УДК 517.586 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 3 (61). 2016. Вып. 2

ОЦЕНКИ СУММ ИНТЕГРАЛОВ ОТ МНОГОЧЛЕНА ЛЕЖАНДРА*

К. В. Холшевников[1,2], *В. Ш. Шайдулин*[1,3]

[1] Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9
[2] Томский государственный университет,
Российская Федерация, 634050, Томск, пр. Ленина, 36
[3] Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН,
Российская Федерация, 196140, Санкт-Петербург, Пулковское шоссе, 65/1

Получены оценки сумм

$$R_{nk}(x) = \sum_{m=n}^{\infty} P_{mk}(x).$$

Здесь

$$P_{n0}(x) = P_n(x), \qquad P_{nk}(x) = \int\limits_{-1}^{x} P_{n,k-1}(y)dy,$$

где P_n — многочлен Лежандра со стандартной нормировкой $P_n(1) = 1$. При $k = 1$ в основном промежутке $[-1, 1]$ сумма убывает с ростом n как n^{-1}, а в полуинтервале $[-1, 1)$ — как $n^{-3/2}$. При $k > 1$ точка $x = 1$ не нуждается в выкалывании. Сумма убывает как $n^{-k-1/2}$. Более того, небольшое увеличение мультипликативной константы позволяет получить оценку

$$|R_{nk}(\cos\theta)| < \frac{C \sin^{k-3/2}\theta}{n^{k+1/2}},$$

где C слабо зависит от k, но не от n, θ. Попутно выведен интеграл типа Мелера—Дирихле для $R_{nk}(\cos\theta)$. Библиогр. 6 назв. Ил. 3. Табл. 1.

Ключевые слова: многочлены Лежандра, оценка сумм, оценка остатка ряда.

Введение. Полученные с середины XIX века интегральные представления, асимптотические ряды и оценки многочленов Лежандра $P_n(\cos\theta)$ и их сумм [1, 2] широко используются в математике и ее приложениях. Описание гравитации компактных небесных тел потребовало аналогичных оценок сумм интегралов от многочленов Лежандра. В работе [3] получено асимптотическое разложение указанных сумм. Оно содержит степени $\sin\theta$ в знаменателях последовательных слагаемых и потому пригодно лишь в интервале $0 < \theta < \pi$. Здесь мы получим как согласованную с асимптотикой оценку в указанном интервале, так и равномерную оценку на сегменте $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Обе оценки точны относительно показателя степени n. Результаты будут использованы при описании свойств ряда по сферическим функциям, представляющего ньютоновский потенциал небесных тел.

Перейдем к строгой постановке. Положим

$$P_{n0}(x) = P_n(x), \qquad P_{nk}(x) = \int\limits_{-1}^{x} P_{n,k-1}(x')\,dx', \qquad R_{nk}(x) = \sum_{m=n}^{\infty} P_{mk}(x), \tag{1}$$

где P_n — многочлен Лежандра со стандартной нормировкой $P_n(1) = 1$. Считаем ниже k произвольным фиксированным натуральным числом, $n \geqslant k$. Ряд в (1) сходится

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 14-02-00804) и СПбГУ (грант 6.37.341.2015).

абсолютно и равномерно относительно $k \geqslant 1$, $n \geqslant k$, $x \in [-1, 1]$, поскольку [4]

$$|P_{nk}(x)| \lesssim \frac{\sqrt{2/\pi}}{n^{k+1/2}}\,, \tag{2}$$

где использован символ *асимптотически меньше.* Из (2) сразу следует

$$|R_{nk}(x)| \lesssim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{n-1/2}^{\infty} \frac{dm}{m^{k+1/2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{(k-1/2)(n-1/2)^{k-1/2}} \sim \frac{\sqrt{2/\pi}}{(k-1/2)n^{k-1/2}}\,. \tag{3}$$

Сравним (2), (3) с асимптотическим разложением [3]

$$R_{nk}(\cos\theta) \asymp \frac{\sin^{k-1/2}\theta}{\sqrt{2\pi}n^{k+1/2}\sin(\theta/2)} \left\{ \cos\left[(n+1)\theta + \left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} \right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n\sin\theta}\right) \right\}. \tag{4}$$

Показатели степени n^{σ} в (2) и (4) совпадают ($\sigma = k + 1/2$), тогда как в (3) этот показатель на единицу меньше. Зато (3) справедливо при $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, тогда как (4) — только на части этого отрезка $\varepsilon \leqslant \theta \leqslant \pi - \varepsilon$, на которой $(n\sin\theta)^{-1}$ можно считать малой величиной.

Поставим две задачи: получить неравенство, соответствующее асимптотике (4); получить неравенство (3) с точным показателем степени n^{σ}. Предварительно выведем одну полезную формулу.

