УДК 519.112.1 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 3 (61). 2016. Вып. 2

О ВОЗМОЖНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ РАЗМЕРНОСТЕЙ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ ПОДПРОСТРАНСТВ

Н. А. Лебединская, Д. М. Лебединский

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

Рассматривается задача о размерностях, которые могут иметь пересечения подпространства в прямой сумме конечного числа конечномерных векторных пространств с попарными суммами прямых слагаемых при условии, что подпространство пересекается с этими прямыми слагаемыми по нулю. Задача естественным образом распадается на две: об условиях существования соответствующего матроида и о его представимости. В работе приводятся необходимые и достаточные условия существования матроида с заданными рангами некоторых подмножеств базового множества. Приводятся необходимые условия существования матроида, базовое множество которого состоит из конечного числа конечных попарно не пересекающихся подмножеств полного ранга с заданными рангами их попарных объединений. Приводится также простое графическое представление этих условий. Эти же условия являются необходимыми для существования указанного подпространства. В конце работы формулируется гипотеза о том, что эти условия являются и достаточными для существования матроида. Библиогр. 4 назв. Ил. 3.

Ключевые слова: прямая сумма, подпространство, матроид.

1. Введение. Пусть у нас есть набор конечномерных векторных пространств $A_1, \ldots, A_N$, и пусть есть подпространство $V \subset A_1 \oplus \ldots \oplus A_N$, $V \cap A_i = \{0\}$ для всех i. Данная работа посвящена задаче определения размерностей, которые могут иметь пересечения $V \cap A_i \oplus A_j$.

Пусть $a_i = \dim A_i$ и $B_i = \{e_{i1}, \ldots, e_{ia_i}\}$ — базис A_i, а $\bar{e}_{ij}$ — образы e_{ij} в фактор-пространстве $A_1 \oplus \ldots \oplus A_N / V$. Теперь задание размерностей $a_{ij} = \dim V \cap A_i \oplus A_j$ эквивалентно заданию размерностей b_{ij} линейных оболочек для множеств $\{\bar{e}_{im}, \bar{e}_{jn}\}$, где $m = 1, \ldots, a_i$ и $n = 1, \ldots, a_j$. Таким образом, если мы рассмотрим матроид [1] на множестве $\bar{B} = \{\bar{e}_{ij}\}$, будем иметь $r(\{\bar{e}_{i1}, \ldots, \bar{e}_{ia_i}\}) = a_i$ и $r(\{\bar{e}_{i1}, \ldots, \bar{e}_{ia_i}, \bar{e}_{j1}, \ldots, \bar{e}_{ja_j}\}) = b_{ij} = a_i + a_j - a_{ij}$.

Таким образом, задача распадается на две части: во-первых, нужно выяснить, для каких значений a_i и a_{ij} найдется матроид с указанными выше значениями рангов, во-вторых, определить, какие из этих матроидов будут реализуемы.

В данной работе приводятся необходимые условия для первой части этой задачи, которые очевидным образом будут необходимыми условиями и для всей задачи в целом.

2. Условия доопределения матроидов. Одно из эквивалентных определений матроида позволяет определять его при помощи задания рангов всех подмножеств базового множества [2]. В этом разделе обсуждается вопрос о том, при каких условиях задание рангов только для некоторых подмножеств может быть продолжено на все подмножества базового множества так, чтобы в итоге получился матроид.

Пусть у нас есть конечное базовое множество $\bar{B}$ и некоторое подмножество $S \in 2^{\bar{B}}$ множества его подмножеств. Пусть также имеется отображение $r : S \to \mathbb{N}_0$, сопостав-

 DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.203

ляющее каждому подмножеству $A \in S$ базового множества $\bar{B}$ неотрицательное целое число. В этой ситуации мы будем говорить, что заданы ранги $(r(A))$ некоторых (принадлежащих S) из его подмножеств (A).

Задача теперь состоит в том, чтобы сформулировать необходимые и достаточные условия, при которых отображение r можно продолжить на все множество $2^{\bar{B}}$ так, чтобы оно определяло значения рангов (всех) подмножеств $\bar{B}$, задавая структуру матроида на последнем множестве.

Под *очевидным неравенством* будем понимать неравенство вида $r(b_1) + \ldots + r(b_n) \geq r(b_1) + \ldots + r(b_n)$, где $b_i \subset \bar{B}$. Слово «очевидное» в данном месте используется не для указания на простоту доказательства истинности такого вида неравенства (что и в самом деле так), а как термин, означающий определенный класс неравенств среди всех неравенств на суммы нескольких слагаемых вида $r(A)$ в обеих частях, где A — подмножество базового множества.

