

# СОБСТВЕННЫЕ ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ АНИЗОТРОПНЫХ КОРОВЧАТЫХ СТЕРЖНЕЙ ИЗ ПОЛИМЕРНЫХ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

*В. М. Рябов<sup>1</sup>, Б. А. Ярцев<sup>2</sup>*

<sup>1</sup> Санкт-Петербургский государственный университет,

Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

<sup>2</sup> Крыловский государственный научный центр,

Российская Федерация, 196158, Санкт-Петербург, Московское шоссе, 44

Исследования собственных колебаний композитных анизотропных коровчатых стержней представляют собой интересную практическую задачу, которая ранее детально не обсуждалась. Авторы ранее опубликованных работ, как правило, ограничивались рассмотрением двух-трех низших тонов колебаний. Столь незначительное число анализируемых тонов не позволяет представить общую картину возникающих в таких конструкциях взаимодействий мод колебаний, сопровождающихся множественными взаимными трансформациями. Последнее обстоятельство и стало причиной написания данной работы. В ее первой части содержится подробное описание математической модели задачи, а во второй части приведены результаты расчетов и их детальное обсуждение. Библиогр. 11 назв. Ил. 2.

*Ключевые слова:* композитные материалы, собственные колебания, связанные колебания.

1. Рассматривается безопорный коровчатый стержень, связанный с декартовой системой координат  $xyz$  (рис. 1). Стенка стержня представляет собой совокупность конечного числа  $p$  однородных слоев полимерных композитных материалов (ПКМ) с толщинами  $h_k$  ( $k = 1, 2, \dots, p$ ). Материал каждого слоя считается анизотропным, линейно вязкоупругим. Проскальзывание между слоями отсутствует, поперечное сечение не деформируется в своей плоскости [1–5].

Для записи уравнений затухающих колебаний стержня используется вариационный принцип Гамильтона:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[ \iiint_V \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial U_i}{\partial t} \right)^2 dV - \frac{1}{2} \iiint_V C_{ijkl}(\omega, T) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \frac{\partial U_k}{\partial x_l} dV \right] dt = 0, \quad (1)$$

где  $\omega$  — частота колебаний, а  $T$  — температура окружающей среды.

Сведение трехмерных соотношений (1) к одномерным уравнениям стержней выполняется путем представления элементов вектора перемещений в виде [1, 2, 6]

$$U(x, y, z, t) = u(x, t) + \Theta_y(x, t) \left( z(s) - n \frac{dy}{ds} \right) + \Theta_z(x, t) \left( y(s) + n \frac{dz}{ds} \right) - \Phi'(x, t) [F(s) + nr_s(s)];$$

$$V(x, y, z, t) = v(x, t) - z \Phi(x, t); \quad W(x, y, z, t) = w(x, t) + y \Phi(x, t), \quad (2)$$

где  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $\Phi$ ,  $\Theta_y$ ,  $\Theta_z$  — линейные и угловые перемещения оси стержня;  $s$  — контурная координата (длина дуги);  $n$  — расстояние по нормали от контура до точки поперечного сечения.

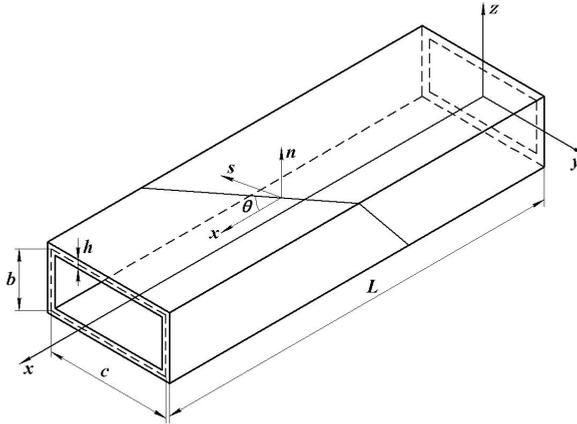


Рис. 1. Тонкостенный коробчатый стержень.