Интеграл типа Мелера—Дирихле для $\boldsymbol{R_{nk}}$. Воспользуемся подобным интегралом [3] для P_{nk}:

$$P_{nk}(\cos\theta) = \frac{2^{k+1/2}}{\pi(2k-1)!!} \Im \int_{\theta}^{\pi} (\cos\theta - \cos\varphi)^{k-1/2} \exp i\left(n + \frac{1}{2}\right)\varphi\, d\varphi. \tag{5}$$

Заметим, что представление (5) справедливо и при $\theta = 0$, $\theta = \pi$, когда $P_{nk}(\pm 1) = 0$. Действительно, во втором случае имеем дело с интегралом по стянутому в точку промежутку. В первом случае первый сомножитель подынтегральной функции равен

$$\begin{aligned}(1-\cos\varphi)^{k-1/2} = 2^{k-1/2}\sin^{2k-1}\frac{\varphi}{2} = \frac{(-1)^k i}{2^{k-1/2}}\left(\exp\frac{i\varphi}{2} - \exp\frac{-i\varphi}{2}\right)^{2k-1} = \\ = \frac{(-1)^k i}{2^{k-1/2}} \sum_{m=0}^{2k-1} \binom{2k-1}{m} (-1)^{2k-1-m} \exp i\left(m - k + \frac{1}{2}\right)\varphi.\end{aligned}$$

Подынтегральная функция представлена линейной комбинацией с вещественными коэффициентами гармоник $i\exp is\varphi$, $s = n+1-k, \ldots, n+k$. Мнимая часть гармоники равна $\cos s\varphi$ и исчезает после интегрирования.

Образуем сумму

$$\sum_{m=n}^{s-1} P_{mk}(\cos\theta) = T_{nk}(\theta) - T_{sk}(\theta), \tag{6}$$

где

$$T_{sk} = \frac{2^{k+1/2}}{\pi(2k-1)!!} \Im \int_{\theta}^{\pi} \frac{(\cos\theta - \cos\varphi)^{k-1/2}}{1 - \exp i\varphi} \exp\frac{i\varphi}{2} \exp is\varphi\, d\varphi.$$

Представим знаменатель в форме

$$1 - \exp i\varphi = 1 - \cos\varphi - i\sin\varphi = -i\sqrt{2(1-\cos\varphi)}\exp\frac{i\varphi}{2},$$

откуда

$$T_{sk} = \frac{2^k}{\pi(2k-1)!!}\,\Re\int\limits_\theta^\pi h_k(\theta,\varphi)\exp is\varphi\, d\varphi, \tag{7}$$

где

$$h_k(\theta,\varphi) = \frac{(\cos\theta-\cos\varphi)^{k-1/2}}{(1-\cos\varphi)^{1/2}}.$$

Вычислим производную

$$\frac{\partial h_k}{\partial\varphi} = \frac{\sin\varphi(\cos\theta-\cos\varphi)^{k-3/2}}{2(1-\cos\varphi)^{3/2}}\big[(2k-1)(1-\cos\varphi)-(\cos\theta-\cos\varphi)\big] > 0.$$

Величина h_k как функция от φ непрерывна в промежутке $[\theta,\pi]$ и возрастает от 0 до $(1+\cos\theta)^{k-1/2}/\sqrt{2}$ при $0<\theta<\pi$. При $\theta=\pi$, $\varphi=\pi$ она равна нулю, а при $\theta=0$ равна $(1-\cos\varphi)^{k-1}$. Таким образом, h_k как функция двух переменных непрерывна в треугольнике $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, $\theta\leqslant\varphi\leqslant\pi$ при $k>1$. При $k=1$ она ограничена там и непрерывна за исключением точки $\theta=\varphi=0$ (рис. 1).

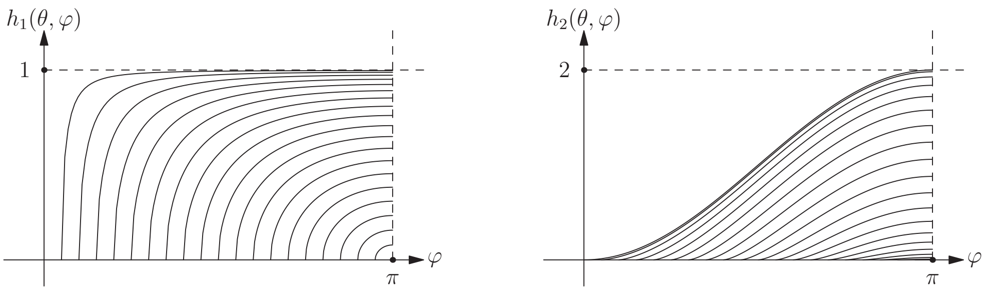

Рис. 1. Семейство функций $h_1(\theta_s,\varphi)$ (слева) и $h_2(\theta_s,\varphi)$ (справа); $\theta_s = s\pi/20, s = 0 \div 20$; значение $s=0$ для h_1 пропускается.