Под *одним шагом преобразования неравенства* будем понимать одно из следующих преобразований:

а) замена одного из подмножеств (обозначим его A) в левой части неравенства на большее ($B \supset A$);

б) замена одного из подмножеств (обозначим его A) в правой части неравенства на меньшее ($B \subset A$);

в) замена двух из подмножеств в правой части неравенства (обозначим их A и B) на их объединение ($A \cup B$) и пересечение ($A \cap B$), т. е. фрагмент правой части неравенства $\ldots + r(A) + \ldots + r(B) + \ldots$ заменяется на фрагмент $\ldots + r(A \cup B) + \ldots + r(A \cap B) + \ldots$, а фрагменты, обозначенные здесь многоточиями, сохраняют свой первоначальный вид.

Под *модифицированным неравенством* будем понимать результат применения нескольких шагов преобразования к очевидному неравенству. Под *допустимым неравенством* будем понимать такое модифицированное неравенство, ранги всех подмножеств которого заданы, т. е. все подмножества которого лежат в S.

Теорема 1. *Для того чтобы базовое множество $\bar{B}$ с указанием рангов его подмножеств, лежащих в S, можно было доопределить до матроида при помощи отображения r, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись все допустимые неравенства.*

Доказательство. Необходимость очевидным образом следует из определения матроида.

Для доказательства достаточности покажем, что если выполняются все допустимые неравенства, мы всегда можем доопределить ранг одного из тех подмножеств, для которых он еще не определен, с сохранением выполнения всех допустимых неравенств. Поскольку общее число всех подмножеств базового множества конечно, по одному определяя ранг тех множеств, для которых он еще не определен, мы рано или поздно определим его для всех подмножеств. Тогда заключение теоремы в части достаточности будет следовать из того факта, что свойства ранга, нужные для определения матроида, сами являются допустимыми неравенствами.

Итак, пусть b обозначает подмножество, ранг которого еще не определен, т. е. такое, которое не лежит в S. Рассмотрим все модифицированные неравенства, в которых встречаются только подмножества с известными рангами и b, и ранг b стоит в левой части. Очевидно, каждое из таких неравенств определяет некоторую нижнюю границу для ранга b.

Определим ранг b как максимальное значение всех таких нижних границ. Очевидно, после этого все допустимые неравенства (которые теперь могут содержать ранг b), в которых ранг b стоит в левой части, будут выполнены.

Докажем, что все допустимые неравенства, в которых ранг b стоит в правой части, тоже выполняются. Пусть

$$r(x_1) + \ldots + r(x_n) \geq r(b) + r(y_1) + \ldots + r(y_{n-1}) \tag{1}$$

— одно из таких неравенств. Пусть также

$$r(c_1) + \ldots + r(c_{m-1}) + r(b) \geq r(d_1) + \ldots + r(d_m) \tag{2}$$

— то неравенство, которое дает максимальную нижнюю грань для $r(b)$, и, следовательно, на самом деле является равенством по определению $r(b)$. Если выразить из этого равенства $r(b)$, подставить результат в то неравенство, которое нам надо доказать, и перенести некоторые слагаемые в другую часть так, чтобы все коэффициенты стали положительны, мы получим

$$r(x_1)+\ldots+r(x_n)+r(c_1)+\ldots+r(c_{m-1}) \geq r(d_1)+\ldots+r(d_m)+r(y_1)+\ldots+r(y_{n-1}). \tag{3}$$

Осталось лишь показать, что это неравенство является допустимым (без $r(b)$). Тот факт, что ранги всех входящих в него подмножеств известны, следует из допустимости неравенств (1) и (2). Чтобы доказать, что (3) является модифицированным неравенством, начнем с очевидного неравенства

$$r(x_1) + \ldots + r(x_n) + r(c_1) + \ldots + r(c_{m-1}) \geq r(x_1) + \ldots + r(x_n) + r(c_1) + \ldots + r(c_{m-1}),$$

преобразуем его в

$$r(x_1)+\ldots+r(x_n)+r(c_1)+\ldots+r(c_{m-1}) \geq r(b)+r(y_1)+\ldots+r(y_{n-1})+r(c_1)+\ldots+r(c_{m-1})$$

и затем в

$$r(x_1) + \ldots + r(x_n) + r(c_1) + \ldots + r(c_{m-1}) \geq r(y_1) + \ldots + r(y_{n-1}) + r(d_1) + \ldots + r(d_m),$$

что и требовалось.

