УДК 514.172 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 3 (61). 2016. Вып. 2

СИМПЛЕКСЫ В НОРМИРОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. В. Макеев

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

Можно ли произвольное множество из $n+1$ точки пространства R^n изометрически вложить в произвольное n-мерное вещественное нормированное пространство?

При $n \geq 3$ ответ автору не известен. При $n = 2$ положительный ответ очевиден. При $n = 3$ задача сведена к случаю, когда 4 точки лежат в плоскости. Некоторая редукция дана для произвольного n. Библиогр. 4 назв.

Ключевые слова: симплекс, нормированное пространство.

Из знаменитой теоремы Дворецкого [1] легко вывести, что множество вершин любого евклидова симплекса можно изометрически вложить в вещественное нормированное пространство достаточно высокой размерности.

Везде далее под нормированным пространством понимаем вещественное нормированное пространство. Верно ли, что множество вершин любого евклидова тетраэдра можно изометрически вложить во всякое трехмерное нормированное пространство? В [2] доказано, что во всякое трехмерное нормированное пространство можно изометрически вложить множество вершин любого правильного евклидова тетраэдра.

Для евклидова тетраэдра $ABCD$ рассмотрим два плоских евклидовых четырехугольника, расположив треугольники ABC и ABD в одной плоскости с общей стороной AB, причем в первом случае вершины C и D расположены в одной полуплоскости относительно прямой AB, во втором случае — в разных полуплоскостях.

Теорема 1. *Если множества вершин описанных четырехугольников можно изометрически вложить в заданное нормированное пространство, в него можно изометрически вложить множество вершин тетраэдра $ABCD$.*

Доказательство. Нам понадобится следующая простая лемма (см. [3]).

Лемма 1. *Пусть точки A и B из двумерного нормированного пространства со строго выпуклым кругом таковы, что $|AB| = c$. Найдутся ровно две такие точки C, лежащие в разных полуплоскостях относительно прямой AB и непрерывно зависящие от A, B, что $|AC| = b$ и $|BC| = a$, где a, b и c — длины сторон некоторого евклидова треугольника.*

Теорему 1 достаточно доказать для нормированного пространства со строго выпуклым шаром, что мы и предполагаем в дальнейшем. В остальных случаях теорема доказывается с помощью предельного перехода.

Пусть $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ — изометричные образы вышеописанных четырехугольников. Заметим, что длины ребер C_1D_1 и C_2D_2 соответственно есть нижняя и верхняя грани длин ребра CD евклидовых тетраэдров с заданными гранями ABC и ABD. Непрерывно продеформируем первую упорядоченную четверку точек во вторую, сохраняя все расстояния между точками, кроме C_1D_1. Для этого A_1B_1 с сохранением длины продеформируем в A_2B_2, а также двугранный угол, образованный плоскостями треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_1B_1D_1$ продеформируем в угол для четверки

 DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.204

точек $A_2B_2C_2D_2$, реализуя согласно лемме 1 треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_1B_1D_1$ в соответствующих гранях углов. По соображениям непрерывности в некоторый момент мы получим требуемое вложение вершин тетраэдра $ABCD$. Теорема 1 доказана.

Следствие. *В нормированное пространство можно изометрически вложить любую четверку точек трехмерного евклидова пространства тогда и только тогда, когда в него можно изометрически вложить любую четверку точек двумерной евклидовой плоскости.*

Замечание. Использованные при доказательстве теоремы соображения непрерывности показывают следующее. Пусть для двух вложений $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ вершин тетраэдра $ABCD$ в нормированное пространство с сохранением длин всех ребер, кроме CD, выполняется неравенство $|C_1D_1| < |C_2D_2|$. Найдется такое вложение вершин тетраэдра $ABCD$ в это нормированное пространство с сохранением длин всех ребер, кроме CD, что $|CD|$ будет иметь любое наперед заданное значение из $[|C_1D_1|, |C_2D_2|]$.

Рассмотрим тавтологическое k-мерное векторное расслоение $\gamma_k^n : E_k(R^n) \to G_k(R^n)$ над многообразием Грассмана $G_k(R^n)$ проходящих через ноль k-плоскостей в R^n, где слоем над плоскостью является она же, рассматриваемая как k-мерное векторное пространство.