При фиксированных k,θ и переменном s правая часть (7) определяет с точностью до постоянного множителя коэффициенты Фурье некоторой интегрируемой с квадратом функции. Эти коэффициенты стремятся к нулю при $s\to\infty$. Переходя к пределу, получим

$$R_{nk}(\cos\theta) = \frac{2^k}{\pi(2k-1)!!}\,\Re\int\limits_\theta^\pi F_{nk}(\theta,\varphi)\,d\varphi, \qquad F_{nk} = h_k(\theta,\varphi)\exp in\varphi. \tag{8}$$

В частности,

$$R_{n1}(\cos\theta) = \frac{2}{\pi}\,\Re\int\limits_\theta^\pi F_{n1}(\theta,\varphi)\,d\varphi, \quad F_{n1} = \sqrt{\frac{\cos\theta-\cos\varphi}{1-\cos\varphi}}\exp in\varphi. \tag{9}$$

Преобразование интеграла (9). Перейдем к оценке R_{nk}. Начнем со случая $k = 1$. Фиксируем $n \geqslant 1$, $\theta \in [0, \pi]$. Функция $F_{n1}(\theta, \varphi)$, рассматриваемая как функция комплексной переменной $\varphi = x + iy$, голоморфна в полуполосе $\theta \leqslant x \leqslant \pi$, $y \geqslant 0$ за исключением точки $\varphi = \theta$, в окрестности которой она ограничена. Поэтому интеграл (9) можно взять по контуру $ABCD$ (рис. 2).

Вычислим модули встречающихся функций:

$$\begin{aligned}
&|\cos\theta - \cos\varphi|^2 = \cos^2\theta - 2\cos\theta\cos x\,\mathrm{ch}\,y + \mathrm{sh}^2\,y + \cos^2 x \sim (1/4)\exp 2y,\\
&|1 - \cos\varphi|^2 = 1 - 2\cos x\,\mathrm{ch}\,y + \mathrm{sh}^2\,y + \cos^2 x \sim (1/4)\exp 2y,\\
&|F_{n1}(\theta, \varphi)| \sim \exp(-ny),
\end{aligned}$$

где мы отметили асимптотику при $y \to \infty$. Видим, что $F_{n1}(\theta, \varphi)$ стремится к нулю при $y \to \infty$ равномерно по $n \geqslant 1$, $\theta \in [0, \pi]$, $x \in [\theta, \pi]$. Отодвигая перекладину BC на бесконечность, получим

$$\Re \int\limits_{\theta}^{\pi} F_{n1}(\theta, \varphi)\,d\varphi = -\Im \int\limits_0^{\infty} F_{n1}(\theta, \theta + iy)\,dy + \Im \int\limits_0^{\infty} F_{n1}(\theta, \pi + iy)\,dy.$$

При $\varphi = \pi + iy$ имеем

$$\cos\theta - \cos\varphi = \cos\theta + \mathrm{ch}\,y \geqslant 0, \qquad 1 - \cos\varphi = 1 + \mathrm{ch}\,y \geqslant 2,$$

$$\exp in\varphi = (-1)^n \exp(-ny), \qquad \Im F_{n1}(\theta, \pi + iy) = 0,$$

и второй интеграл пропадает.

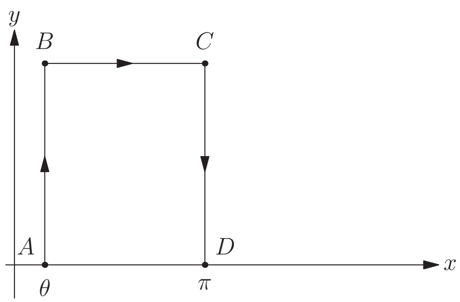

Рис. 2. Путь интегрирования в плоскости φ.

Итак,

$$R_{n1}(\cos\theta) = -\frac{2}{\pi}\,\Im \exp in\theta \int\limits_0^{\infty} G_n(\theta, y)\,dy, \tag{10}$$

$$G_n = \sqrt{\frac{\cos\theta(1 - \mathrm{ch}\,y) + i\sin\theta\,\mathrm{sh}\,y}{(1 - \cos\theta\,\mathrm{ch}\,y) + i\sin\theta\,\mathrm{sh}\,y}}\,\exp(-ny). \tag{11}$$

Пусть $\theta = 0$ или $\theta = \pi$. Тогда имеем

$$G_n(0, y) = \exp(-ny), \qquad G_n(\pi, y) = \mathrm{th}\,\frac{y}{2}\exp(-ny),$$

и мнимая часть выражения (10) равна нулю. В результате получим

$$R_{n1}(-1) = R_{n1}(1) = 0, \tag{12}$$

как и должно быть, поскольку $P_{n1}(\pm 1) = 0$.

Пусть $0 < \theta < \pi$. Предположение, что $G_n(\theta, y)$ вещественно или чисто мнимо, приводит к уравнению

$$\sin\theta \operatorname{sh} y[\cos\theta(1 - \operatorname{ch} y) - (1 - \cos\theta \operatorname{ch} y)] = 0,$$

что при $y \neq 0$ дает уже известное решение $\sin\theta = 0$. Таким образом, получим

$$G_n(\theta, y) = |G_n(\theta, y)| \exp i\psi_n(\theta, y), \qquad \psi_n \neq \frac{s\pi}{2}\,.$$

По непрерывности функция ψ_n находится в интервале $s\pi/2 < \psi_n < (s+1)\pi/2$ при подходящем s.