3. Необходимые условия для размерностей пересечений. Для формулировки указанных необходимых условий нам потребуется ввести несколько дополнительных понятий. Обозначим $\bar{B}_i = \{\bar{e}_{i1}, \ldots, \bar{e}_{ia_i}\}$.

Для дальнейшего изложения будем рассматривать ориентированные графы на множестве $\{1, \ldots, N\}$. Каждая дуга такого графа будет помечена символом $+$ или $-$. Под содержимым дуги $i \to j$ будем понимать $b_{ij} - a_j$, а под содержимым графа — сумму содержимых составляющих его дуг со знаками, стоящими на этих дугах. Под неравенством такого графа понимается неравенство, накладываемое на его содержимое, которое должно быть не меньше нуля.

Под *неравенствами первого типа* понимаются неравенства отдельных дуг, т. е. неравенства вида $b_{ij} \geq a_j$ (рис. 1). Соответствующими им неравенствами для рангов будут $r(\bar{B}_i \cup \bar{B}_j) \geq r(\bar{B}_j)$.

Под *неравенствами второго типа* понимаются неравенства графов, состоящих из трех дуг (две дуги составляют путь и помечены $+$, и еще одна дуга из начала этого

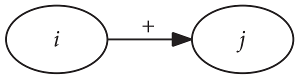

Рис. 1. Пример графа для неравенств первого типа.

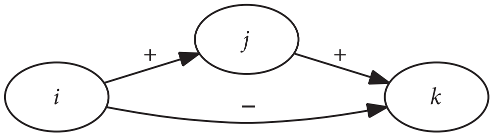

Рис. 2. Пример графа для неравенств второго типа.

пути в конец помечена знаком $-$), т. е. неравенства вида $b_{ij} + b_{jk} \geq a_j + b_{ik}$ (рис. 2). Соответствующими им неравенствами для рангов будут $r(\bar{B}_i \cup \bar{B}_j) + r(\bar{B}_j \cup \bar{B}_k) \geq r(\bar{B}_j) + r(\bar{B}_i \cup \bar{B}_k)$.

Наконец, *неравенства третьего типа* соответствуют графам следующего вида: несколько (три и более) дуг составляют путь и помечены $+$, на одну меньше дуг соединяют вершины этого пути через одну и помечены $-$, и еще на одну меньше дуг соединяют вершины этого пути через две и помечены $+$ (рис. 3).

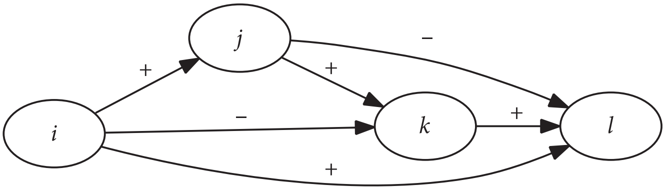

Рис. 3. Пример графа для неравенств третьего типа.

Чтобы выписать эти неравенства через ранги множеств, введем ряд обозначений. Пусть $4 \leq n \leq N$. Пусть также $t_1, \ldots, t_n$ — различные целые числа от 1 до N. Для краткости обозначим $C_i = \bar{B}_{t_i}$ и $C_{ij} = \bar{B}_{t_i} \cup \bar{B}_{t_j}$. Под *неравенствами третьего типа* будем понимать неравенства вида

$$\sum_{i=1}^{n-1} r(C_{i,i+1}) + \sum_{i=1}^{n-3} r(C_{i,i+3}) \geq r(C_2) + \sum_{i=4}^{n} r(C_i) + \sum_{i=1}^{n-2} r(C_{i,i+2}). \qquad (4)$$

Теорема 2. *Неравенства первого, второго и третьего типов являются необходимыми условиями существования матроида на множестве $\bar{B}$ с указанными во введении рангами подмножеств $\bar{B}_i$ и $\bar{B}_i \cup \bar{B}_j$.*

Доказательство. Неравенства первого типа для такого матроида совершенно очевидны. Неравенства второго типа допустимы (достаточно заменить пару множеств из левой части на их пересечение и объединение, а затем заменить $\bar{B}_i \cup \bar{B}_j \cup \bar{B}_k$ на $\bar{B}_i \cup \bar{B}_k$), и, следовательно, должны выполняться.

Для того чтобы убедиться в допустимости неравенств третьего типа, надо проделать следующие действия.

