061-5](https://doi.org/10.1016/0020-7403(95)00061-5)
4. *Singh B., Hassan S. M.* Transverse vibration of a circular plate with arbitrary thickness variation // *Int. J. Mech. Sci.* 1998. Vol. 40, no. 11. P. 1089–1104.
5. *Wang X., Yang J., Xiao J.* On free vibration analysis of circular annular plates with non-uniform thickness by the differential quadrature method // *J. Sound Vibration.* 1995. Vol. 184. P. 547–551.
6. *Prasad C., Jain R. K., Soni S. R.* Axisymmetric vibrations of circular plates of linearly varying thickness // *ZAMP.* 1972. Vol. 23. P. 941–948.
7. *Eisenberger M., Jabareen M.* Axisymmetric vibrations of circular and annular plates with variable thickness // *International Journal of Structural Stability and Dynamics.* 2001. Vol. 1, no. 2. P. 195–206. <https://doi.org/10.1142/S0219455401000196>
8. *Salmane A., Lakis A. A.* Natural frequencies of transverse vibrations of non-uniform circular and annular plates // *J. Sound Vibration.* 1999. Vol. 220. P. 225–249.
9. *Singh B., Saxena V.* Axisymmetric vibration of a circular plate with exponential thickness variation // *J. Sound Vibration.* 1996. Vol. 192. P. 35–42.
10. *Smirnov A. L.* Free vibrations of annular circular and elliptic plates // *COMPADYN Proceedings.* 2019. Vol. 2. P. 3547–3555.
11. *Smirnov A., Lebedev A.* Free vibrations of perforated thin plates // *The International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics.* 2014. Vol. 1648. Art. no. 300009. (AIP Conference Proceeding.) <https://doi.org/10.1063/1.4912551>
12. *Анишкина Т. А., Ватульян А. О., Углич П. С.* Об определении переменной жесткости круглой пластины // *Вычислительные технологии.* 2012. Т. 17, № 6. С. 26–35.
13. *Bauer S. M., Filippov S. B., Smirnov A. L., Tovstik P. E., Vaillancourt R.* Asymptotic methods in mechanics of solids. Basel: Birkhäuser, 2015.
14. *Laura P. A. A., Sonzogni V., Romanelli E.* Effect of Poisson's ratio on the fundamental frequency of transverse vibration and buckling load of circular plates with variable profile // *Appl. Acoustics.* 1996. Vol. 47. P. 263–273. [https://doi.org/10.1016/0003-682X\(95\)00053-C](https://doi.org/10.1016/0003-682X(95)00053-C)

Статья поступила в редакцию 21 февраля 2020 г.;
после доработки 18 марта 2020 г.;
рекомендована в печать 19 марта 2020 г.

Контактная информация:

Васильев Григорий Павлович — студент; vasiliev.gregory@gmail.com
Смирнов Андрей Леонидович — доц.; a.l.smirnov@spbu.ru

Free vibration frequencies of a circular thin plate with variable parameters

G. P. Vasiliev, A. L. Smirnov

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Vasiliev G. P., Smirnov A. L. Free vibration frequencies of a circular thin plate with variable parameters. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2020, vol. 7 (65), issue 3, pp. 518–526. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.314> (In Russian)

Transverse vibrations of an inhomogeneous circular thin plate are studied in the paper. Non-dimensional equations based on Kirchhoff–Love hypotheses describing nonaxisymmetric

vibrations of inhomogeneous plate are derived. Using the perturbation method, asymptotic formulas are obtained for the free vibration frequencies of a plate, whose thickness and Young's modulus linearly depend on the radial coordinate. The influence of the plate edge conditions on the frequencies and the behavior of frequencies for a plate with the fixed mass are analyzed. For the lower free vibration frequencies the results of asymptotic and finite elements analyses are compared.

Keywords: free vibrations of plates, inhomogeneous circular plate, perturbation method.

References

1. Leissa A. W., *Vibration of plates* (US Government Printing Office, Washington, 1969).
2. Singh B., Chakraverty S., "Use of characteristic orthogonal polynomials in two dimensions for transverse vibration of elliptic and circular plates with variable thickness", *J. Sound Vibrat.* **173**(3), 289–299 (1994). <https://doi.org/10.1006/jsvi.1994.1231>
3. Singh B., Saxena V., "Transverse vibration of a circular plate with unidirectional quadratic thickness variation", *Int. J. Mech. Sci.* **38**(4), 423–430 (1996). [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(95\)00061-5](https://doi.org/10.1016/0020-7403(95)00061-5)
4. Singh B., Hassan S. M., "Transverse vibrations of a circular plate with arbitrary thickness variation", *Int. J. Mech. Sci.* **40**(11), 1089–1104 (1998).
5. Wang X., Yang J., Xiao J., "On free vibration analysis of circular annular plates with non-uniform thickness by the differential quadrature method", *J. Sound Vibration* **184**, 547–551 (1995).
6. Prasad C., Jain R. K., Soni S. R., "Axisymmetric vibrations of circular plates of linearly varying thickness", *ZAMP* **23**, 941–948 (1972).
7. Eisenberger M., Jabareen M., "Axisymmetric vibrations of circular and annular plates with variable thickness", *International Journal of Structural Stability and Dynamics* **1**(2), 195–206 (2001). <https://doi.org/10.1142/S0219455401000196>
8. Salmene A., Lakis A. A., "Natural frequencies of transverse vibrations of non-uniform circular and annular plates", *J. Sound Vibration* **220**, 225–249 (1999).
9. Singh B., Saxena V., "Axisymmetric vibration of a circular plate with exponential thickness variation", *J. Sound Vibration* **196**, 35–42 (1996).
10. Smirnov A. L., "Free vibrations of annular circular and elliptic plates", *COMPADYN Proceedings* **2**, 3547–3555 (2019).
11. Smirnov A., Lebedev A., "Free vibrations of perforated thin plates", *The International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics* **1648**, 300009 (AIP Conference Proceeding, 2014). <https://doi.org/10.1063/1.4912551>
12. Anikina T. A., Vatulyan A. O., Uglich P. S., "On the calculation of variable stiffness for a circular plate", *Computational Technologies* **17**(6), 26–35 (2012). (In Russian)
13. Bauer S. M., Filippov S. B., Smirnov A. L., Tovstik P. E., Vaillancourt R., *Asymptotic methods in mechanics of solids* (Birkhäuser, Basel, 2015).
14. Laura P. A. A., Sonzogni V., Romanelli E., "Effect of Poisson's ratio on the fundamental frequency of transverse vibration and buckling load of circular plates with variable profile", *Appl. Acoustics* **47**, 263–273 (1996). [https://doi.org/10.1016/0003-682X\(95\)00053-C](https://doi.org/10.1016/0003-682X(95)00053-C)

Received: February 21, 2020

Revised: March 18, 2020

Accepted: March 19, 2020

Authors' information:

Grigory P. Vasiliev — vasiliev.gregory@gmail.com

Andrey L. Smirnov — a.l.smirnov@spbu.ru