Формула (10) принимает вид

$$R_{n1} = -\frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty |G_n(\theta, y)| \sin[n\theta + \psi_n(\theta, y)]\, dy.$$

По теореме о среднем имеем

$$R_{n1}(\cos\theta) = -\frac{2}{\pi} \sin\left[n\theta + \bar{\psi}_n(\theta)\right] \int\limits_0^\infty |G_n(\theta, y)|\, dy, \tag{13}$$

где

$$\min_y \psi_n(\theta, y) < \bar{\psi}_n(\theta) < \max_y \psi_n(\theta, y).$$

Осталось найти модуль и аргумент G_n.

Оценка R_{n1}. Преобразуем выражения

$$\cos\theta(1 - \operatorname{ch} y) + i\sin\theta \operatorname{sh} y = 2\operatorname{sh}\frac{y}{2}\sqrt{\operatorname{sh}^2\frac{y}{2} + \sin^2\theta}\, \exp i\alpha,$$

$$\cos\alpha = -\frac{\cos\theta \operatorname{sh} y/2}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 y/2 + \sin^2\theta}}\,, \qquad \sin\alpha = \frac{\sin\theta \operatorname{ch} y/2}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 y/2 + \sin^2\theta}}\,;$$

$$(1 - \cos\theta \operatorname{ch} y) + i\sin\theta \operatorname{sh} y = 2\left(\operatorname{sh}^2\frac{y}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}\right)\exp i\beta,$$

$$\cos\beta = \frac{1 - \cos\theta \operatorname{ch} y}{2(\operatorname{sh}^2 y/2 + \sin^2\theta/2)}\,, \qquad \sin\beta = \frac{\sin\theta \operatorname{sh} y}{2(\operatorname{sh}^2 y/2 + \sin^2\theta/2)}\,.$$

Для оценки аргумента G_n вычислим тригонометрические функции

$$\cos 2\psi_n = \cos(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{sh} y/2(\operatorname{ch} y - \cos\theta + \sin^2\theta)}{2\left(\operatorname{sh}^2 y/2 + \sin^2\theta/2\right)\sqrt{\operatorname{sh}^2 y/2 + \sin^2\theta}} \geqslant 0,$$

$$\sin 2\psi_n = \sin(\alpha - \beta) = \frac{\sin\theta(1 - \cos\theta)\operatorname{ch} y/2}{2\left(\operatorname{sh}^2 y/2 + \sin^2\theta/2\right)\sqrt{\operatorname{sh}^2 y/2 + \sin^2\theta}} \geqslant 0.$$

Если $0 < \theta < \pi$, имеем $0 < \alpha - \beta < \pi/2$, т. е.

$$0 < \psi_n(\theta, y) < \pi/4\,, \qquad 0 < \bar{\psi}_n(\theta) < \pi/4\,. \tag{14}$$

Перейдем к модулю $G_n(\theta, y)$

$$|G_n(\theta, y)| = \sqrt[4]{f(u,v)}\exp(-ny), \tag{15}$$

где введены обозначения

$$u = \sin^2\frac{\theta}{2}\,, \quad v = \operatorname{sh}^2\frac{y}{2}\,, \quad 0 \leqslant u \leqslant 1, \quad v \geqslant 0, \quad f(u,v) = \frac{v(v + 4u - 4u^2)}{(u+v)^2}\,.$$

Очевидно, что справедливо неравенство

$$\frac{4}{3} - f = \frac{(v-2u)^2 + 12u^2 v}{3(u+v)^2} \geqslant 0, \qquad f \leqslant \frac{4}{3}\,.$$

Поэтому (13), (15) влекут

$$|R_{n1}(\cos\theta)| < \frac{2}{\pi}\sqrt[4]{\frac{4}{3}}\int\limits_0^\infty \exp(-ny)\,dy$$

или

$$|R_{n1}(\cos\theta)| < \frac{C}{n}\,, \qquad C = \frac{2}{\pi}\sqrt[4]{\frac{4}{3}} = 0.684092. \tag{16}$$

Пусть теперь $0 < \theta \leqslant \pi$, $0 < u \leqslant 1$. Вычислим производную

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{f(u,v)}{v}\right) = \frac{8u^2 - 7u - v}{(u+v)^3}\,.$$

Если $u \leqslant 7/8$, функция $v^{-1}f$ как функция от v убывает,

$$\max_v \frac{f(u,v)}{v} = \left.\frac{v + 4u - 4u^2}{(u+v)^2}\right|_{v=0} = \frac{4}{u} - 4 = 4\operatorname{ctg}^2\frac{\theta}{2}\,.$$

Если $u > 7/8$, наибольшее значение $v^{-1}f$ принимает при $v = 8u^2 - 7u$:

$$\max_v \frac{f(u,v)}{v} = \frac{f(u, 8u^2 - 7u)}{8u^2 - 7u} = \frac{1}{4u(4u-3)} < \frac{4}{7}\,.$$

