УДК 537.612 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 3 (61). 2016. Вып. 2

РАЗРЕШЕННЫЕ ОБЛАСТИ В ЗАДАЧЕ О ДИНАМИКЕ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В СУПЕРПОЗИЦИИ ДИПОЛЬНОГО И ОДНОРОДНОГО МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

Е. К. Колесников, Г. Н. Клюшников

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

Движение заряженных частиц в магнитном поле Земли уже давно представляет большой интерес для математиков и физиков в связи с изучением полярных сияний и космических лучей. Математическую формулировку задачи о динамике одиночной заряженной частицы впервые дал норвежский математик Штермер в 1907 г. Задача приобрела огромное значение в связи с открытием радиационного пояса ван Аллена. Как известно, магнитное поле Земли можно приближенно рассматривать как суперпозицию дипольного и однородного магнитных полей, причем магнитный момент диполя параллелен либо антипараллелен индукции однородного поля. Таким образом, задача о динамике заряженной частицы в магнитном поле Земли сводится к задаче о динамике заряженной частицы в суперпозиционном поле. Настоящая статья посвящена построению и исследованию разрешенных областей движения заряженной частицы в суперпозиционном магнитном поле для положительных значений постоянной Штермера γ и одинаковой пространственной ориентации дипольного момента и однородного поля. Библиогр. 4 назв. Ил. 1.

Ключевые слова: заряженные частицы, магнитное поле, гамильтониан, разрешенные области, интеграл движения.

Введение. Настоящая работа посвящена исследованию областей, являющихся разрешенными для движения заряженной частицы в суперпозиции дипольного и однородного магнитных полей. При этом основное внимание уделено построению разрешенных областей в ранее не исследованном случае движения в суперпозиционном поле с магнитным моментом диполя, сонаправленным внешнему магнитному полю, для положительных значений постоянной Штермера. Заметим, что вид разрешенных областей для случая, когда магнитный момент диполя направлен противоположно индукции однородного поля, рассмотрен в работе [1], а для случая, когда магнитный момент диполя сонаправлен индукции однородного поля и постоянная Штермера отрицательна — в работе [2].

Каноническая формулировка задачи о движении заряженной частицы в суперпозиционном поле. Общее соотношение, задающее разрешенные области. В цилиндрической системе координат $(\rho,\ \varphi,\ z)$ с осью z, сонаправленной магнитному моменту $\mathbf{M}$, движение заряженной частицы с зарядом e в магнитном поле описывается релятивистским гамильтонианом

$$H_R = c\sqrt{P_\rho^2 + P_z^2 + \left(\frac{P_\varphi}{\rho} - \frac{eA_\varphi}{c}\right)^2 + m_0^2c^2}, \tag{1}$$

где $P_\rho = m\dot\rho$, $P_\varphi = m\rho^2\dot\varphi + e\rho A_\varphi/c$ и $P_z = m\dot z$ — обобщенные импульсы, соответствующие обобщенным координатам ρ, φ и z (точка обозначает производную по времени t),

m_0 — масса покоя частицы, $m = m_0/\sqrt{1-v^2/c^2}$, v — скорость частицы, c — скорость света (см. [3]).

Из (1) видно, что релятивистский гамильтониан H_R не зависит от времени явно. Поэтому H_R является интегралом движения:

$$H_R = mc^2 = \text{const}. \tag{2}$$

Из (2) следует, что релятивистская масса частицы m во время движения остается постоянной. Значит, движение релятивистской частицы аналогично движению нерелятивистской частицы массы m, а его можно описать с помощью классической функции Гамильтона

$$H = \frac{1}{2m}\left(P_\rho^2 + P_z^2 + \left(\frac{P_\varphi}{\rho} - \frac{eA_\varphi}{c}\right)^2\right). \tag{3}$$

Как следует из (3), гамильтониан H не зависит от координаты φ, поэтому

$$\dot{P}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0. \tag{4}$$

Таким образом, обобщенный импульс P_φ является интегралом движения. Представим его в виде

$$P_\varphi = \frac{em\Gamma}{c}, \tag{5}$$

Γ — постоянная размерности обратной длины.