Функция деформации Сен-Венана определяется приближенным выражением

$$\varphi(s) = -[F(s) + nr_s(s)],$$

где

$$F(s) = \int_0^s [r_s(s) - \psi] ds, \quad \psi = \frac{2A_0}{\beta} = \oint_s r_n(s) ds / \oint_s ds;$$

$A_0$  — полная площадь, заключенная внутри контура поперечного сечения:

$$2A_0 = \oint_s r_s(s) ds = \Omega,$$

$\Omega$  — секториальная площадь;  $\beta = \oint_s ds$  — длина контура поперечного сечения,  $r_n, r_s$  — проекции радиуса-вектора произвольной точки поперечного сечения на внешнюю нормаль  $\bar{n}$  и касательную к нему  $\bar{s}$  (рис. 2):

$$r_n(s) = y(s) \frac{dz}{ds} - z(s) \frac{dy}{ds}, \quad r_s(s) = -z(s) \frac{dz}{ds} - y(s) \frac{dy}{ds}.$$

Элементы вектора деформаций связаны с элементами вектора перемещений (2) соотношениями

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{xs} \\ \varepsilon_{xn} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} e_{xx} \\ e_{xs} \\ e_{xn} \end{Bmatrix} + n \begin{Bmatrix} k_{xx} \\ k_{xs} \\ k_{xn} \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{Bmatrix} u' + z \Theta'_y + y \Theta'_z - F \Phi'' \\ (v' + \Theta_z) \frac{dy}{ds} + (w' + \Theta_y) \frac{dz}{ds} + \frac{2A_0}{\beta} \Phi' \\ (v' + \Theta_z) \frac{dz}{ds} - (w' + \Theta_y) \frac{dy}{ds} \end{Bmatrix} + n \begin{Bmatrix} \Theta'_z \frac{dz}{ds} - \Theta'_y \frac{dy}{ds} - r_s \Phi'' \\ \Phi' \\ 0 \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь и далее символ  $(\dots)'$  обозначает частную производную по пространственной переменной  $x$ .

Физические соотношения для  $k$ -го слоя, образующего замкнутый контур поперечного сечения стержня в локальной системе координат  $xsn$ , записываются в виде

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{ss} \\ \sigma_{xs} \\ \sigma_{xn} \end{Bmatrix}_{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} \end{bmatrix}_{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{ss} \\ \varepsilon_{xs} \\ \varepsilon_{xn} \end{Bmatrix}, \quad (4)$$

где  $\bar{Q}_{lm} = \bar{Q}_{lm}(\omega, T) = \text{Re } \bar{Q}_{lm}(\omega, T) + i \cdot \text{Im } \bar{Q}_{lm}(\omega, T) = \text{Re } \bar{Q}_{lm}(\omega, T)(1 + i\eta_{lm}(\omega, T))$  — элементы комплексной матрицы жесткости слоя [7, 8].

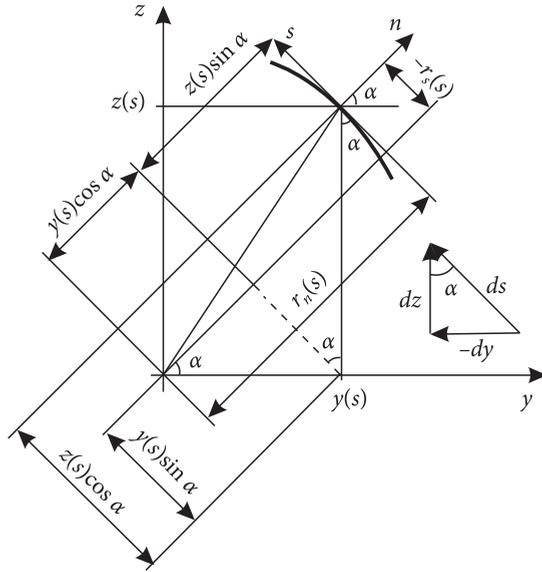


Рис. 2. Геометрия поперечного сечения тонкостенного стержня.

