УДК 519.21 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 3 (61). 2016. Вып. 2

ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КОЛМОГОРОВА—ЧЕПМЕНА ДЛЯ МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА С МНОГОМЕРНЫМ ПРОСТРАНСТВОМ СОСТОЯНИЙ И НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Р. Н. Мирошин

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

Билинейное уравнение Колмогорова—Чепмена определяет динамическое поведение марковского процесса. Задача его непосредственного решения (не прибегая к линеаризации) поставлена С. Н. Бернштейном в 1932 г. и частично решена О. В. Сармановым в 1961 г. в виде билинейных рядов. В 2007–2010 гг. автор нашел несколько частных решений вышеупомянутого уравнения как в виде рядов типа рядов Сарманова, так и в виде интегралов. При этом предполагалось, что пространство состояний марковского процесса одномерное. В настоящей статье найдены три частных решения для марковского процесса с многомерным пространством состояний в виде интегралов. Результаты иллюстрируются пятью примерами, в одном из которых показано, что среди решений исходного уравнения есть решение, не имеющее вероятностного смысла. Библиогр. 8 назв.

Ключевые слова: марковский процесс с многомерным пространством состояний, частные решения уравнения Колмогорова—Чепмена, вероятность перехода, функциональные уравнения.

Билинейное интегральное уравнение Колмогорова—Чепмена определяет вероятность перехода траектории марковского случайного процесса из начального состояния в некоторый момент времени в окрестность любого доступного состояния в последующий момент времени. Литература, посвященная методам решения этого уравнения, воистину необозрима (см., например, энциклопедию [1]). Однако среди распространенных методов непосредственное (без обращения к линейным дифференциальным или интегро-дифференциальным уравнениям) решение в [1] даже не упоминается. К поиску таких прямых решений призывал еще С. Н. Бернштейн в 1932 г. на математическом конгрессе в Цюрихе [2, с. 247], но лишь в 1961 г. О. В. Сарманов опубликовал несколько частных решений для стационарных плотностей вероятности перехода в виде билинейных рядов по собственным функциям ядра интегрального оператора, порожденного марковским процессом [3]. Начиная с 2007 г., в серии работ [4, 5] автору удалось свести уравнение Колмогорова—Чепмена к функциональным уравнениям, решив которые, удалось найти еще несколько представлений плотности вероятности перехода как в виде билинейных рядов типа рядов О. В. Сарманова, так и в виде интегралов. Единственным существенным ограничением в работах [4, 5] было рассмотрение марковских процессов с одномерным пространством состояний. В данной статье это ограничение частично снимается. Используемый метод также применялся для вычисления многократных интегралов специального вида, встречающихся в задачах, связанных с выбросами гауссовских процессов [5].

Введем обозначения:

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{\Omega} \subset \mathbf{R}_n, \quad d\alpha = d\alpha_1 \cdots d\alpha_n, \quad \alpha_k \in \mathbf{R}_1, \quad k = 1, \dots, n,$$

где под α подразумевается любой из n-мерных векторов λ, x, y, z, встречающихся далее.

 DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.205

Рассмотрим марковский процесс с n-мерным пространством состояний и непрерывным временем. Как известно [1], такой процесс полностью характеризуется начальным распределением (в момент времени s) и плотностью вероятности перехода $\pi_{s\to t}(x\to y)$ траектории процесса из точки x в момент времени s в окрестность точки y в момент времени t (эта плотность может быть и обобщенной функцией), определяемой из уравнения Колмогорова—Чепмена

$$\pi_{s\to t}(x\to z)=\int_{\mathbf{\Omega}}\pi_{s\to\tau}(x\to y)\pi_{\tau\to t}(y\to z)dy, \tag{1}$$

где $x,y,z\in\mathbf{\Omega}\subset\mathbf{R}_n$, $s\le\tau\le t$.