В результате получим

$$f(u,v) \leqslant f_1(\theta)v, \tag{17}$$

$$f_1(\theta) = \begin{cases} \frac{4}{u} - 4 = 4\operatorname{ctg}^2\frac{\theta}{2}\,, & \text{если } u \leqslant \frac{7}{8}\,, \quad \theta \leqslant 138.59^\circ, \\ \frac{1}{4u(4u-3)} = \left[4\sin^2\frac{\theta}{2}\left(4\sin^2\frac{\theta}{2} - 3\right)\right]^{-1}, & \text{если } u \geqslant \frac{7}{8}\,, \quad \theta \geqslant 138.59^\circ. \end{cases}$$

Величина f_1 убывает от ∞ до $1/4$ с ростом u от 0 до 1, или, что то же, с ростом θ от 0 до π (рис. 3). В точке $u = 7/8$ гладкость сохраняется, рвется лишь вторая производная. Пользуясь (13), (15), (17), получим

$$|R_{n1}(\cos\theta)| < \frac{2}{\pi}\sqrt[4]{f_1}\int\limits_0^\infty \sqrt{\operatorname{sh}\frac{y}{2}}\,\exp(-ny)\,dy.$$

Оценка (33) последнего интеграла приведена в приложении. Окончательно,

$$|R_{n1}(\cos\theta)| < \frac{2\sqrt[4]{f_1(\theta)}g(n)}{\pi n^{3/2}} \leqslant \frac{2\sqrt[4]{f_1(\theta)}g(n_0)}{\pi n^{3/2}}, \quad n \geqslant n_0 \geqslant 1, \quad 0 < \theta \leqslant \pi. \tag{18}$$

Функция $g(\nu)$, некоторые ее значения и асимптотика приведены в приложении.

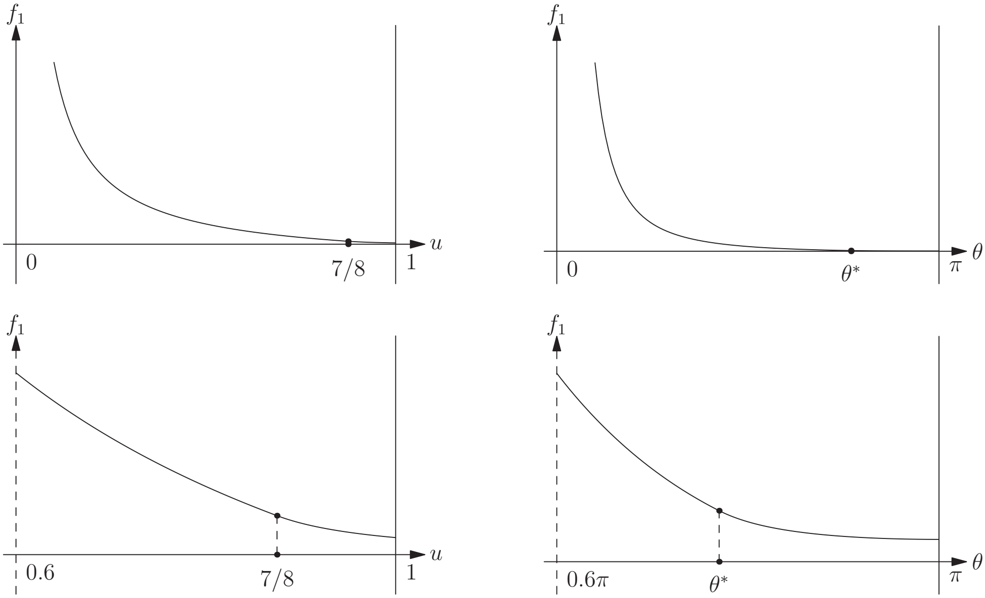

Рис. 3. Величина f_1 как функция u (слева) и θ (справа) в разных масштабах; $\theta^* = 138.59°$.

Оценка (18) согласуется с асимптотикой (4) при $k = 1$. Обратим внимание, что точка $\theta = \pi$ не исключается.

Докажем точность порядка убывания левой части (16), т. е. невозможность замены знаменателя n на n^σ, $\sigma > 1$, за счет увеличения постоянной C.