Исключая второе уравнение из системы линейных уравнений (4), представим напряжения в плоскости стенки следующими соотношениями:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xs} \end{Bmatrix}_{(k)} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{16} \\ q_{16} & q_{66} \end{bmatrix}_{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{xs} \end{Bmatrix}, \quad (5)$$

$$(\sigma_{xn})_{(k)} = (\bar{Q}_{44})_{(k)} \cdot \varepsilon_{xn},$$

где

$$q_{11} = \bar{Q}_{11} - \frac{\bar{Q}_{12}^2}{\bar{Q}_{22}}, \quad q_{16} = \bar{Q}_{16} - \frac{\bar{Q}_{12}\bar{Q}_{26}}{\bar{Q}_{22}}, \quad q_{66} = \bar{Q}_{66} - \frac{\bar{Q}_{26}^2}{\bar{Q}_{22}}.$$

Интегрируя элементы вектора напряжений по высоте каждого слоя с учетом соотношений (3), (5) и суммируя результаты по количеству слоев, определим нормальные усилия  $N$  и изгибающие моменты  $M$ , возникающие в стенке поперечного сечения стержня:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{xs} \\ M_{xx} \\ M_{xs} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{16} & \bar{B}_{11} & \bar{B}_{16} \\ \bar{A}_{16} & \bar{A}_{66} & \bar{B}_{16} & \bar{B}_{66} \\ \bar{B}_{11} & \bar{B}_{16} & \bar{D}_{11} & \bar{D}_{16} \\ \bar{B}_{16} & \bar{B}_{66} & \bar{D}_{16} & \bar{D}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{xx} \\ e_{xs} \\ k_{xx} \\ k_{xs} \end{Bmatrix}. \quad (6)$$

Элементы матриц мембранных  $\bar{A}_{lm}$ , смешанных  $\bar{B}_{lm}$  и изгибных  $\bar{D}_{lm}$  жесткостей вычисляются по формулам

$$(\bar{A}_{lm}, \bar{B}_{lm}, \bar{D}_{lm}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} q_{lm} (1, n, n^2) dn, \quad (l, m = 1, 6),$$

где  $h = \text{const}$  — толщина стенки поперечного сечения.

Нормальные усилия в трансверсальном направлении определяются по формуле

$$N_{xn} = A_{44} \cdot \varepsilon_{xn} = \left( \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{44} dn \right) \cdot \varepsilon_{xn}.$$

Потенциальная энергия деформации стержня определяется зависимостью

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l [N_x u' + M_y \Theta'_y + M_z \Theta'_z + B \Phi'' + Q_y (v' + \Theta_z) + Q_z (w' + \Theta_y) + M_x \Phi'] dx, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} N_x &= \oint_s N_{xx} ds, & M_x &= \oint_s (N_{xs} \psi + M_{xs}) ds, & M_y &= \oint_s \left( N_{xx} z - M_{xx} \frac{dy}{dx} \right) ds, \\ M_z &= \oint_s \left( N_{xx} y + M_{xx} \frac{dz}{ds} \right) ds, & B &= - \oint_s (N_{xx} F + M_{xx} r_s) ds, \\ Q_y &= \oint_s \left( N_{xs} \frac{dy}{ds} + N_{xn} \frac{dz}{ds} \right) ds, & Q_z &= \oint_s \left( N_{xs} \frac{dz}{ds} - N_{xn} \frac{dy}{ds} \right) ds. \end{aligned} \quad (8)$$

В представлениях (7), (8)  $N_x$  — осевая сила;  $M_x$  — крутящий момент;  $M_y, M_z$  — изгибающие моменты относительно осей  $y$  и  $z$ ;  $B$  — бимомент;  $Q_y, Q_z$  — поперечные силы в направлении осей  $y$  и  $z$ , действующие в поперечном сечении стержня.