Нетрудно проверить, что в рассматриваемом случае суперпозиционного магнитного поля векторный потенциал имеет вид

$$\mathbf{A} = \left(\frac{M\rho}{r^3} + \frac{B_0\rho}{2}\right)\mathbf{e}_\varphi, \tag{6}$$

где B_0 — проекция однородного магнитного поля на ось z (см. также [4]).

С учетом (6) гамильтониан (3) можно записать в виде

$$H = \frac{1}{2m}\left(P_\rho^2 + P_z^2\right) + V, \tag{7}$$

где

$$V = \frac{e^2M^2}{2mc^2}\left(\frac{\Gamma}{\rho} - \frac{\rho}{r^3} - \frac{B_0\rho}{2M}\right)^2. \tag{8}$$

Гамильтониан (7) описывает движение частицы в так называемой ведущей плоскости, проходящей в любой момент времени через частицу и магнитную ось и движущейся вместе с частицей. Такое движение эквивалентно движению в потенциальном поле с эффективным потенциалом (8). Уравнения движения частицы в указанном поле могут быть записаны в виде

$$\begin{cases} m\ddot{\rho} = -\dfrac{\partial V}{\partial \rho}, \\ m\ddot{z} = -\dfrac{\partial V}{\partial z}. \end{cases} \tag{9}$$

Эффективный потенциал V не зависит от времени, поэтому полная энергия частицы E в ведущей плоскости является интегралом движения:

$$E = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2\right) + V = \mathrm{const}. \tag{10}$$

Перейдем к безразмерным переменным, зависящим от штермеровской единицы длины $C_{st} = \sqrt{eM/mvc}$:

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho}{C_{st}}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{C_{st}}, \quad \tilde{t} = \frac{vt}{C_{st}}. \tag{11}$$

Будем обозначать дифференцирование по $\tilde{t}$ штрихом. Тогда в новых переменных (11) уравнения (9) примут вид

$$\begin{cases} \tilde{\rho}'' = -\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{\rho}}, \\ \tilde{z}'' = -\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{z}}, \end{cases} \tag{12}$$

где новый эффективный потенциал имеет вид

$$\tilde{V} = \frac{1}{2}\left(\frac{\Gamma C_{st}}{\tilde{\rho}} - \frac{B_0 C_{st}^3 \tilde{\rho}}{M} - \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{r}^3}\right)^2. \tag{13}$$

С учетом (11) запишем интеграл (10) следующим образом:

$$\frac{1}{2}\left(\left(\tilde{r}'\right)^2 + \left(\tilde{z}'\right)^2\right) + \tilde{V}(\tilde{\rho}, \tilde{z}) = \frac{1}{2}. \tag{14}$$

Условимся в дальнейшем опускать значок «$\sim$». Как следует из (14), разрешенные области движения частицы определяются неравенством $V \leq 1/2$, которое может быть представлено в виде

$$\left|\alpha\rho - \frac{\rho}{r^3} - \frac{2\gamma}{\rho}\right| \leq 1, \tag{15}$$

где $\gamma = -C_{st}\Gamma/2$ — постоянная Штермера, $\alpha = -B_0 C_{st}^3/2M$.

Заметим, что уравнения (12) и (14) эквивалентны уравнениям движения точки единичной массы в эффективном потенциальном поле с потенциалом (13).

Уравнения для границ разрешенной области. Качественные особенности разрешенных областей. Итак, в любой момент времени безразмерные координаты частицы должны удовлетворять неравенству (15), задающему так называемую разрешенную область движения. Точки, координаты которых не удовлетворяют (15), принадлежат запрещенной области.

Полагая $\rho = r\cos\psi$, где ψ — геомагнитная широта, получим из (15)

$$\left|\alpha r\cos\psi - \frac{\cos\psi}{r^2} - \frac{2\gamma}{r\cos\psi}\right| \leq 1. \tag{16}$$

В рассматриваемом случае индукция однородного поля параллельна магнитному моменту диполя, поэтому $\alpha < 0$. Кроме того, ограничимся рассмотрением ранее не исследованного случая положительных значений постоянной Штермера γ.