Фиксируем $n > 2$,

$$\theta = \frac{\pi}{2n}, \quad u = \sin^2\frac{\pi}{4n}, \quad \frac{\pi^2}{16n^2}\left(1 - \frac{\pi^2}{432}\right) \leqslant \frac{\pi^2}{16n^2}\left(1 - \frac{\pi^2}{48n^2}\right) < u < \frac{\pi^2}{16n^2}. \tag{19}$$

Пусть $v \leqslant 1/n^2 = v_0 = \operatorname{sh}^2 y_0/2$. Тогда по доказанному справедливо

$$\frac{f(u,v)}{v} \geqslant \left.\frac{v + 4u(1-u)}{(u+v)^2}\right|_{v=1/n^2} > \left[\frac{1}{n^2} + \frac{\pi^2}{4n^2}\left(1 - \frac{\pi^2}{432}\right)^2\right]\left(\frac{1}{n^2} + \frac{\pi^2}{16n^2}\right)^{-2} = C_1 n^2, \tag{20}$$

$$C_1 = \left[1 + \frac{\pi^2}{4}\left(1 - \frac{\pi^2}{432}\right)\right]\left(1 + \frac{\pi^2}{16}\right)^{-2} = 1.304806.$$

Итак, получаем

$$f(u,v) > C_1 n^2 v = C_1 n^2 \operatorname{sh}^2\frac{y}{2} > \frac{C_1}{4} n^2 y^2,$$

$$\int_0^{y_0} \sqrt[4]{f(u,v)}\exp(-ny)\,dy > \sqrt[4]{\frac{C_1 n^2}{4}} \int_0^{y_0} \sqrt{y}\exp(-ny)\,dy. \tag{21}$$

Из разложения арксинуса следует

$$\frac{y_0}{2} > \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{6n^2}\right) > \frac{53}{54n} := \frac{y_1}{2}\,.$$

Поэтому выполняется

$$\int\limits_0^{y_0} \sqrt[4]{f(u,v)}\exp(-ny)\,dy > \sqrt[4]{\frac{C_1 n^2}{4}} \int\limits_0^{y_1} \sqrt{y}\exp(-ny)\,dy = \frac{C_2}{n}\,, \tag{22}$$

где

$$C_2 = \sqrt[4]{\frac{C_1}{4}} \int\limits_0^{53/27} \sqrt{t}\exp(-t)\,dt = 0.489207.$$

Пусть теперь $v \geqslant 1/n^2$. Производная

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{2u}{(u+v)^3}\big[2u(1-u) - v(1-2u)\big]$$

показывает, что f принимает наименьшее значение либо при $v = \infty$, где она равна единице, либо при $v = 1/n^2$. Последнее значение мы уже оценили. Согласно (20) оно больше единицы. Следовательно, $f > 1$ при $v \geqslant 1/n^2$. Поэтому имеем

$$\int\limits_{y_0}^{\infty} \sqrt[4]{f(u,v)}\exp(-ny)\,dy > \int\limits_{y_0}^{\infty} \exp(-ny)\,dy = \frac{\exp(-ny_0)}{n} > \frac{1}{e^2 n}\,. \tag{23}$$

Складывая (22) и (23), получим

$$\int\limits_0^{\infty} \sqrt[4]{f(u,v)}\exp(-ny)\,dy > \frac{e^{-2} + C_2}{n}\,. \tag{24}$$

Обратимся к аргументу синуса в (13). Согласно (19) $n\theta = \pi/2$. С учетом (14) имеем

$$\sin[n\theta + \bar{\psi}_n(\theta)] = \cos\bar{\psi}_n(\theta) > \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Окончательно получаем

$$\left|R_{n1}\left(\cos\frac{\pi}{2n}\right)\right| > \frac{C_3}{n}\,, \qquad C_3 = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\left(C_2 + \frac{1}{e^2}\right) = 0.281143. \tag{25}$$

Оценка R_{nk} при $k > 1$. При $k > 1$ оценка R_{nk} получается совсем просто. Подставим в последнюю формулу (1) представление (6) из [4]:

$$R_{nk} = \sum_{m=n}^{\infty}\left(\frac{P_{m+1,k-1}}{2m+1} - \frac{P_{m-1,k-1}}{2m+1}\right) =$$
$$= -\frac{P_{n-1,k-1}}{2n+1} - \frac{P_{n,k-1}}{2n+3} + \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{P_{m,k-1}}{(m-1/2)(m+3/2)}\,. \tag{26}$$

Согласно (2) имеем

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}R_{nk} \lesssim \frac{1}{2(n+1/2)(n-1)^{k-1/2}} + \frac{1}{2(n+3/2)n^{k-1/2}} + \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^{k+3/2}}\,. \tag{27}$$

Под знаком суммы стоит выпуклая функция, так что выполняется

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^{k+3/2}} < \int_{n+1/2}^{\infty} \frac{dm}{m^{k+3/2}} = \frac{1}{(k+1/2)(n+1/2)^{k+3/2}}\,.$$

Окончательно получаем

$$|R_{nk}(\cos\theta)| \lesssim \frac{C_4}{n^{k+1/2}}\,, \qquad C_4 = \frac{2k+3}{2k+1}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,. \tag{28}$$

При $k=2$ и $n>k=3$ в (2) можно оставить знак строгого неравенства [4]. Сделать это в (28) мешает первое слагаемое в (27). Однако при $k=2, k=3$ и $n>k=4$ справедливо

$$|R_{nk}(\cos\theta)| < \frac{C_4}{(n-1)^{k+1/2}}\,. \tag{29}$$

При $k=2, n>4$ здесь можно заменить $(n-1)^{k+1/2}$ на $(n-1/2)^{k+1/2}$, поскольку $(n+1/2)(n-1)^{3/2} > (n-1/2)^{5/2}$.