Подставляя в (8) зависимости (6) с учетом (3), получим соотношения связи внутренних усилий с функциями перемещений и их производными по координате  $x$ :

$$\begin{pmatrix} N_x \\ M_y \\ M_z \\ B \\ Q_y \\ Q_z \\ M_x \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & c_{15} & c_{16} & c_{17} \\ c_{21} & c_{22} & 0 & c_{24} & c_{25} & 0 & c_{27} \\ c_{31} & 0 & c_{33} & c_{34} & 0 & c_{36} & c_{37} \\ 0 & c_{42} & c_{43} & c_{44} & 0 & 0 & 0 \\ c_{51} & c_{52} & 0 & 0 & c_{55} & 0 & c_{57} \\ c_{61} & 0 & c_{63} & 0 & 0 & c_{66} & c_{67} \\ c_{71} & c_{72} & c_{73} & 0 & c_{75} & c_{76} & c_{77} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ \Theta'_y \\ \Theta'_z \\ \Phi'' \\ v' + \Theta_z \\ w' + \Theta_y \\ \Phi' \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где  $c_{ij}$  — элементы матрицы жесткости.

Кинетическая энергия коробчатого стержня равна величине

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^l \oint_s \left\{ \left[ \left( \dot{u} + z \dot{\Theta}_y + y \dot{\Theta}_z - F \dot{\Phi}' \right)^2 + \left( \dot{v} - z \dot{\Phi} \right)^2 + \left( \dot{w} + y \dot{\Phi} \right)^2 \right] m_0 + \right. \\ \left. + 2 \left( \dot{u} + z \dot{\Theta}_y + y \dot{\Theta}_z - F \dot{\Phi}' \right) \left( \frac{dz}{ds} \dot{\Theta}_z - \frac{dy}{ds} \dot{\Theta}_y - r_s \dot{\Phi}' \right) m_1 + \right. \\ \left. + \left( \frac{dz}{ds} \dot{\Theta}_z - \frac{dy}{ds} \dot{\Theta}_y - r_s \dot{\Phi}' \right)^2 m_2 \right\} ds dx. \quad (10) \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения

$$(m_0, m_1, m_2) = \sum_{k=1}^p \int_{h_{k-1}}^{h_k} \rho_k (1, n, n^2) dn,$$

где  $\rho_k$  — плотность материала  $k$ -го слоя.

Подставляя (7) и (10) в (1) и производя преобразования, включающие интегрирование по частям, приведем первую вариацию функционала Гамильтона к виду

$$\begin{aligned} - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \{ I_1 \delta u + I_2 \delta \Theta_y + I_3 \delta \Theta_z + I_4 \delta v + I_5 \delta w + I_6 \delta \Phi \} dx dt + \\ + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l [ N'_x \delta u + Q'_y \delta v + Q'_z \delta w + (M'_y - Q_z) \delta \Theta_y + (M'_z - Q_y) \delta \Theta_z + (M'_x - B'') \delta \Phi ] dx dt + \\ + \int_{t_1}^{t_2} [ I_7 \delta \Phi ]_0^l dt - \int_{t_1}^{t_2} [ N_x \delta u + Q_y \delta v + Q_z \delta w + M_y \delta \Theta_y + M_z \delta \Theta_z + (M_x - B') \delta \Phi + B \delta \Phi' ]_0^l dt. \quad (11) \end{aligned}$$

Входящие в (11) силы инерции определяются равенством

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & m_{22} & 0 & m_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{31} & 0 & m_{33} & m_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{45} & 0 & m_{47} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{56} & m_{57} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{65} & m_{66} & m_{67} & m_{68} & m_{69} & m_{610} \\ 0 & m_{72} & m_{73} & m_{74} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\Theta}_y \\ \ddot{\Theta}_z \\ \ddot{\Phi}' \\ \ddot{v} \\ \ddot{w} \\ \ddot{\Phi} \\ \ddot{\Theta}'_y \\ \ddot{\Theta}'_z \\ \ddot{\Phi}'' \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Условиями стационарности функционала (11) служат уравнения движения