Ищем решение уравнения (1) в виде

$$\pi_{s\to t}(x\to y)=\int_{\mathbf{\Lambda}}\psi_{st}(\lambda)\prod_{k=1}^{n}u_{\lambda_k}(y_k)v_{f_{st}^{(k)}(\lambda_k)}(x_k)d\lambda, \tag{2}$$

где $\mathbf{\Lambda}\subset\mathbf{R_n}$, $\lambda_k,x_k,y_k\in\mathbf{R}_1$, $\psi_{st}(\lambda)$ — непрерывная вещественная функция вектора λ, $f_{st}^{(k)}(\lambda_k)$ — вещественные функции, $u_{\lambda_k}(y_k)$ и $v_{\lambda_k}(x_k)$ также вещественные функции такие, что

$$\int_{\Omega_k}u_{\lambda_k}(x_k)v_{\mu_k}(x_k)dx_k=\delta(\lambda_k-\mu_k),\quad k=1,\dots,n. \tag{3}$$

В (3) $\delta(\lambda_k)$ — дельта-функция, $\lambda_k\in\Lambda_k\subset\mathbf{R}_1$, $\mu_k\in\Lambda_k\subset\mathbf{R}_1$, $\mathbf{\Omega}=\prod_{k=1}^{n}\Omega_k$, $\mathbf{\Lambda}=\prod_{k=1}^{n}\Lambda_k$. Такие пары функций $u_{\lambda_k}(x_k),v_{\lambda_k}(x_k)$ используются в теории интегральных преобразований (Фурье, Ганкеля или Конторовича—Лебедева [4]). Например, для косинус-преобразования Фурье при $\Omega_k=[0,\infty)$, $\Lambda_k=(-\infty,\infty)$ равенство (3) имеет место в случае

$$u_{\lambda_k}(x_k)=v_{\lambda_k}(x_k)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(\lambda_k x_k),$$

причем оно понимается как ядро линейного функционала на непрерывных функциях от λ_k. В дальнейшем предполагается, что Ω_k и Λ_k не зависят от переменных уравнений (1) и (2) и подынтегральные функции в (1) и (2) не зависят от Ω_k и Λ_k, а $\psi_{st}(\lambda)$ непрерывна по $\lambda\in\mathbf{\Lambda}$. Это понадобилось для оправдания перестановки интегралов по крайней мере в случае преобразований Фурье, используемых в следующих примерах.

Внося (2) в (1), переставляя интегралы по y и λ в правой части (1) и воспользовавшись (3), получаем уравнение

$$\pi_{s\to t}(x\to z)=\int_{\mathbf{\Lambda}}\psi_{s\tau}(f_{\tau t}(\lambda))\psi_{\tau t}(\lambda)\prod_{k=1}^{n}u_{\lambda_k}(z_k)v_{f_{s\tau}^{(k)}(f_{\tau t}^{(k)}(\lambda_k))}(x_k)d\lambda,$$

однотипное с (2). Оно удовлетворяется при

$$\psi_{st}(\lambda)\prod_{k=1}^{n}v_{f_{st}^{(k)}(\lambda_k)}(x_k)=\psi_{s\tau}(f_{\tau t}(\lambda))\psi_{\tau t}(\lambda)\prod_{k=1}^{n}v_{f_{s\tau}^{(k)}(f_{\tau t}^{(k)}(\lambda_k))}(x_k), \tag{4}$$

где

$$f_{st}(\lambda)=\left\{f_{st}^{(1)}(\lambda_1),\dots,f_{st}^{(n)}(\lambda_n)\right\}.$$

Функциональное уравнение (4) решим, введя ряд дополнительных предположений.

Сначала выберем функции $f_{st}^{(k)}(\lambda_k)$ так, чтобы выполнялось

$$f_{s\tau}^{(k)}\left(f_{\tau t}^{(k)}(\lambda_k)\right) = f_{st}^{(k)}(\lambda_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{5}$$

Тогда уравнение (4) упрощается:

$$\psi_{st}(\lambda) = \psi_{s\tau}(f_{\tau t}(\lambda))\psi_{\tau t}(\lambda). \tag{6}$$

При $\tau = t$ из (5), (6) имеем

$$f_{tt}^{(k)}(\lambda_k) = \lambda_k, \quad \psi_{tt}(\lambda) = 1, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Таким образом, уравнение (4) разделилось на два функциональных уравнения (5) и (6), причем сначала надо найти $f_{st}^{(k)}(\lambda_k)$ из (5), а затем, используя найденное, определить $\psi_{st}(\lambda)$ из (6).

