УДК 517.977.5 Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 3 (61). 2016. Вып. 2

К ЗАДАЧЕ ДИНАМИКИ ПОЛЕТА

Ю. Я. Остов, А. П. Иванов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

В статье рассматривается вопрос оптимизации траектории летательного аппарата в вертикальной плоскости. Основное содержание данной работы состоит в том, что решение сложной нелинейной краевой задачи получено с помощью конечного числа арифметических операций. Приведенные результаты численного моделирования подтверждают эффективность рассмотренной методики. Библиогр. 3 назв. Табл. 1.

Ключевые слова: вариационный метод, оптимизация, функционал, сопряженная система уравнений, модель.

Оптимальное управление, найденное как результат решения краевой задачи на основе принципа максимума в его классической формулировке, является программным управлением, и при наличии всякого рода возмущений оказывается неэффективным, т. е. не обеспечивает оптимум заданного критерия качества [1]. Поэтому, если говорить о прикладном аспекте решения задачи, достаточно построить управление, при котором значение оптимизируемого функционала отличается от его оптимального значения не более, чем на заданную величину. Такое управление будем называть субоптимальным управлением.

Новый вариационный метод применен к решению следующей задачи: оптимизировать траекторию продольного движения центра масс (ЦМ) летательного аппарата (ЛА), совершающего полет из начальной точки атмосферного пространства в заданную конечную точку на поверхности Земли. Движение ЦМ ЛА описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}
&\frac{dV}{dt} = -\frac{X}{m} - g\sin\theta, && V(0) = V_0,\\
&\frac{d\theta}{dt} = \frac{Y}{mV} - \frac{g\cos\theta}{V}, && \theta(0) = \theta_0,\\
&\frac{dH}{dt} = V\sin\theta, && H(0) = H_0,\\
&\frac{d\xi}{dt} = \beta\bar{\rho}V, && \xi(0) = \xi_0 \overset{\triangle}{=} 0,
\end{aligned} \tag{1}$$

где $V(t)$ — модуль скорости, $\theta(t)$ — угол наклона траектории к горизонту, $H(t)$ — высота над поверхностью Земли, $\xi(t)$ — безразмерная «взвешенная» длина траектории, t — текущий момент времени, $t \in [0, T]$, m — масса ЛА, g — модуль ускорения свободного падения, $X = (C_{x0} + C_{xi}\alpha^2)\rho V^2 S/2$ — лобовое сопротивление ЛА, $Y = C_y^\alpha \alpha\rho V^2 S/2$ — подъемная сила ЛА, $\rho = \rho_0^* \exp(-\beta H)$ — плотность атмосферы на высоте H, $\bar{\rho} \equiv \rho/\rho_0^*$, α — угол атаки (управление).

В данной модели C_{x0}, C_{xi}, C_y^α, S, m, ρ_0^*, β, g — заданные константы. Множество A допустимых значений угла атаки α является открытым.

DOI: 10.21638/11701/spbu01.2016.215

Для этой модели ставится следующая задача: максимизировать кинетическую энергию

$$J(\alpha) = \varphi\big(V(T)\big) = \frac{mV^2(T)}{2} \tag{2}$$

при заданных значениях высоты и «взвешенной» длины траектории полета в конечный момент времени T, т. е.

$$H(T) - H_T = 0, \quad \xi(T) - \xi_T = 0, \tag{3}$$

где H_T и ξ_T — заданные константы. Угол $\theta(T)$ и конечный момент времени T не фиксированы, что не влияет на общность подхода к решению задачи.