$$\begin{aligned}
 c_{11}u_0'' + c_{12}\Theta_{0y}'' + c_{13}\Theta_{0z}'' + c_{15}(v_0' + \Theta_{0z}') + c_{16}(w_0' + \Theta_{0y}') + c_{17}\Phi_0'' + \\
 + \omega^2(m_{11}u_0 + m_{12}\Theta_{0y} + m_{13}\Theta_{0z} + m_{14}\Phi_0') = 0, \\
 c_{21}u_0'' + c_{22}\Theta_{0y}'' + c_{24}\Phi_0'' + c_{25}(v_0' + \Theta_{0z}') + c_{27}\Phi_0'' - c_{61}u_0' - c_{63}\Theta_{0z}' - c_{66}(w_0' + \Theta_{0y}') - \\
 - c_{67}\Phi_0' + \omega^2(m_{21}u_0 + m_{22}\Theta_{0y} + m_{24}\Phi_0') = 0, \\
 c_{31}u_0'' + c_{33}\Theta_{0z}'' + c_{34}\Phi_0'' + c_{36}(w_0' + \Theta_{0y}') + c_{37}\Phi_0'' - c_{51}u_0' - c_{52}\Theta_{0y}' - c_{55}(v_0' + \Theta_{0z}') - \\
 - c_{57}\Phi_0' + \omega^2(m_{31}u_0 + m_{33}\Theta_{0z} + m_{34}\Phi_0') = 0, \\
 c_{51}u_0'' + c_{52}\Theta_{0y}'' + c_{55}(v_0' + \Theta_{0z}') + c_{57}\Phi_0'' + \omega^2(m_{45}v_0 + m_{47}\Phi_0) = 0, \\
 c_{61}u_0'' + c_{63}\Theta_{0z}'' + c_{66}(w_0' + \Theta_{0y}') + c_{67}\Phi_0'' + \omega^2(m_{56}w_0 + m_{57}\Phi_0) = 0, \\
 c_{71}u_0'' + c_{72}\Theta_{0y}'' + c_{73}\Theta_{0z}'' + c_{75}(v_0' + \Theta_{0z}') + c_{76}(w_0' + \Theta_{0y}') + c_{77}\Phi_0'' - c_{42}\Theta_{0y}''' - \\
 - c_{43}\Theta_{0z}''' - c_{44}\Phi_0^{IV} + \omega^2(m_{65}v_0 + m_{66}w_0 + m_{67}\Phi_0 + m_{68}\Theta_{0y}' + m_{69}\Theta_{0z}' + m_{610}\Phi_0') = 0
 \end{aligned} \tag{13}$$

и естественные граничные условия при  $x = 0, l$ :

$$\begin{aligned}
 c_{11}u_0' + c_{12}\Theta_{0y}' + c_{13}\Theta_{0z}' + c_{15}(v_0' + \Theta_{0z}') + c_{16}(w_0' + \Theta_{0y}') + c_{17}\Phi_0' = 0, \\
 c_{21}u_0' + c_{22}\Theta_{0y}' + c_{24}\Phi_0' + c_{25}(v_0' + \Theta_{0z}') + c_{27}\Phi_0' = 0, \\
 c_{31}u_0' + c_{33}\Theta_{0z}' + c_{34}\Phi_0' + c_{36}(w_0' + \Theta_{0y}') + c_{37}\Phi_0' = 0, \\
 c_{42}\Theta_{0y}'' + c_{43}\Theta_{0z}'' + c_{44}\Phi_0'' = 0, \\
 c_{51}u_0' + c_{52}\Theta_{0y}' + c_{55}(v_0' + \Theta_{0z}') + c_{57}\Phi_0' = 0, \\
 c_{61}u_0' + c_{63}\Theta_{0z}' + c_{66}(w_0' + \Theta_{0y}') + c_{67}\Phi_0' = 0, \\
 c_{71}u_0' + c_{72}\Theta_{0y}' + c_{73}\Theta_{0z}' + c_{75}(v_0' + \Theta_{0z}') + c_{76}(w_0' + \Theta_{0y}') + c_{77}\Phi_0' - \\
 - c_{42}\Theta_{0y}'' - c_{43}\Theta_{0z}'' - c_{44}\Phi_0'' + \omega^2(m_{72}\Theta_{0y} + m_{73}\Theta_{0z} + m_{74}\Phi_0') = 0.
 \end{aligned} \tag{14}$$