Пусть справедливо

$$f_{st}(\lambda) \equiv A(s,t)\lambda = \{A_1(s,t)\lambda_1, A_2(s,t)\lambda_2 \ldots, A_n(s,t)\lambda_n\}, \tag{7}$$

т. е. $f_{st}^{(k)}(\lambda_k) = A_k(s,t)\lambda_k$. В этом случае получаем из (5)

$$A_k(s,\tau)A_k(\tau,t) = A_k(s,t), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{8}$$

Решение каждого из функциональных уравнений (8) известно (легко проверяется непосредственно):

$$A_k(s,t) = \frac{\gamma_k(t)}{\gamma_k(s)}, \quad s \le t, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{9}$$

где $\gamma_k(t)$ — вещественные непрерывные функции, не обращающиеся в нуль.

Решение уравнения (6) будем искать теперь в виде

$$\psi_{st}(\lambda) = \exp\{-g(\lambda)B_{st}\} \tag{10}$$

и определим непрерывные вещественные функции $g(\lambda) \equiv g(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ и B_{st}. Подставляя (10) в (6), находим

$$g(\lambda)B_{st} - g(A(s,t)\lambda)B_{s\tau} - g(\lambda)B_{\tau t} = 0. \tag{11}$$

Относительно $g(\lambda)$ предположим, что

— или при вещественном $\rho > 0$ имеем

$$g(\rho\lambda) = \rho^{\nu} g(\lambda), \quad \lambda \in \mathbf{\Lambda} \tag{12}$$

(например, $g(\lambda) = (\lambda_1^k + \cdots + \lambda_n^k)^{\nu/k}$),

— или при вещественных положительных $\rho_1, \ldots, \rho_n$ справедливо

$$g(\rho_1\lambda_1, \ldots, \rho_n\lambda_n) = \rho_1^{\nu_1} \cdots \rho_n^{\nu_n} g(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \tag{13}$$

(например, $g(\lambda) = \lambda_1^{\nu_1} \cdots \lambda_n^{\nu_n}$).

Если
$$A_k(s,t) \equiv A(s,t) = \frac{\gamma(t)}{\gamma(s)}\,, \tag{14}$$
т. е. $A_k(s,t)$ не зависит от k, в случае (12) уравнение (11) преобразуется в следующее:
$$A^{\nu}(\tau,t)B_{s\tau} + B_{\tau t} - B_{st} = 0.$$
Его решение найдено в [4]:
$$B_{st} = \alpha(t)\gamma^{\mu}(t) - \alpha(s)\gamma^{\mu-\nu}(s)\gamma^{\nu}(t), \tag{15}$$
где $\alpha(t) \geq 0$ — произвольная непрерывная вещественная функция, μ — вещественное число такое, что
$$h(t) = \alpha(t)\gamma^{\mu-\nu}(t)$$
— неубывающая функция в силу $B_{st} \geq 0$.

В случае (13) получаем из (11) уравнение
$$A_1^{\nu_1}(\tau,t)A_2^{\nu_2}(\tau,t)\cdots A_n^{\nu_n}(\tau,t)B_{s\tau} + B_{\tau t} - B_{st} = 0,$$
решение которого, как нетрудно проверить, имеет вид
$$B_{st} = \alpha(t)\gamma_1^{\mu_1}(t)\cdots\gamma_n^{\mu_n}(t) - \alpha(s)\gamma_1^{\mu_1-\nu_1}(s)\cdots\gamma_n^{\mu_n-\nu_n}(s)\gamma_1^{\nu_1}(t)\cdots\gamma_n^{\nu_n}(t), \tag{16}$$
где $\alpha(t) \geq 0$ — произвольная непрерывная вещественная функция, $\gamma_k(t)$ — те же, что и в (9), $\mu_1,\ldots,\mu_n$ — вещественные константы, обеспечивающие неубывание, в силу $B_{st} \geq 0$, функции
$$h(t) = \alpha(t)\gamma_1^{\mu_1-\nu_1}(t)\cdots\gamma_n^{\mu_n-\nu_n}(t).$$