На первом этапе решения поставленной задачи исходная система (1) преобразуется к виду [2]

$$\begin{aligned}
&\frac{dV_l}{d\xi} = -\left(\bar{c}_{x0} + \frac{\bar{c}_y^2}{2d}\right) V_l - \bar{c}_y V_h, && V_l(\xi_0) = V_{l0},\\
&\frac{dV_h}{d\xi} = \bar{c}_y V_l - \left(\bar{c}_{x0} + \frac{\bar{c}_y^2}{2d}\right) V_h - \frac{\bar{g}}{\bar{\rho}\sqrt{V_l^2 + V_h^2}}, && V_h(\xi_0) = V_{h0},\\
&\frac{d\bar{\rho}}{d\xi} = -\frac{V_h}{\sqrt{{V_l}^2 + {V_h}^2}}, && \bar{\rho}(\xi_0) = \bar{\rho}_0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Как следует из приведенных выше соотношений, ЛА обладает параболической полярой, т. е. коэффициент лобового сопротивления связан с коэффициентом аэродинамической подъемной силы соотношением $\bar{c_x} = \bar{c_{x0}} + \bar{c_y}^2/2d$, где $\bar{c_{x0}}$ и d — положительные константы. Из последнего соотношения следует $y = 2\sqrt{x-a}/b$, где приняты обозначения $y = \bar{c}_y$, $x = \bar{c}_x$, $a = \bar{c}_{x0}$, $b = \sqrt{2/d}$.

Обозначим $G(x) = 2\sqrt{x-a}/b$. Пусть x_k — коэффициент лобового сопротивления. Касательная к кривой $G(x)$ в точке $x = x_k$ представляется в виде

$$y = \frac{\partial G}{\partial x}\Big|_{x=x_k}(x - x_k) + G(x_k) = \frac{(x - x_k)}{b\sqrt{x_k - a}} + 2\frac{\sqrt{x_k - a}}{b}.$$

Обозначим точку пересечения этой прямой с осью Ox через z, т. е.

$$0 = \frac{(z - x_k)}{b\sqrt{x_k - a}} + 2\frac{\sqrt{x_k - a}}{b},$$

откуда следует

$$x_k + z = 2a.$$

С учетом последних двух соотношений уравнение касательной принимает вид

$$y = \frac{(x - z)}{b\sqrt{a - z}}.$$

Точку z будем называть сопряженной точкой по отношению к x_k. Таким образом, точке параболы $(\bar{c}_x = x, \bar{c}_y = y)$ сопоставлено уравнение прямой (в пространственном случае — уравнение гиперплоскости, которое соответствует преобразованию Лежандра применительно к параболоиду). Теперь система уравнений (4) перепишется в виде

$$\begin{aligned}
&\frac{dV_l}{d\xi} = -\bar{c}_x V_l - \frac{(\bar{c}_x - z)}{b\sqrt{a-z}} V_h, && V_l(\xi_0) = V_{l0},\\
&\frac{dV_h}{d\xi} = \frac{(\bar{c}_x - z)}{b\sqrt{a-z}} V_l - \bar{c}_x V_h - \frac{\bar{g}}{\bar{\rho}\sqrt{V_l^2 + V_h^2}}, && V_h(\xi_0) = V_{h0},\\
&\frac{d\bar{\rho}}{d\xi} = -\frac{V_h}{\sqrt{V_l^2 + V_h^2}}, && \bar{\rho}(\xi_0) = \bar{\rho}_0,
\end{aligned} \tag{5}$$

где

$$\bar{\rho} = \exp(-\bar{h}), \quad \bar{h} = \beta H, \quad \bar{g} = \frac{g}{\beta}, \quad \bar{c}_{x0} = \frac{C_{x0}\rho_0^* S}{2m\beta}, \quad d = \frac{(C_y^\alpha)^2 \rho_0^* S}{4m\beta C_{xi}}, \quad \bar{c}_y = \frac{(C_y^\alpha)\rho_0^* S\alpha}{2m\beta},$$

а V_l и V_h — проекции скорости $\bar{V}$ ЦМ ЛА соответственно на горизонтальную и вертикальную оси инерциальной системы.