При записи (13), (14) учитывались зависимости (9), (12) и предполагалось, что движение стержня происходит по гармоническому закону, т. е.

$$(u, v, w, \Theta_y, \Theta_z, \Phi) = (u_0, v_0, w_0, \Theta_{0y}, \Theta_{0z}, \Phi_0) e^{i\omega t}.$$

2. В уравнения (13), (14) входят производные искоемых функций, поэтому будем искать приближения в аналитическом виде, а не численно во избежание потери точности при последующем дифференцировании. Предварительно с помощью замены переменной перейдем к стандартному отрезку  $[-1, 1]$  по  $x$ . Искомые функции определяем в виде разложений

$$\sum_{m=1}^N a_m \varphi_m(x) \tag{15}$$

при подходящем выборе системы  $\varphi_m$ . Подстановка приближений (15) в уравнения (13), (14) и последующая процедура метода Рунге приводят к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) порядка  $6N$  относительно коэффициентов разложений (15). При разработке комплекса программ, реализующих описанную схему, необходимо согласовывать возможности вычислительной техники (скорость вычислений, объем оперативной и внешней памяти, простота реализации и выполнения необходимых математических операций, в том числе на комплексной плоскости и т. п.) с требованиями, предъявляемыми к параметрам метода.

Прежде всего возникает вопрос о рациональном выборе координатной системы  $\varphi_m$ . Использование тригонометрических систем нерационально из-за невысокой скорости сходимости (она имеет порядок  $N^{-3/2}$ , см. [9]) и ввиду большого порядка систем. Теоретически можно брать большие значения  $N$ , но тогда необходимо привлекать внешнюю память, что резко увеличит время выполнения программ из-за постоянного обращения к ней. В случае использования полиномиальных координатных

функций скорость сходимости зависит лишь от свойств решения (его гладкости) и может быть сколь угодно большой.

Целесообразно выбирать в качестве координатных функций многочлены Лежандра [9], домноженные при необходимости (для выполнения соответствующих граничных условий в решаемой задаче) на  $(1-x)$  и  $(1+x)$  в подходящих степенях, т. е. использовать функции вида

$$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta P_n(x), \quad \alpha, \beta = 0, 1, \quad n = 0, 1, \dots$$

Многочлены Лежандра  $P_n(x)$  легко вычисляются с помощью трехчленных рекуррентных соотношений, а производные выбранных функций просто выражаются через многочлены Якоби.

При формировании матриц СЛАУ наряду со значениями координатных функций и их производных, точно определяемых описанным способом, приходится многократно вычислять интегралы вида

$$\int_{-1}^1 \varphi_m^{(k)}(x) \varphi_n^{(l)}(x) dx$$

для всевозможных значений параметров  $k, l, m, n$ . Теоретически эту операцию можно осуществить аналитически, так как интегрируются многочлены, к тому же относительно небольшие по абсолютной величине на отрезке интегрирования, однако этот путь неустойчив из-за большого разброса коэффициентов многочленов.

Для устойчивого вычисления указанных интегралов используем квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности [10] вида

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k).$$

Они точны для многочленов степени не выше  $2n-1$ , и потому требуемые величины вычисляются практически точно при подходящем выборе  $n$ . Узлы  $A_k$  и коэффициенты  $x_k$  не зависят от интегрируемой функции и могут быть вычислены заранее. Аналогичные формулы используются и для вычисления контурных интегралов (контур задается набором лежащих на нем точек, и на каждом отрезке между двумя соседними точками он считается прямолинейным).

Для решения СЛАУ реализован метод Жордана [11] с выбором главного элемента по всей матрице. Он оформлен в виде отдельной процедуры на языке C++.

При решении задачи об упругих собственных колебаниях применение метода Ритца приводит к однородной СЛАУ, в которой все элементы матрицы зависят от  $\omega^2$ . Эта матрица имеет вид  $\mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M}$ , где  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{M}$  — матрица жесткости и матрица масс, не зависящие от  $\omega$ . Они для экономии времени вычисляются один раз и затем используются многократно.