Таким образом, *среди решений уравнения Колмогорова—Чепмена* (1) *есть частное решение в виде*
$$\pi_{s\to t}(x\to y) = \int_{bf\Lambda} \exp(-g(\lambda)B_{st}) \prod_{k=1}^{n} u_{\lambda_k}(y)v_{A_k(s,t)\lambda_k}(x)d\lambda, \tag{17}$$
в котором $A_k(s,t)$ *определены равенствами* (9) *или* (14), *а* B_{st} — *равенствами* (16) *или* (15) *соответственно.*

Более простое частное решение уравнения (1) получается при $A_k(s,t) = 1$, $k = 1,\ldots,n$, когда функциональное уравнение (6) принимает форму
$$\psi_{s\tau}(\lambda)\psi_{\tau t}(\lambda) = \psi_{st}(\lambda),$$
аналогичную (8), и поэтому
$$\psi_{st}(\lambda) = \frac{\varphi_t(\lambda)}{\varphi_s(\lambda)}\,,$$
где $\varphi_t(\lambda)$ — вещественная, не обращающаяся в нуль функция.

Таким образом, *среди решений уравнения* (1) *есть и следующие:*
$$\pi_{s\to t}(x\to y) = \int_{\mathbf{\Lambda}} \frac{\varphi_t(\lambda)}{\varphi_s(\lambda)} \prod_{k=1}^{n} u_{\lambda_k}(y)v_{\lambda_k}(x)d\lambda. \tag{18}$$

Если $\pi_{s\to t}(x\to y)\geq 0$ и

$$\int_{\mathbf{\Omega}} \pi_{s\to t}(x\to y)dy \leq 1, \tag{19}$$

функции (17) и (18) можно отождествить с плотностью вероятности перехода некоторого марковского процесса.

Рассмотрим несколько примеров для $n>1$ (примеры для $n=1$ см. в [4]), подобрав их так, чтобы интегралы в (17) и (18) вычислялись в явном виде.

Пример 1. Пусть $s\leq t$, $t-s=p$, $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$, $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)$, $x_k, y_k, \lambda_k\in[0,\infty)$, $k=1,2$. Согласно (17) функция

$$\pi_{s\to t}(x\to y)=\frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty \exp\Big(-p\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}\Big)\cos\lambda_1 y_1\cos\lambda_2 y_2\cos\lambda_1 x_1\cos\lambda_2 x_2 d\lambda_1 d\lambda_2 \tag{20}$$

удовлетворяет уравнению Колмогорова—Чепмена (1), если положить в (20)

$$\varphi_t=\exp\Big(-t\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}\Big),\quad u_{\lambda_k}(x_k)=v_{\lambda_k}(x_k)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\lambda_k x_k,\quad k=1,2.$$

Вычислим интеграл (20). Сначала вычислим «внутренний» интеграл

$$G_{\lambda_2}(x_1,y_1)=\int_0^\infty \exp\Big(-p\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}\Big)\cos\lambda_1 y_1\cos\lambda_1 x_1 d\lambda_1.$$

Используя формулы (25) и (3) из [6, с. 25 и 16 соответственно], этот интеграл можно представить в виде

$$G_{\lambda_2}(x_1,y_1)=\frac{1}{2}\big[g_{\lambda_2}(x_1+y_1)+g_{\lambda_2}(x_1-y_1)\big],$$

где

$$g_{\lambda_2}(x_1)=\int_0^\infty \exp\Big(-p\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}\Big)\cos\lambda_1 x_1 d\lambda_1=\frac{\lambda_2 p}{\sqrt{x_1^2+p^2}}K_1\Big(\lambda_2\sqrt{x_1^2+p^2}\Big),$$

а функция $K_1(x)$ — модифицированная функция Бесселя 3-го рода (функция Мак-Дональда) [6].