Взяв за новую независимую переменную $\bar{\rho} \in [\bar{\rho}_0, \bar{\rho}_T]$, систему (5) представим в виде

$$\begin{aligned}
&\frac{dV_l}{d\bar{\rho}} = \frac{\bar{c}_x V_l \sqrt{V_l^2 + V_h^2}}{V_h} + \frac{(\bar{c}_x - z)\sqrt{V_l^2 + V_h^2}}{b\sqrt{a-z}},\\
&\frac{dV_h}{d\bar{\rho}} = -\frac{(\bar{c}_x - z) V_l \sqrt{V_l^2 + V_h^2}}{b V_h \sqrt{a-z}} + \bar{c}_x \sqrt{V_l^2 + V_h^2} + \frac{\bar{g}}{\bar{\rho} V_h},\\
&\frac{d\xi}{d\bar{\rho}} = -\frac{\sqrt{V_l^2 + V_h^2}}{V_h}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Соответственно функционал (2) и ограничения (3) перепишутся в виде

$$\tilde{J}(\alpha) = \tilde{\varphi}\big((V_l^2 + V_h^2)(\bar{\rho}_T)\big) = V^2(\bar{\rho}_T), \qquad \xi(\bar{\rho}_T) - \xi_T = 0, \qquad \bar{\rho}_T{=}1.0.$$

Гамильтониан системы уравнений (6) и сопряженная система уравнений теперь запишутся так:

$$H_6 = \Psi_0 \frac{dV_l}{d\bar{\rho}} + \Psi_1 \frac{dV_h}{d\bar{\rho}} + \Psi_2 \frac{d\xi}{d\bar{\rho}}, \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{d\Psi_0}{d\bar{\rho}} = -\frac{\partial H_6}{\partial V_l} = -\Psi_0\,\Phi_0 - \Psi_1\,\Phi_1 - \Psi_2\,\Phi_2,\\
&\frac{d\Psi_1}{d\rho} = -\frac{\partial H_6}{\partial V_h} = -\Psi_0\,\Phi_3 - \Psi_1\,\Phi_4 - \Psi_2\,\Phi_5,\\
&\frac{d\Psi_2}{d\bar{\rho}} = -\frac{\partial H_6}{\partial \xi} = 0,
\end{aligned} \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned}
&\Phi_0 = \frac{\bar{c}_x V}{V_h} + \frac{\bar{c}_x V_l^2}{V_h V} + \frac{(\bar{c}_x - z) V_l}{bV\sqrt{a-z}}, && \Phi_1 = -\frac{(\bar{c}_x - z) V}{b V_h \sqrt{a-z}} - \frac{(\bar{c}_x - z) V_l^2}{b V V_h \sqrt{a-z}} + \frac{\bar{c}_x V_l}{V},\\
&\Phi_2 = -\frac{V_l}{V V_h}, && \Phi_3 = \frac{-\bar{c}_x V_l^3}{V V_h^2} + \frac{(\bar{c}_x - z) V_h}{bV\sqrt{a-z}},\\
&\Phi_4 = \frac{(\bar{c}_x - z) V_l^3}{b V V_h^2 \sqrt{a-z}} + \frac{\bar{c}_x V_h}{V} - \frac{\bar{g}}{\bar{\rho} V_h^2}, && \Phi_5 = \frac{V_l^2}{V V_h^2}.
\end{aligned}$$

Так как $V = \sqrt{V_l^2 + V_h^2} > 0$, условие стационарности гамильтониана (7) относительно управления $\bar{c}_x$ можно представить в виде

$$F_1 = \frac{1}{V}\frac{\partial H_6}{\partial \bar{c}_x} = \Psi_0\left(\frac{V_l}{V_h} + \frac{1}{b\sqrt{a-z}}\right) + \Psi_1\left(-\frac{V_l}{bV_h\sqrt{a-z}} + 1\right) = 0. \tag{9}$$

Условие стационарности гамильтониана (7) относительно $z(\bar{\rho})$ при ограничении $(a-z) > 0$ записывается так: $2a - \bar{c}_x - z = 0$. В силу нестационарности системы (6) из соотношений (4), (6) следует $H_6(\bar{\rho}) = -C\sqrt{V_l^2 + V_h^2}/V_h$, где $C = \text{const} > 0$. Поэтому с учетом соотношения (9) выражение (7) можно преобразовать к интегралу следующего вида:

$$F_2 = \left(\frac{\Psi_0 V_l}{V_h} + \Psi_1\right)z + \frac{C - \Psi_2}{V_h} + \frac{\Psi_1 \bar{g}}{\sqrt{V_l^2 + V_h^2}\bar{\rho}V_h} = 0. \tag{10}$$