Границы области (16) определяются уравнениями

$$r^3 + \frac{2}{\mu\cos\psi}r^2 + \frac{4\gamma}{\mu\cos^2\psi}r + \frac{2}{\mu} = 0, \tag{17}$$

$$r^3 - \frac{2}{\mu\cos\psi}r^2 + \frac{4\gamma}{\mu\cos^2\psi}r + \frac{2}{\mu} = 0, \tag{18}$$

где $\mu = -2\alpha > 0$ (см. [2]).

В уравнении (18) все коэффициенты при степенях r положительны. Указанное уравнение не имеет вещественных положительных корней и, следовательно, не может задавать границу области (16). Таким образом, в рассматриваемом случае граница области (16) задается вещественными положительными корнями уравнения (18), существующими при условии неположительности его дискриминанта D:

$$D = \frac{16}{9\cos^6\psi}\left(\frac{4}{3\mu^3}\left(\gamma - \frac{1}{3\mu}\right)^3 + \frac{1}{\mu^4}\left(\gamma - \frac{2}{9\mu}\right)^2\right) + \frac{8}{3\mu^3\cos^3\psi}\left(\gamma - \frac{2}{9\mu}\right) + \frac{1}{\mu^2} \le 0. \tag{19}$$

При условии (19) уравнение (18) имеет два положительных корня

$$r_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi + 4\pi}{3}, \quad r_2 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi}{3}, \tag{20}$$

где угол φ определяется соотношением

$$\cos\varphi = -\frac{3\sqrt{3}q}{2\sqrt{-p^3}};$$

$$p = \frac{4}{\mu\cos^2\psi}\left(\gamma - \frac{1}{3\mu}\right), \qquad q = \frac{2}{\mu}\left(1 + \frac{4\gamma}{3\mu\cos^3\psi} - \frac{8}{27\mu^2\cos^3\psi}\right).$$

Полагая $\cos^3\psi = u$, запишем (19) в виде

$$A + Bu + Cu^2 \le 0, \tag{21}$$

где

$$A = \frac{16}{9}\left(\frac{4}{3\mu^3}\left(\gamma - \frac{1}{3\mu}\right)^3 + \frac{1}{\mu^4}\left(\gamma - \frac{2}{9\mu}\right)^2\right), \quad B = \frac{8}{\mu^3}\left(\gamma - \frac{2}{9\mu}\right), \quad C = \frac{1}{\mu^2}.$$

Значения u должны удовлетворять условию

$$0 \le u \le 1. \tag{22}$$

Анализ показывает, что не все пары значений (μ, γ) (а значит, не все тройки коэффициентов (A, B, C)) имеют физический смысл, т. е. соответствуют каким-либо начальным данным. При выполнении системы неравенств

$$\begin{cases} B^2 > 4AC, \\ \sqrt{B^2 - 4AC} > B \end{cases} \tag{23}$$

пара (μ, γ) соответствует некоторым начальным данным, а решение (21) в области (22) существует и может быть записано в виде

$$0 \le u \le \min(u_2, 1), \tag{24}$$

где $u_2 = \left(\sqrt{B^2 - 4AC} - B\right)/2C$ — положительный корень уравнения

$$A + Bu + Cu^2 = 0. \tag{25}$$

Как видно из (24), качественный вид разрешенной области зависит от значения корня u_2.

В случае $u_2 < 1$ решение (21) в области (22) имеет вид $0 \le u \le u_2$. При таких значениях u граница разрешенной области существует для значений магнитной широты

$$\psi \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\arccos\sqrt[3]{u_2}\right] \cup \left[\arccos\sqrt[3]{u_2}, \frac{\pi}{2}\right). \tag{26}$$

Как следует из (26), разрешенная область в случае $u_2 < 1$ состоит из двух компонент, границы каждой из которых не пересекают плоскость магнитного экватора. Каждому значению широты (26) соответствуют значения r_1 и r_2, задаваемые формулами (20). Качественный вид разрешенной области в рассматриваемом случае показан на рис. 1, *а* (запрещенные области зеленые, разрешенные — красные), для которого $\gamma = 1.17$, $\mu = 0.2$, $u_2 = 0.812$, $\arccos\sqrt[3]{u_2} = 21.078$ градусов, $D(\psi = 0) = 12.182 > 0$.