В свою очередь, по формуле (3) из [6, с. 16]

$$\int_0^\infty g_{\lambda_2}(x_1)\cos\lambda_2 y_2\cos\lambda_2 x_2 d\lambda_2=\frac{p}{4}[r(z_1,x_2)+r(z_2,x_2)], \tag{21}$$

где согласно (40) из [6, с. 52]

$$r(z_k,x_2)=\int_0^\infty \frac{\lambda_2 K_1(\lambda_2 z_k)}{z_k}\cos\lambda_2 x_2 d\lambda_2=\frac{\pi}{2}\left(z_k^2+x_2^2\right)^{-3/2},\quad k=1,2, \tag{22}$$

$$z_1^2=p^2+(y_1+x_1)^2,\quad z_2^2=p^2+(y_1-x_1)^2.$$

Соединяя вместе (21) и (22), находим, что интеграл (20) равен

$$\pi_{s\to t}(x\to y)=\frac{p}{2\pi}\sum_{k=1}^4 q_k^{-3/2}, \tag{23}$$

где $p = t - s$, $s \leq t$,

$$q_1 = p^2 + (y_1 + x_1)^2 + (y_2 + x_2)^2, \quad q_2 = p^2 + (y_1 + x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2,$$

$$q_3 = p^2 + (y_1 - x_1)^2 + (y_2 + x_2)^2, \quad q_4 = p^2 + (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2.$$

Так как

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \pi_{s\to t}(x \to y) dy = \frac{p}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{dz_1 dz_2}{(p^2 + z_1^2 + z_2^2)^{3/2}} = 1, \tag{24}$$

тем самым (23) — плотность вероятности перехода некоторого марковского процесса.

Этот же пример является примером к формуле (17) по варианту (12) с $\nu = 1$, $A(s,t) = 1$, $B_{st} = t - s$, $\alpha(t) = t$.

Пример 2. Пусть $s \leq t$, $p = t - s$, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, $\lambda_k, x_k, y_k \in (-\infty, \infty)$, $k = 1, 2$. Интеграл

$$\pi_{s\to t}(x \to y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-p\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} \exp\left\{-\mathbf{i}[\lambda_1(y_1 - x_1) + \lambda_2(y_2 - x_2)]\right\} d\lambda_1 d\lambda_2,$$

где $\mathbf{i}$ — мнимая единица, удовлетворяет уравнению (1), являясь частным случаем формулы (18), если положить в ней

$$\varphi_t = \exp\Bigl(-t\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}\Bigr), \quad u_{\lambda_k}(x_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\mathbf{i}\lambda_k x_k}, \quad v_{\lambda_k}(x_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\mathbf{i}\lambda_k x_k}, \quad k = 1, 2.$$

Этот интеграл вычислен в [7, с. 266] и равен

$$\frac{p}{2\pi} \left[p^2 + (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2\right]^{-3/2} \geq 0.$$

В силу (24),

$$\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \pi_{s\to t}(x \to y) dy = 1,$$

так что $\pi_{s\to t}(x \to y)$ может рассматриваться как плотность вероятности перехода некоторого двумерного марковского процесса.

Пример 3. Предыдущий пример допускает обобщение на любую целую размерность пространства состояний. Именно, полагая $p = t - s \geq 0$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $x_k, y_k, \lambda_k \in (-\infty, \infty)$, $k = 1, 2$, видим, что функция

$$\pi_{s\to t}(x \to y) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^\infty (n) \int_{-\infty}^\infty e^{-p\sqrt{\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2}} \exp\left\{-\mathbf{i} \sum_{k=1}^n \lambda_k (y_k - x_k)\right\} d\lambda_1 \cdots d\lambda_n \tag{25}$$

удовлетворяет уравнению (1) как частный случай формулы (17). Согласно [7, с. 266], интеграл (25) равен

$$p\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \pi^{-\frac{n+1}{2}} \left[p^2 + \sum_{k=1}^n (y_k - x_k)^2\right]^{-\frac{n+1}{2}} \geq 0. \tag{26}$$

Интегрируя (26) по $y_1, \ldots, y_n$ во всем пространстве состояний, получаем единицу, т. е. $\pi_{s\to t}(x \to y)$ — плотность вероятности перехода некоторого марковского процесса с n-мерной размерностью пространства состояний.