Дифференцируя интегралы $F_1(X(\bar{\rho}), z(\bar{\rho})) = 0$ и $F_2(X(\bar{\rho}), z(\bar{\rho}), \bar{\rho}) = 0$ по $\bar{\rho}$, где $X = (V_l, V_h, \Psi_0, \Psi_1)$ в силу системы (6), (8), и исключив переменную $dz/d\bar{\rho}$, получим выражение

$$a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21} = 0, \tag{11}$$

где $a_{11} = \frac{\partial F_1}{\partial X}\frac{dX}{d\bar{\rho}}$, $a_{12} = \frac{\partial F_1}{\partial z}$, $a_{21} = \frac{\partial F_2}{\partial X}\frac{dX}{d\bar{\rho}} + \frac{\partial F_2}{\partial \bar{\rho}}$, $a_{22} = \frac{\partial F_2}{\partial z}$.

С целью упрощения решения задачи третий интеграл $F_3 = 0$ найден из уравнения (11) как коэффициент при модуле $\bar{g}$ ускорения силы тяжести. В развернутом виде интеграл $F_3 = 0$ можно представить так:

$$F_3 = \frac{V_l^2}{\bar{\rho}\, V^2\, V_h^3} + \left(\frac{2\sqrt{a-z}\, V_l}{b\, \bar{\rho}\, V_h^3} + \frac{1}{\bar{\rho}^2\, V\, V_h}\right)\Psi_1 = 0. \tag{12}$$

Переменные $\Psi_0(\cdot)$ и $\Psi_1(\cdot)$ выражаются из уравнений (9), (10). Подстановка $\Psi_1(\cdot)$ в интеграл $F_3 = 0$ приводит к уравнению второй степени относительно переменной z:

$$P \equiv P_1\sqrt{a-z} + P_0 = 0, \tag{13}$$

причем можно положить параметр $\Psi_2 = C_1 + C$ и $C = 1$. В этом случае P_0 и P_1 примут следующий вид:

$$\begin{aligned} P_0 &= \left(\frac{V\, V_l}{V_h^2} - \frac{2\, V\, V_l C_1}{V_h^2}\right)z + \left(\frac{2\, V\, V_l\, a}{V_h^2} + \frac{V_h}{V_l \bar{\rho}}\right)C_1 + \frac{V_l \bar{g}}{\bar{\rho}\, V^2\, V_h}, \\ P_1 &= \left(\frac{2\, V}{V_h\, b} + \frac{b}{\bar{\rho}}\right)C_1 + \frac{\bar{g}\, b\, V_l^2}{\bar{\rho}\, V^2\, V_h^2}. \end{aligned} \tag{14}$$

Еще один интеграл $\hat{F}_3 = 0$ найдем с помощью подстановок интегралов (9), (10) в соотношение (11) как коэффициент при модуле ускорения $\bar{g}$ силы тяжести. В этом случае уравнение относительно переменной z принимает следующий вид:

$$\hat{P} \equiv \hat{P}_1\sqrt{a-z} + \hat{P}_0 = 0, \tag{15}$$

где полиномы $\hat{P}_0$ и $\hat{P}_1$ определяются выражениями

$$\hat{P}_0 = \left(\left(\frac{2\, V}{V_l} - \frac{2\, V V_l}{V_h^2}\right)C_1 + \frac{V\, V_l}{V_h^2}\right)z + \left(\frac{-2\, V\, a}{V_h} + \frac{V_h}{V_l \bar{\rho}} + \frac{2\, V\, V_l\, a}{V_h^2}\right)C_1 + \frac{V_l\, \bar{g}}{\bar{\rho}\, V^2\, V_h},$$

$$\hat{P}_1 = 2\frac{b\,V}{V_h}C_1\,z + \left(\frac{2V}{b\,V_h} - \frac{2Vba}{V_h} + \frac{b}{\bar{\rho}}\right)C_1 + \frac{b\,\bar{g}\,V_l^2}{\bar{\rho}\,V^2\,V_h^2}.$$

Подстановка $z = a - I_r^2$ приводит соответственно к полиномам $P(I_r)$ и $\hat{P}(I_r)$ второй и третьей степени, имеющим общий положительный корень I_r^0, который находится за конечное число арифметических операций. Управление α находится по формуле

$$\alpha = \pm I_r^0\sqrt{\frac{2m\beta}{\rho_0^* SCxi}}. \tag{16}$$

Знак выражения (16) зависит от граничных условий (3).