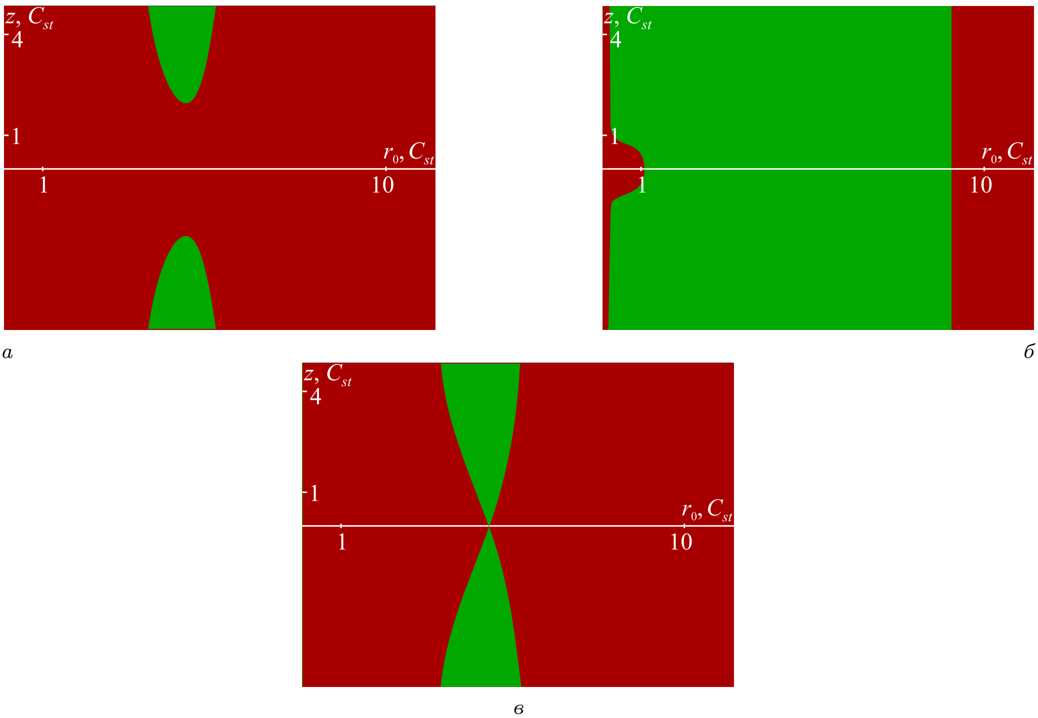

Рис. 1. Разрешенные области движения: *а* — $u_2 < 1$, *б* — $u_2 = 1$, *в* — $u_2 > 1$.

При $u_2 \geq 1$ решение (21) в области (22) имеет вид $0 \leq u \leq 1$; граница разрешенной области существует для любых значений магнитной широты ψ. В случае $u_2 = 1$ разрешенная область, как и при $u_2 < 1$, состоит из двух компонент, соединяющихся друг с другом в плоскости магнитного экватора. Качественный вид разрешенной области для указанных значений u_2 показан на рис. 1, *б*, для которого $\gamma = 1.15186$, $\mu = 0.2$, $D(\psi = 0) = 0$. Наконец, при $u_2 > 1$ разрешенная область является однокомпонентной, что видно из рис. 1, *в*, соответствующие значения параметров: $\gamma = 0.1$, $\mu = 0.2$, $D(\psi = 0) = -315.444 < 0$.