1) Начиная с очевидного неравенства, определяемого левой частью доказываемого неравенства, в его правой части заменить пары множеств C_{12} и C_{23}, а также $C_{i,i+3}$ и $C_{i+2,i+3}$ для $i = 1, \ldots, n-3$ на их пересечения и объединения. Такая замена даст нам в качестве пересечений множества C_2 и C_i для $i = 4, \ldots, n$, а в качестве объединений — C_{123} и $C_{i,i+2,i+3}$ для $i = 1, \ldots, n-3$ (здесь мы обозначаем $C_{ijk} = \bar{B}_{t_i} \cup \bar{B}_{t_j} \cup \bar{B}_{t_k}$).

2) Для того чтобы окончательно получить доказываемое неравенство, нужно теперь заменить C_{123} и C_{134} на их объединение и пересечение, которое даст нам C_{13}, а объединение (C_{1234}) заменить на объединение и пересечение в паре с C_{245}. Пересечение опять даст нам следующее интересующее нас множество C_{24}, объединение мы опять заменяем на объединение и пересечение со следующим множеством C_{356} и т. д. И, наконец, нужно заменить окончательное объединение $C_{123\ldots n}$ на $C_{n-2,n}$.

Рассматривая упомянутые в данной теореме неравенства, можно было бы построить неравенства «четвертого» типа, добавляя к графам неравенств третьего типа дуги через три вершины со знаком $-$. Однако такие неравенства уже не являются необходимыми условиями доопределимости до матроида. Наименьший по числу прямых слагаемых контрпример, известный авторам (для простейшего из неравенств «четвертого» типа на пяти вершинах) имеет 5 прямых слагаемых размерностей 1, 0, 1, 2, 1 и пространство V размерности 3, имеющее расположение общего вида по отношению к прямым слагаемым.

Гипотеза. *Вышеупомянутые неравенства первого, второго и третьего типов являются на самом деле и достаточными условиями существования искомого матроида, т. е. всякое допустимое неравенство на самом деле является суммой нескольких неравенств такого вида.*

Данная гипотеза проверена для трех и четырех прямых слагаемых при помощи вычислений с использованием набора программ 4ti2 [3]. Для пяти прямых слагаемых проверяется в настоящее время.

Используемые в статье рисунки сделаны с использованием программы dot из пакета graphviz [4].

Литература

1. *Oxley J. G.* What is a matroid? // Cubo. 2003. Vol. 5. P. 179–218.
2. *Shikare M. M., Waphare B. N.* Combinatorial Optimization. Narosa Publishing House, 2004.
3. 4ti2 team. 4ti2 — A software package for algebraic, geometric and combinatorial problems on linear spaces. Available at www.4ti2.de.
4. *Ellson J., Gansner E., Koutsofios L., North S., Woodhull G.* Short Description and Lucent Technologies Graphviz — open source graph drawing tools // Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, 2001. P. 483–484.

Статья поступила в редакцию 7 сентября 2015 г.

Сведения об авторах

Лебединская Наталия Александровна — кандидат физико-математических наук, доцент; n.lebedinskaya@spbu.ru

Лебединский Дмитрий Михайлович — кандидат физико-математических наук, доцент; d.lebedinsky@spbu.ru

ON POSSIBLE DIMENSIONS OF SUBSPACE INTERSECTIONS

Natalia A. Lebedinskaya, Dmitrii M. Lebedinskii

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; n.lebedinskaya@spbu.ru, d.lebedinsky@spbu.ru

We consider the problem concerning the dimensions of the intersections of a subspace in the direct sum of a finite series of finite-dimensional vector spaces with the sums of pairs of direct summands, provided that the subspace intersection with each of these direct summands is zero. The problem is naturally divided in two: Find conditions for the existence and for the representability of the corresponding matroid. In the paper, we give necessary and sufficient conditions of the existence of a matroid if some ranks of subsets of the base set are known. Using these conditions, we also present necessary conditions of the existence of a matroid with base set composed of a finite series of disjoint sets of full rank and the ranks of their pairwise unions are given. A simple graphical representation of the latter conditions is given as well. These conditions are also necessary for the subspace to exist. At the end of the paper, we state a conjecture that these conditions are sufficient as well. Refs 4. Figs 3.

Keywords: direct sum, subspace, matroid.

References

1. Oxley J. G., "What is a matroid?", *Cubo* **5**, 179–218 (2003).

2. Shikare M. M., Waphare B. N., *Combinatorial Optimization* (Narosa Publishing House, 2004).

3. 4ti2 team. 4ti2 — A software package for algebraic, geometric and combinatorial problems on linear spaces. Available at: www.4ti2.de.

4. Ellson J., Gansner E., Koutsofios L., North S., Woodhull G., "Short Description and Lucent Technologies Graphviz — open source graph drawing tools", *Lecture Notes in Computer Science*, 483–484 (Springer-Verlag, 2001).