Пример 4. Покажем, что, как и в случае $n = 1$ (см. [4]), при $n > 1$ могут существовать решения уравнения (1), для которых не выполняется условие нормировки (19). Пусть $p = t - s$, $0 < p < 1$, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, $x_k, y_k, \lambda_k \in [0, \infty)$ и

$$\pi_{s\to t}(x \to y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2\right)^{-p} \cos\lambda_1 y_1 \cos\lambda_2 y_2 \cos\lambda_1 x_1 \cos\lambda_2 x_2 d\lambda_1 d\lambda_2. \tag{27}$$

Поступая так же, как в примере 1, вычисляем этот интеграл:

$$\pi_{s\to t}(x \to y) = \frac{\Gamma(1-p)}{4^p \pi \Gamma(p)} \sum_{k=1}^{4} q_k^{p-1}, \tag{28}$$

где

$$q_1 = (y_1 + x_1)^2 + (y_2 + x_2)^2, \quad q_2 = (y_1 + x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2,$$
$$q_3 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 + x_2)^2, \quad q_4 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2.$$

Хотя (27) и удовлетворяет уравнению (1) в силу (18), но интегрируя (28) по y_k в $[0, \infty)$, $k = 1, 2$, видим, что интеграл расходится, т. е. не выполняется условие нормировки (19), и тем самым (27) не может быть плотностью вероятности.

Следующий пример демонстрирует, что гауссовский марковский процесс с двумерным пространством состояний является частным решением уравнения (1), отличным от (17) или (18).

Пример 5. Рассмотрим двумерный гауссовский процесс $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ с нулевым средним и определим, когда он является марковским. Плотность вероятности перехода (отношение гауссовской плотности вектора $(\xi_1(s), \xi_2(s); \xi_1(t), \xi_2(t))$ к гауссовской плотности вектора $(\xi_1(s), \xi_2(s)))$ имеет вид [8]

$$\pi_{s\to t}(x \to y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|\Sigma|}} \exp\left\{-\frac{l(z_1, z_2)}{2|\Sigma|}\right\},$$

где $z_1 = y_1 - m_1 x_1 - m_2 x_2$, $z_2 = y_2 - n_1 x_1 - n_2 x_2$, $y_k = \xi_k(t)$, $x_k = \xi_k(t)$, $k = 1, 2$, $s \le t$,

$$l(z_1, z_2) = \sigma_{22} z_1^2 - 2\sigma_{12} z_1 z_2 + \sigma_{11} z_2^2, \quad |\Sigma| = \det\{\sigma_{jk}\}_{j,k=1}^2,$$

$$\sigma_{jk} = \mathbf{M}\left\{[\xi_j(t) - \mathbf{M}\xi_j(t)][\xi_k(t) - \mathbf{M}\xi_k(t)] | \xi_1(s), \xi_2(s)\right\}, \quad j, k = 1, 2,$$

$$\mathbf{M}\left\{\xi_1(t) | \xi_1(s), \xi_2(s)\right\} = m_1 \xi_1(s) + m_2 \xi_2(s), \quad \mathbf{M}\left\{\xi_2(t) | \xi_1(s), \xi_2(s)\right\} = n_1 \xi_1(s) + n_2 \xi_2(s),$$

а символом $\mathbf{M}\{y|x\}$ обозначается математическое ожидание случайной величины y при фиксированном x. Если известны элементы $R_{jk}(s,t) = \mathbf{M}\xi_j(s)\xi_k(t)$, $j, k = 1, 2$, корреляционной матрицы процесса, все указанные выше функции σ_{jk}, m_j, n_j при $j, k = 1, 2$, вычисляются по ним (см., например, [8]). Они зависят от s и t и представляют из себя отношения определителей. Нам их конкретная форма в дальнейшем не нужна.