Необходимым условием существования нетривиальных решений однородной системы является равенство нулю ее определителя, т. е.

$$F(\omega) \equiv \det(\mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0.$$

Это и есть уравнение для определения собственных частот колебаний. Будем их находить следующим образом: зададим некоторый диапазон  $[\omega_{\text{нач}}, \omega_{\text{кон}}]$ , в котором, предположительно, расположена искомая частота, и пробегаем его с некоторым шагом, каждый раз вычисляя знак определителя  $F(\omega)$ . Если знак меняется, соответствующий частичный интервал содержит частоту, при которой определитель равен нулю. Далее повторяем описанную процедуру для найденного частичного интервала, уменьшая шаг. Затем по найденной таким способом с требуемой точностью частоте находим какое-либо нетривиальное решение однородной системы, оно и определит соответствующую форму собственных колебаний.

В случае затухающих собственных колебаний искомые частоты суть комплексные числа, и указанный способ их нахождения неприменим.

Выберем в качестве начального приближения к искомой комплексной частоте комплексное число  $\omega^{(0)}$ , вещественная часть которого равна частоте упругих собственных колебаний с модулями, равными вещественным частям соответствующих комплексных модулей, а мнимая часть — произвольное значение в пределах ожидаемого коэффициента механических потерь, после чего построим итерационную последовательность

$$\omega^{(k+1)} = \omega^{(k)} - \frac{F(\omega^{(k)})}{F'(\omega^{(k)})} - \frac{F^2(\omega^{(k)})F''(\omega^{(k)})}{2F'^3(\omega^{(k)})}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Эта последовательность сходится с третьим порядком точности к искомой частоте, т. е. погрешность на следующем шаге приближенно равна кубу предыдущей погрешности [11].

Необходимые в расчетах производные точно определить невозможно, поэтому они находятся приближенно по формулам численного дифференцирования второго порядка точности

$$F'(z) \approx \frac{F(z + h_z) - F(z - h_z)}{2h_z}, \quad F''(z) \approx \frac{F(z + h_z) - 2F(z) + F(z - h_z)}{h_z^2}$$

при подходящем выборе шага  $h_z$  в зависимости от точки  $z$ .

Следовательно, на каждом шаге итерации требуется трижды вычислять значение определителя большого порядка, что и определяет основное время работы программы.

Отметим, что на величину определителя влияют его порядок  $N_1 = 6N$ , значение искомой частоты  $\omega$ , а также способ нормировки уравнений, позволяющий избежать промежуточных переполнений и исчезновений порядков чисел. С ростом  $N_1$  определитель быстро убывает по модулю. Простейший эффективный способ масштабирования состоит в умножении каждой строки определителя на одно и то же число  $a$ , в результате чего определитель изменится в  $a^{N_1}$  раз. Например, при  $a = 2$  и  $N_1 = 1000$  имеем  $a^{N_1} \approx 10^{300}$ . Следовательно, достаточно взять  $a \in [1, 2]$  для того, чтобы удерживать величину определителя в разумных пределах.

## Литература

1. Librescu L., Song O. Thin-Walled Composite Beams. Theory and Application. Springer, 2006. 600 p.
2. Librescu L., Song O. Free Vibration of Anisotropic Composite Thin-Walled Beams of Closed Cross-Section Contour // Journal of Sound and Vibration. 1993. Vol. 167, N 1. P. 129–147.