Система уравнений (1) интегрировалась с шагом $h_u = 0,01$ с методом Рунге—Кутты (4-го порядка точности) при следующих значениях параметров ЛА и атмосферы: $C_{x0} = 0,1931$; $C_{xi} = 5,88$; $C_y^\alpha = 0,8548046$; $m = 422$; $S = 0,159$; $g = 9,81$; $\rho_0^* = 2,047$; $\beta = 1,5682\cdot 10^{-4}$. В начальной точке имеем $\xi(0) = 0,00$; $H(0) = 24054,5$; $V(0) = 1088,31$; $\theta(0) = -0,54113$. Терминальные ограничения (3) следующие: $H(T) - 0 = 0$; $\xi(T) - 1,42500 = 0$. Результаты счета приведены в таблице.

Параметр	Упрощенная модель	Полная модель
b	13,351283	—
C_1	0,43254880	—
T	37,87	37,88
$\xi(T)$	1,42500	1,42500
$H(T)$	0,00000	0,00000
$V(T)$	700,84577	700,8499
$\theta(T)$	−0,844270	−0,844283

В этом варианте имеем управление $\alpha(t) < 0,\ t \in [0;\ 37,87]$. Под «полной моделью» следует понимать традиционную схему решения задачи (1)–(3) на основе принципа максимума Л. С. Понтрягина в его классической формулировке. Применение рассмотренного метода для других моделей ЛА приведено в [2, 3].

Литература

1. *Кирин Н. Е.* Методы последовательных оценок в задачах оптимизации управляемых систем. Л.: ЛГУ, 1975. 160 с.

2. *Остов Ю. Я., Иванов А. П.* Метод оптимизации в задаче динамики полета // Автоматика и телемеханика. 2014. Т. 75, № 2. С. 146–155.

3. *Остов Ю. Я., Иванов А. П.* К задаче динамики полета // Избранные труды Международной конференции по механике Шестые Поляховские чтения. Санкт-Петербург, 2012. С. 64–68.

Статья поступила в редакцию 9 июня 2015 г.

Сведения об авторах

Остов Юрий Яковлевич — кандидат технических наук; yuriostob@mail.ru

Иванов Анатолий Петрович — кандидат физико-математических наук, доцент; tonaki@mail.ru

TO THE PROBLEM OF FLIGHT DYNAMICS

Yuriy Ya. Ostov, Anatoliy P. Ivanov

St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; yuriostob@mail.ru, tonaki@mail.ru

New variational method is applied to solve the following problem: optimize the trajectory of the longitudinal motion of the mass center of aircraft flying in vertical plain from the initial point of atmospheric space to a predetermined point on the Earth surface. The main content of this work is that the complicated nonlinear boundary value problem is obtained by a finite number of arithmetic operations. These results confirm the numerical simulation effective examination techniques. Refs 3. Tables 1.

Keywords: variational method, optimization, conjugate system of equations, functional, mathematical model.

References

1. Kirin N. E., *Methods of successive estimates in problems of optimization of control systems* (LSU, Leningrad, 1975, 160 p.) [in Russian].

2. Ostov Yu. Ya., Ivanov A. P., "Method of optimization in flight dynamics", *Automatic and Remote Control* **75**(2), 294–301 (2014).

3. Ostov Yu. Ya., Ivanov A. P., "By the problem of the dynamics of flight", *Selected Works of the International Conference on mechanics. Sixth Polyakhov's readings*, 64–68 (St. Petersburg, 2012) [in Russian].