Используя формулу для характеристической функции гауссовского распределения [8], а именно,

$$G_{\lambda_1, \lambda_2} = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \pi_{s\to t}(x \to y) e^{\mathbf{i}(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)} dy_1 dy_2 = \exp\left\{\mathbf{i}\sum_{k=1}^2 \lambda_k z_k - \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^2 \sigma_{jk}\lambda_j\lambda_k\right\},$$

и обращая преобразование Фурье

$$\pi_{s\to t}(x \to y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\mathbf{i} \sum_{k=1}^{2} \lambda_k y_k\right\} G_{\lambda_1,\lambda_2} d\lambda_1 d\lambda_2,$$

получаем представление $\pi_{s\to t}(x \to y)$ в виде

$$\pi_{s\to t}(x \to y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{st}(\lambda) C_{xy}(\lambda_1, \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2, \tag{29}$$

$$\psi_{st}(\lambda) = \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{2} \sigma_{jk} \lambda_j \lambda_k\right\}, \tag{30}$$

$$C_{xy}(\lambda_1, \lambda_2) = \prod_{k=1}^{2} \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\mathbf{i} \sum_{k=1}^{2} \lambda_k y_k\right)\right\} \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\mathbf{i} \sum_{k=1}^{2} \lambda_k (m_k + n_k) x_k\right)\right\},$$

совпадающем с (2), причем

$$u_{\lambda_k}(x_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-\mathbf{i}\lambda_k x_k\}, \quad v_{\lambda_k}(x_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{\mathbf{i}\lambda_k x_k\}, \quad k = 1, 2,$$

а $f_k(\lambda_k) = (m_k + n_k)\lambda_k$, т. е. выполняется предположение (7) с $A(s,t) = m_k + n_k$. Функция $\psi_{st}(\lambda)$ отлична от (10), поэтому, чтобы (29) удовлетворяла уравнению Колмогорова—Чепмена (1), нужны другие условия на нее. Ниже они формулируются в более общей форме, чем для гауссовского процесса (примера 5).

Вместо (10) пусть, как в (30),

$$\psi_{st}(\lambda) = \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{2} B_{jk}(s,t) \lambda_j \lambda_k\right\}, \tag{31}$$

где квадратичная форма $-\ln \psi_{st}(\lambda)$ положительно определена.

Подставив (31) в (6), находим, что (6) удовлетворяется, если выполняются функциональные уравнения

$$A_j(\tau,t) A_k(\tau,t) B_{jk}(s,\tau) + B_{jk}(\tau,t) - B_{jk}(s,t) = 0, \quad j,k = 1,2.$$

Простой подстановкой в эти уравнения убеждаемся, что их решениями являются функции

$$B_{jk}(s,t) = \alpha_{jk}(t) \gamma_j^{\mu_{jk}}(t) \gamma_k^{\mu_{jk}}(t) - \alpha_{jk}(s) \gamma_j^{\mu_{jk}-1}(s) \gamma_k^{\mu_{jk}-1}(s) \gamma_j(t) \gamma_k(t), \quad j,k = 1,2, \tag{32}$$

в которых $\alpha_{jk} > 0$ — произвольные непрерывные функции, $\gamma_k(t)$ — те же, что и в (9), μ_{jk} — вещественные константы, обеспечивающие положительную определенность квадратичной формы в (31).

Таким образом, кроме (17) и (18), *среди решений уравнения* (1) *при* $n = 2$ *существует частное решение вида*

$$\pi_{s\to t}(x \to y) = \int_{\mathbf{\Lambda}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{2} B_{jk}(s,t) \lambda_j \lambda_k\right\} \prod_{k=1}^{2} u_{\lambda_k}(y_k) v_{\lambda_k}(x_k) d\lambda,$$

в котором матрица $\{B_{jk}(s,t)\}_{j,k=1}^{2}$ *положительно определена, а* B_{jk} *задаются формулами* (32).