3. Armanios E. A., Badir A. M. Free Vibration Analysis of Anisotropic Thin-Walled Closed-Section Beams // *AIAA Journal*. 1995. Vol. 33, N 10. P. 1905–1910.
4. Lentz W. K., Armanios E. A., Badir A. M. Constrained Optimization of Thin-Walled Composite Beams with Coupling // *Proceedings of the AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC 37<sup>th</sup> Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*. 1996. P. 2326–2334.
5. Suresh R., Malhotra S. K. Vibration and Damping Analysis of Thin-Walled Box Beams // *Journal of Sound and Vibration*. 1998. Vol. 215, N 2. P. 201–210.
6. Рябов В. М., Ярцев Б. А. Затухающие колебания тонкостенных стержней из полимерных композитов. I. Постановка задачи // *Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1*. 2001. Вып. 2, № 9. С. 91–97.
7. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М., 1979. 744 с.
8. Treviso A., Van Genechten B., Mundo D., Tournour M. Damping in composite materials: Properties and models // *Composites. Part B*. Vol. 78. 2015. P. 144–152.
9. Даугавет И. К. Теория приближенных методов. Линейные уравнения. СПб., 2006. 228 с.
10. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. М., 1967. 500 с.
11. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. М., 1962. Т. 2. 640 с.

Статья поступила в редакцию 18 ноября 2015 г.

#### Сведения об авторах

Рябов Виктор Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор; v.ryabov@spbu.ru  
 Ярцев Борис Александрович — доктор технических наук, начальник сектора; boris\_yar@mail.ru

### NATURAL DAMPED VIBRATIONS OF ANISOTROPIC COMPOSITE BOX BEAMS. 1. STATEMENT OF THE PROBLEM

Victor M. Ryabov<sup>1</sup>, Boris A. Yartsev<sup>2</sup>

<sup>1</sup> St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; v.ryabov@spbu.ru

<sup>2</sup> Krylov State Research Center, Moskovskoye shosse, 44, St. Petersburg, 196158, Russian Federation; boris\_yar@mail.ru

Research of natural vibrations of anisotropic composite box beams are an interesting practical problem, which previously was not discussed in detail. The authors of previously published works, as a rule, are generally limited to the consideration of the two-three lower vibrations' modes. Such a small number of modes analyzed does not allow an overall picture arising in such structures modal interactions involving multiple mutual transformations. The latter circumstance was the reason for writing this paper. Its first part contains a detailed description of the mathematical model of the problem, while the second part shows the results of calculations and their detailed discussion. Refs 11. Figs 2.

*Keywords:* composite materials, natural vibrations, coupled vibrations.

#### References

1. Librescu L., Song O., *Thin-Walled Composite Beams. Theory and Application* (Springer, 2006).
2. Librescu L., Song O., “Free Vibration of Anisotropic Composite Thin-Walled Beams of Closed Cross-Section Contour”, *Journal of Sound and Vibration* **167**(1), 129–147 (1993).
3. Armanios E. A., Badir A. M., “Free Vibration Analysis of Anisotropic Thin-Walled Closed-Section Beams”, *AIAA Journal* **33**(10), 1905–1910 (1995).
4. Lentz W. K., Armanios E. A., Badir A. M., “Constrained Optimization of Thin-Walled Composite Beams with Coupling”, *Proceedings of the AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC 37<sup>th</sup> Structures, Structural Dynamics and Materials Conference* 2326–2334 (1996).
5. Suresh R., Malhotra S. K., “Vibration and Damping Analysis of Thin-Walled Box Beams”, *Journal of Sound and Vibration* **215**(2), 201–210 (1998).
6. Ryabov V. M., Yartsev B. A., “Damped Vibration of Composite Thin-Walled Beams. I. Statement of the Problem”, *Vestnik St. Petersburg University. Ser. 1* Issue 2(9), 91–97 (2001) [in Russian].
7. Rabotnov Yu. N., *Mechanics of Deformable Solids* (Moscow, 1979) [in Russian].
8. Treviso A., Van Genechten B., Mundo D., Tournour M., “Damping in composite materials: Properties and models”, *Composites. Part B* **78**, 144–152 (2015).
9. Daugavet I. K., *The Theory of Approximate Methods. Linear Equations* (St. Petersburg, 2006) [in Russian].
10. Krylov V. I. *Approximate Calculation of Integrals* (Dover, 2006).
11. Berezin I. S., Zhidkov N. P. *Methods of Computations* **2** (Moscow, Fizmatlit, 1962) [in Russian].