Перейдем к оценкам, содержащим множитель $\sin\theta$. Приятное отличие от случая $k=1$ и тем более $k=0$ заключается в его появлении в числителе, а не знаменателе. Платой за это служит увеличение константы C_4, точнее замена ее на медленно (как $k^{1/6}$) растущую функцию от k. Согласно [4] в оценке (2) можно заменить постоянную $\sqrt{2/\pi}$ на $A_{k-1}\sin^{k-3/2}\theta$. Таким образом, справедливо

$$|R_{nk}(\cos\theta)| \lesssim \frac{C_5\sin^{k-3/2}\theta}{n^{k+1/2}}\,, \qquad C_5 = \frac{2k+3}{2k+1}\,A_{k-1}\,. \tag{30}$$

Свойства последовательности A_k изучены в [4]. Там же приведена таблица их первых значений. В частности, $0.825 < A_k < 1$ при $k<8$. Несколько усложнив оценку (30), можно получить строгое неравенство

$$|R_{nk}(\cos\theta)| < \frac{C_5\sin^{k-3/2}\theta}{\bar{n}^{k+1/2}}\,, \tag{31}$$

где

$$\bar{n} = \min\left\{n-1,\ \sqrt{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(k^2-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{4}{\pi^2}\right)}\right\}.$$

Приложение. Свойства одного интеграла. Пусть

$$I(\nu) = \int_0^{\infty} \sqrt{\operatorname{sh} x}\,\exp(-2\nu x)\,dx, \qquad g(\nu) = \nu^{3/2}I(\nu), \qquad \nu > \frac{1}{4}\,. \tag{32}$$

Заметим, что сходимость всех несобственных интегралов в этом разделе локально-равномерна относительно $\nu \in (1/4,\,\infty)$.

Вычислим производную

$$\frac{2}{\sqrt{\nu}}\, g'(\nu) = 3\int\limits_0^\infty \sqrt{\operatorname{sh} x}\exp(-2\nu x)\, dx - 4\nu\int\limits_0^\infty x\sqrt{\operatorname{sh} x}\exp(-2\nu x)\, dx.$$

Преобразуя второе слагаемое интегрированием по частям, получим

$$\frac{2}{\sqrt{\nu}}\, g'(\nu) = \int\limits_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh} x}}(\operatorname{sh} x - x\operatorname{ch} x)\exp(-2\nu x)\, dx < 0,$$

поскольку $\operatorname{sh} x - x\operatorname{ch} x < 0$ при $x > 0$. Следовательно, $g(\nu)$ убывает. Отсюда имеем

$$I(\nu) = \frac{g(\nu)}{\nu^{3/2}} \leqslant \frac{g(\nu_0)}{\nu^{3/2}}\,, \quad \nu \geqslant \nu_0 > \frac{1}{4}\,. \tag{33}$$

Интеграл (32) можно выразить через бета-функцию Эйлера. Подстановка

$$y = \operatorname{th} x, \quad x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}\,, \quad \exp(-2\nu x) = \left(\frac{1-y}{1+y}\right)^\nu, \quad \operatorname{sh} x = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,, \quad dx = \frac{dy}{1-y^2}$$

преобразует его к виду

$$I(\nu) = \int\limits_0^1 \frac{y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}}\, dy, \quad \alpha = \frac{3}{2}\,, \quad \beta = \nu - \frac{1}{4}\,, \quad \alpha+\beta = \nu + \frac{5}{4}\,,$$

что равно $2^{-\alpha}B(\alpha,\beta)$ [5, раздел 1.5].

В результате получим

$$g(\nu) = 2^{-3/2}\nu^{3/2}B\left(\frac{3}{2}, \nu - \frac{1}{4}\right) = 2^{-3/2}\frac{\nu^{3/2}\Gamma(3/2)\Gamma(\nu-1/4)}{\Gamma(\nu+5/4)} = \\ = \frac{\sqrt{\pi/2}}{4(\nu+1/4)}\frac{\Gamma(\nu-1/4)}{\Gamma(\nu+1/4)}\,\nu^{3/2}. \tag{34}$$

Пользуясь асимптотикой логарифма гамма-функции [6, раздел 8.34], получим

$$\ln g(\nu) \asymp \ln\frac{\sqrt{\pi/2}}{4} + \left(\nu - \frac{3}{4}\right)\ln\left(1 - \frac{1}{4\nu}\right) - \left(\nu + \frac{3}{4}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{4\nu}\right) + \frac{1}{2} + \\ + \sum_{k=1}^\infty \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)}\left[\frac{1}{(\nu-1/4)^{2k-1}} - \frac{1}{(\nu+1/4)^{2k-1}}\right],$$