Для гауссовского процесса значения констант в (32) в одномерном варианте (при $n = 1$) см. в [5].

Литература

1. Вероятность и математическая статистика. Энциклопедический словарь. М., 2003. 912 с.
2. *Бернштейн С. Н.* О зависимостях между случайными величинами // Собр. соч.: в 4 т. М.: Наука, 1964. Т. 4. С. 235–254.
3. *Сарманов О. В.* Исследование стационарных марковских процессов методом разложения по собственным функциям // Труды матем. ин-та АН СССР. Т. 60. М.: Наука, 1961. С. 238–259.
4. *Мирошин Р. Н.* О некоторых решениях интегрального уравнения Колмогорова—Чепмена // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2007. Вып. 4. С. 22–29.
5. *Мирошин Р. Н.* О многократных интегралах специального вида // Матем. заметки. 2007. Т. 82, вып. 3. С. 401–410.
6. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции / пер. с англ. М.: Наука, 1966. Т. 2. 295 с.
7. *Бохнер С.* Лекции об интегралах Фурье / пер. с англ. М.: ГИФМЛ, 1962. 360 с.
8. *Уилкс С.* Математическая статистика / пер. с англ. М.: Наука, 1967. 632 с.

Статья поступила в редакцию 12 мая 2015 г.

Сведения об авторе

Мирошин Роман Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор;
miroshin-roman1938@yandex.ru

PARTICULAR SOLUTIONS OF THE CHAPMAN—KOLMOGOROV EQUATION FOR MULTI-DIMENSIONAL-STATE MARKOV PROCESS WITH CONTINUOUS TIME

Roman N. Miroshin

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation;
miroshin-roman1938@yandex.ru

The bilinear integral Chapman—Kolmogorov equation defines the dynamics behavior of a Markov process. The task of its immediate solution without the linearization was set in 1932 by S. N. Bernstein and partially was solved in 1961 by O. V. Sarmanov as bilinear series. In 2007–2010 author found several partial solutions of the above equation in the form of both a series of the Sarmanov-type and an integral. It was assumed that the state space of a Markov process was one-dimensional. In the article three particular solutions are found as integrals for multi-dimensional-state Markov process. Results are illustrated with five examples, one of which shows that it is the solution of the original equation that does not have a probabilistic sense. Refs 8.

Keywords: multi-dimensional-state Markov process with continuous time, solutions of the Chapman—Kolmogorov equation, transition probability, functional equations.

References

1. *Probability and Mathematical Statistics. Encyclopedic dictionary* (Bol'shaya Rossiiskaya Entsiklopediya, Moskow, 2003) [in Russian].
2. Bernstein S. N., “On Dependencies between Random Values”, *Collected works* **4**, 235–254 (Nauka, Moscow, 1964) [in Russian].
3. Sarmanov O. V., “Investigation of Stationary Markov Processes by the Method of Eigenfunction Expansion”, *Tr. Mat. Inst. Steklova* **60**, 238–259 (1961) [in Russian].
4. Miroshin R. N., “On Some Solutions to the Chapman—Kolmogorov Integral Equation”, *Vestnik St.Petersb. Univ. Math.* **40**, Issue 4, 253–259 (2007).
5. Miroshin R. N., “On Multiple Integrals of Special form”, *Math. Notes* **82**, Issue 3, 357–365 (2007).
6. Bateman H., Erdélyi A., *Higher Transtendental Functions* **2** (McGraw-Hill, New York-Toronto-London, 1953; Nauka, Moskow, 1970).
7. Bochner S., *Lectures on Fourier Integrals* (Princeton University Press, Princeton-New Jersey, 1959; GIFML, Moskow, 1962).
8. Wilks S. S. *Mathematical Statistics* (Wiley, New York, 1961; Nauka, Moskow, 1967).