Под *асферичностью* нормированного пространства понимаем нижнюю грань таких положительных ε, что шар этого пространства содержит некоторый евклидов шар и содержится в гомотетичном ему шаре с тем же центром и коэффициентом гомотетии $1 + \varepsilon$ (считаем, что в пространстве задана некоторая евклидова структура).

В [3] доказано, что при некотором положительном ε и при произвольном n в слоях расслоения $\gamma_3^n : E_3(R^n) \to G_3(R^n)$ можно так задать непрерывно зависящие от слоя нормы, что асферичность шаров в слоях будет не менее ε.

Однако верно следующее утверждение.

Теорема 2. *Для любого тетраэдра T в R^3 существует такое N, что при $n > N$ для всякого непрерывного поля норм в слоях расслоения γ_3^n множество вершин T можно изометрически вложить в некоторый слой расслоения.*

Доказательство. Далее мы считаем шары во всех нормированных пространствах строго выпуклыми. В остальных случаях доказательство получается предельным переходом.

Для тетраэдра $ABCD$ (в силу леммы 1) всякое изометрическое вложение пары вершин A и B в двумерное нормированное пространство со строго выпуклым кругом двумя способами продолжается до вложения всех его вершин с сохранением длин его ребер, кроме ребра CD. В первом случае точки C и D расположены по одну сторону относительно прямой AB, а во втором — по разные (как в теореме 1).

Лемма 2. *Для заданного тетраэдра $ABCD$ и числа $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при двух вышеуказанных вложениях его вершин в двумерное нормированное пространство со строго выпуклым кругом и асферичностью менее δ длина отрезка CD отличается менее, чем на ε от его длины при аналогичных вложениях в евклидову плоскость.*

Доказательство. Действительно, в противном случае, совершив предельный переход при $\delta \to 0$, можно построить более двух вложений вышеуказанного типа вершин тетраэдра в евклидову плоскость, чего не может быть.

Завершим доказательство теоремы 2. Рассмотрим в пространстве R^{n+1} с непрерывным полем норм в расслоении γ_3^{n+1} одномерное подпространство l. Ортогональные l двумерные подпространства образуют многообразие Грассмана $G_2(R^n)$ в ортогональном дополнении l. Определив во всяком L из $G_2(R^n)$ индуцированную из $l+L$ норму, мы получаем непрерывное поле норм в расслоении γ_2^n.

Для тетраэдра $T = ABCD$ рассмотрим два евклидовых четырехугольника из условия теоремы 1 и обозначим через m и M длины отрезков CD для них соответственно (считаем $m < M$). Пусть $\varepsilon > 0$ таково, что длина ребра CD исходного тетраэдра T принадлежит отрезку $[m+\varepsilon, M-\varepsilon]$. Согласно лемме 2 существует такое $\delta > 0$, что при двух вышеуказанных в условиях леммы 2 вложениях его вершин в двумерное нормированное пространство L, асферичность круга которого менее δ, длины отрезков CD отличаются менее, чем на ε от их длин m и M при аналогичных вложениях в евклидову плоскость.

Как известно [4, § 4], для любого $\delta > 0$ существует такое N, что при $n > N$ для всякого непрерывного поля норм в расслоении γ_2^n найдется слой L, асферичность круга которого менее δ. Теперь для завершения доказательства теоремы 2 достаточно к нормированному пространству $l+L$ — слою расслоения γ_3^n — применить заключение замечания к лемме 1.

Замечание. Автору не известно, можно ли всякую четверку точек евклидовой плоскости изометрически вложить в произвольное бесконечномерное нормированное пространство.

Верно ли, что любое $(n+1)$-элементное подмножество евклидова пространства R^n можно изометрически вложить во всякое n-мерное нормированное пространство? Ясно, что достаточно это проверить для $n+1$ точки в общем положении.

Теорема 3. *Для всякого n-мерного нормированного пространства E выполняется одно из следующих двух утверждений.*

1. В E можно изометрически вложить множество вершин заданного n-мерного симплекса T.

2. При всякой непрерывной деформации нормы в E в евклидову в некоторый момент в E найдется собственное подпространство, в которое можно изометрически вложить множество вершин заданного n-мерного симплекса T.

Доказательство. Рассмотрим всюду плотное множество гладких деформаций E_t $(0 \leq t \leq 1)$ гладкого строго выпуклого шара нормированного пространства в евклидово, что мы и предполагаем в дальнейшем. В остальных случаях теорема доказывается посредством предельного перехода.