где B_s — числа Бернулли. Правая часть инвариантна относительно замены $\nu \mapsto -\nu$. Поэтому разложение содержит лишь четные степени ν. Пользуясь рядом для логарифма и бинома, получим

$$\ln g(\nu) \asymp \ln\frac{\sqrt{\pi/2}}{4} + \sum_{m=1}^\infty \frac{a_m}{\nu^{2m}}\,, \tag{35}$$

$$a_m = \frac{1}{4^{2m}} \left[\frac{4m+3}{4m(2m+1)} - \sum_{k=1}^{m} \frac{4^{2k-1} B_{2k}}{k(2k-1)} \binom{-2k+1}{2m-2k+1} \right].$$

В частности,

$$a_1 = \frac{1}{16} \left(\frac{7}{12} + 4B_2 \right) = \frac{5}{64}, \quad a_2 = \frac{1}{2^8} \left(\frac{11}{40} + 4B_2 + 32B_4 \right) = -\frac{1}{2^{11}},$$

так что

$$g(\nu) \asymp \frac{\sqrt{\pi/2}}{4} \left(1 + \frac{5}{64\nu^2} + \frac{21}{2^{13}\nu^4} + \ldots \right). \tag{36}$$

Значения $g(\nu)$ при некоторых ν приведены в таблице.

Некоторые значения $g(\nu)$

ν	$g(\nu)$	ν	$g(\nu)$
0.25	∞	2	0.3195
0.5	0.4370	3	0.3161
0.75	0.3607	5	0.3143
1	0.3389	10	0.3136
1.5	0.3244	∞	0.3133

Литература

1. *Гобсон Е. В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: ИЛ, 1952, 476 с.

2. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. М.: ФМ, 1962. 500 с.

3. *Холшевников К. В., Шайдулин В. Ш.* Асимптотика интегралов от многочлена Лежандра и их сумм // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2015. Т. 2(60), вып. 4. С. 553–562.

4. *Холшевников К. В., Шайдулин В. Ш.* О свойствах интегралов от многочлена Лежандра // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2014. Т. 1(59), вып. 1. С. 55–67.

5. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1965. 296 с.

6. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.

Статья поступила в редакцию 2 октября 2015 г.

Сведения об авторах

Холшевников Константин Владиславович — доктор физико-математических наук, профессор; kvk@astro.spbu.ru

Шайдулин Вахит Шамильевич — кандидат физико-математических наук, доцент; shvak@yandex.ru

ESTIMATES OF SUMS OF INTEGRALS OF LEGENDRE POLYNOMIAL

Konstantin V. Kholshevnikov[1,2], *Vakhit Sh. Shaidulin*[1,3]

[1] St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; kvk@astro.spbu.ru, shvak@yandex.ru

[2] Tomsk State University, pr. Lenina, 36, Tomsk, 634050, Russian Federation; kvk@astro.spbu.ru

[3] Main (Pulkovo) Observatory RAS, Pulkovskoe chaussee, 65/1, St. Petersburg, 196140, Russian Federation; shvak@yandex.ru

Estimates of sums

$$R_{nk}(x) = \sum_{m=n}^{\infty} P_{mk}(x)$$

are established. Here

$$P_{n0}(x) = P_n(x), \qquad P_{nk}(x) = \int\limits_{-1}^{x} P_{n,k-1}(y)dy,$$

P_n being a Legendre polynomial with the standard normalisation $P_n(1) = 1$. If $k = 1$ then the sum decreases with growing n as n^{-1} if x belongs to the main segment $[-1, 1]$, wheras it decreases as $n^{-3/2}$ if x belongs to the semi-segment $[-1, 1)$. If $k > 1$ the point $x = 1$ does not need to be excluded. The sum decreases as $n^{-k-1/2}$. The more, a small increasing of the multiplicative constant permits to obtain an estimate

$$|R_{nk}(\cos\theta)| < \frac{C \sin^{k-3/2}\theta}{n^{k+1/2}}\,,$$

where C depends weakly on k (but not on n, θ). As a by-product, the integral of Mehler—Dirichlet type for $R_{nk}(\cos\theta)$ is deduced. Refs 6. Figs 3. Tables 1.

Keywords: Legendre polynomials, estimate of sums, estimate of a remainder of a series.

References

1. Hobson E. W., *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics* (Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1931. 476 p.).

2. Szegö G., *Orthogonal polynomials* **23** (AMS Colloquium publ., 1975, 432 p.).

3. Kholshevnikov K. V., Shaidulin V. Sh., “Asymptotic behaviour of integrals of Legendre polynomial and their sums”, *Vestnik St.Petersburg University: Mathematics* **48**, Issue 4, 233–240 (2015).

4. Kholshevnikov K. V., Shaidulin V. Sh., “On Properties of Integrals of the Legendre Polynomial”, *Vestnik St.Petersburg University: Mathematics* **47**, Issue 1, 28–38 (2014).

5. Bateman H., Erdélyi A., *Higher Transcendental Functions* **1** (McGraw-Hill, New York, Toronto, London, 1953, 298 p.).

6. Gradsteyn I. S., Ryzhik I. M., *Table of Integrals, Series, and Products* (Eds. D. Zwillinger and V. Moll, 2014, 1184 p.).