Заключение. Как показывают результаты приведенного выше анализа, в случае, когда индукция однородного магнитного поля сонаправлена магнитному моменту диполя, а значение постоянной Штермера положительно, разрешенная область всегда является неограниченной. При этом в зависимости от параметра u_2 она может быть как однокомпонентной, так и двухкомпонентной. Для значений $0 < u_2 < 1$ разрешенная область состоит из двух неограниченных компонент, лежащих в верхнем ($z > 0$) и нижнем ($z < 0$) полупространствах. При $u_2 = 1$ компоненты разрешенной области соединяются друг с другом в плоскости магнитного экватора. Для значений $u_2 > 1$ разрешенная область однокомпонентна, причем ближняя и дальняя по отношению к диполю границы существуют для любых значений магнитной широты ψ.

Литература

1. *Шалимов В. П., Швачунов И. Н.* Изучение движения заряженных частиц в поле магнитного диполя, находящегося во внешнем магнитном поле, методом Штермера. I // Космические исследования. 1966. Т. IV. Вып. 2. С. 208–220.

2. *Katsiaris G. A., Psillakis Z. M.* Allowed regions for the motion of charged particles in superposed dipole and uniform magnetic fields // Astrophysics and Space Science. 1986. Vol. 126. P. 69–87.

3. *Колесников Е. К., Филиппов Б. В.* Некоторые задачи эволюции заряженных частиц в поле магнитного диполя. Изд. ЛГУ, 1974. 72 с.

4. *Lemaire J. F.* The effect of a southward interplanetary magnetic field on Stormer's allowed regions // Adv. Space Res. 2003. Vol. 31, N 5. P. 1131–1153.

Статья поступила в редакцию 3 июля 2015 г.

Сведения об авторах

Колесников Евгений Константинович — доктор физико-математических наук, профессор; kolesnikov_evg@mail.ru

Клюшников Георгий Николаевич — аспирант; g.klyushnikov@spbu.ru

THE ALLOWED REGIONS IN THE PROBLEM CONCERNING DYNAMICS OF A CHARGED PARTICLE IN A SUPERPOSITION OF DIPOLE AND UNIFORM MAGNETIC FIELDS

Evgeniy K. Kolesnikov, Georgiy N. Klushnikov

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; kolesnikov_evg@mail.ru, g.klyushnikov@spbu.ru

The motion of charged particles in the Earth's magnetic field has been of interest to mathematicians and physicists in connection with the study of the polar aurora and cosmic rays. In 1907 norwegian mathematician Stormer gave the mathematical formulation of this problem. It became the problem of great importance with the discovery of the Van Allen radiation. As is known that the magnetic field of the Earth can be considered approximately as a superposition of dipole and uniform magnetic fields, and the dipole's magnetic moment is either parallel or antiparallel to the induction of the uniform field. Thus, the problem concerning the dynamics of the charged particle in the magnetic field of the Earth is reduced to that of the dynamics of the charged particle in the composed field. The paper is devoted to the construction and investigation of the allowed regions in the problem of dynamics of charged particles in a superposition of dipole and uniform magnetic fields for positive values of Stormer's constant γ and the same orientation of magnetic moment and uniform field. Refs 4. Figs 1.

Keywords: charged particles, magnetic field, hamiltonian, allowed regions, integral of the motion.

References

1. Shalimov V. P., Shvachunov I. N., "Research of the charged particles movement in the field of a magnetic dipole, being in an extern magnetic field, by Shtormer's method. I", *J. Cosmic Res. Series 2* **IV**, 208–220 (1966) [in Russian].

2. Katsiaris G. A., Psillakis Z. M., "Allowed regions for the motion of charged particles in superposed dipole and uniform magnetic fields", *Astrophysics and Space Science* **126**, 69–87 (1986).

3. Kolesnicov E. K., Filippov B. V., *Some problems of charged particles evolution in the field of a magnetic dipole* (LGU, 1974, 72 p.) [in Russian].

4. Lemaire J. F. "The effect of a southward interplanetary magnetic field on Stormer's allowerd regions *Adv. Space Res.* **31**(5), 1131–1153 (2003).