Обозначим через $A_0, \ldots, A_n$ вершины заданного n-мерного симплекса T. Рассмотрим в пространстве $\{E_t^{n+1} | 0 \leq t \leq 1\}$ множество упорядоченных наборов точек $B_0, \ldots, B_n$, где $B_0 = 0$, изометричных набору вершин T (совпадают расстояния между точками с равными номерами). Если среди них имеется набор точек не в общем положении, выполняется второе утверждение теоремы; это же утверждение выполнено и для непрерывных деформаций, что доказывается с помощью предельного перехода.

В противном случае обозначим через M ту часть рассматриваемых наборов точек, для которых базис $B_0B_1, \ldots, B_0B_n$ положительно ориентирован. Очевидно, что M-компактное подмножество некомпактного многообразия N всевозможных таких наборов точек $C_0, \ldots, C_n$ в общем положении из $\{E_t^{n+1} | 0 \leq t \leq 1\}$, что базис

$C_0C_1, \ldots, C_0C_n$ положительно ориентирован. В общем положении M является гладким подмногообразием N коразмерности $n(n+1)/2$ с краем в E_0^{n+1} и E_1^{n+1}.

Так как метрика в E_1 евклидова, край M в E_1^{n+1} диффеоморфен группе сохраняющих ориентацию поворотов $SO(n)$ и реализует образующую нетривиальной группы гомологий конфигурационного пространства старшей размерности. Следовательно и гомологичный ему край M в E_0^{n+1} не пуст, и выполняется первое утверждение теоремы. Теорема доказана.

Следствие. *Для всякого n-мерного нормированного пространства E выполняется одно из следующих двух утверждений.*

1. В E можно изометрически вложить множество вершин заданного n-мерного симплекса T.

2. В нормированном пространстве той же размерности и с меньшей асферичностью найдется собственное подпространство, в которое можно изометрически вложить множество вершин заданного n-мерного симплекса.

Доказательство. Если первое утверждение не выполняется, применим второе утверждение теоремы 3 к деформации нормы, индуцированной линейной деформацией ее единичного шара K вида $(1-t)K + tD$, где D — евклидов шар, а $0 \leq t \leq 1$.

Литература

1. *Dvoretzky A.* Some results on convex bodies and Banach spaces // Proc. Internat. Sympos. Linear Spaces. Jerusalem, 1960; Pergamon, Oxford, 1961.
2. *Petty C.* Equilateral sets in Minkovski spaces // Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 29, N 2. 1971. P. 369–374.
3. *Burago Y. D., Ivanov S. V., Tabachnikov S. L.* Topological aspects of Dvoretzky Theorem // J. of Topology and Analysis. 2010. Vol. 02, N 04. P. 453–467.
4. *Макеев В. В.* Плоские сечения выпуклых тел и универсальные расслоения // Зап. научн. семинаров ПОМИ. 2001. Т. 280. С. 219–233.

Статья поступила в редакцию 20 октября 2015 г.

Сведения об авторе

Макеев Владимир Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор; mvv57@inbox.ru

SIMPLEXES IN NORMED SPACE

Vladimir V. Makeev

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; mvv57@inbox.ru

Is it true that, every subset of $n+1$ points in R^n may be isomerticaly embedded in every n-dimensional real normed space. Answer is unknown to author for $n \geq 3$. For $n = 2$ positive answer is evident. For $n = 3$ the problem is reduced to the case, when 4 points are in plane. Some reduction is made for every given n. Refs 4.

Keywords: simplex, normed space.

References

1. Dvoretzky A., “Some results on convex bodies and Banach spaces”, *Proc. Internat. Sympos. Linear Spaces* (Jerusalem, 1960; Pergamon, Oxford, 1961).
2. Petty C., “Equilateral sets in Minkovski spaces”, *Proc. Amer. Math. Soc.* **27**(2), 369–374 (1971).
3. Burago Y. D., Ivanov S. V., Tabachnikov S. L., “Topological aspects of Dvoretzky Theorem”, *J. of Topology and Analysis* **02**(04), 453–467 (2010).
4. Makeev V. V., “Planar sections of convex bodies and universal fibrations”, *Zapiski Nauchnyh Seminarov POMI* **280**, 219–233 (2001) [in Russian].