МАТЕМАТИКА

УДК 512.622

ОБ ОДНОМ АЛГЕБРАИЧЕСКОМ ТОЖДЕСТВЕ И ФОРМУЛЕ ЯКОБИ—ТРУДИ*

Б. М. Беккер[1], *О. А. Иванов*[1], *А. С. Меркурьев*[2]

[1] Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9
[2] Калифорнийский университет,
США, 90095, Калифорния, Лос-Анжелес, Хилгард Авеню, 405

Первое тождество Якоби—Труди выражает полиномы Шура в виде определителей матриц, элементами которых являются полные однородные многочлены. Определение многочленов Шура было дано Коши в 1815 году в виде частного определителей, построенных по некоторым разбиениям. Полиномы Шура приобрели важное значение ввиду их тесной связи с характерами неприводимых представлений симметрической группы и полной линейной группы, а также ввиду их многочисленных применений в комбинаторике. Впервые тождество Якоби—Труди было сформулировано Якоби в 1841 году и доказано Никола Труди в 1864 году. С тех пор это тождество и его многочисленные обобщения были в центре внимания благодаря той роли, которую они играют в различных областях математики, включая математическую физику, теорию представлений и алгебраическую геометрию. Были найдены разнообразные доказательства этого тождества, основанные на разных идеях (в частности, естественное комбинаторное доказательство, использующее технику диаграм Юнга). В нашей статье мы приводим короткое и простое доказательство первого тождества Якоби—Труди и обсуждаем его связи с другими хорошо известными полиномиальными тождествами. Библиогр. 3 назв.

Ключевые слова: обобщенный определитель Вандермонда, многочлены Шура.

Положим $\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$. Хорошо известно, что

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^j}{\varphi'(x_i)} = \begin{cases} 0 \text{ при } j = 0, 1, \dots, n-2, \\ 1 \text{ при } j = n-1. \end{cases} \tag{1}$$

Обычно эти равенства доказывают с использованием интерполяционного многочлена Лагранжа. Известно и рассуждение при помощи определителя Вандермонда [1]. В нашей заметке речь пойдет о следующем обобщении равенства (1). Обозначим через

*Работа выполнена при поддержке гранта RFBR N 14-01-00393 и гранта NSF DNS#1160206.

$h_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ полный однородный многочлен степени k от n переменных:

$$h_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\sum k_i = k} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}.$$

Тогда при всех натуральных k справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{n+k-1}}{\varphi'(x_i)} = h_k(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{2}$$

Его частный случай при $n = 2$ хорошо известен из курса математики средней школы:

$$\frac{x_1^{k+1}}{x_1 - x_2} + \frac{x_2^{k+1}}{x_2 - x_1} = \frac{x_1^{k+1} - x_2^{k+1}}{x_1 - x_2} = \sum_{i=0}^{k} x_1^i x_2^{k-i}.$$

Приведем одно из возможных доказательств равенства (2). Рассмотрим определитель Вандермонда

$$V_n = \begin{vmatrix} x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

и его обобщение $V_{n,k}$, в котором в первой строке вместо степеней x_i^{n-1} стоят x_i^{n+k-1}. Разложив второй определитель по первой строке и поделив обе части полученного равенства на V_n (см. решение задачи 1.19 в [2]), мы получим

$$\frac{V_{n,k}}{V_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{n+k-1}}{\varphi'(x_i)}\,.$$

Осталось заметить, что в силу частного случая формулы Якоби—Труди для многочленов Шура (их определение будет приведено далее) отношение $V_{n,k}/V_n$ равно $h_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Тем не менее было бы интересно получить доказательство соотношения (2) без ссылки на формулу Якоби—Труди.

Достаточно техническое доказательство соотношения (2) приведено в недавней работе [3]. Цель нашей заметки — привести короткое доказательство этого соотношения (теорема 1) и показать, как из него можно естественным образом получить первую формулу Якоби—Труди (теорема 2).

Обозначим через σ_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, элементарные симметрические многочлены от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, считая, что $\sigma_0 = 1$. Положим

$$u_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{n+k-1}}{\varphi'(x_i)}\,,\ k \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Лемма 1. *Справедливо рекуррентное соотношение*

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \sigma_j u_{k-j} = 0. \tag{4}$$

Поскольку $\varphi(x) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\sigma_j x^{n-j}$, то $\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\sigma_j x_i^{n-j} = \varphi(x_i) = 0$. Поэтому

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\sigma_j u_{k-j} = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{n+k-j-1}}{\varphi'(x_i)} = \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{k-1}}{\varphi'(x_i)}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\sigma_j x_i^{n-j} = 0. \blacksquare$$

Теорема 1. *Для всякого натурального числа k справедливо равенство*

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{n+k-1}}{\varphi'(x_i)} = h_k(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{5}$$

Положим по определению $h_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$. Рассмотрим производящую функцию последовательности многочленов h_k. Поскольку коэффициентом при t^k в произведении

$$\left(1 + tx_1 + t^2x_1^2 + \ldots\right)\left(1 + tx_2 + t^2x_2^2 + \ldots\right)\ldots\left(1 + tx_n + t^2x_n^2 + \ldots\right)$$

как раз и является сумма одночленов вида $x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}$, где $k_i \geq 0$ и $\sum k_i = k$, то

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}t^k h_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \\ &= \left(1 + tx_1 + t^2x_1^2 + \ldots\right)\left(1 + tx_2 + t^2x_2^2 + \ldots\right)\ldots\left(1 + tx_n + t^2x_n^2 + \ldots\right) = \\ &= \frac{1}{(1 - tx_1)(1 - tx_2)\ldots(1 - tx_n)}.\end{aligned} \tag{6}$$

Положим также $h_{-1} = h_{-2} = \ldots = h_{1-n} = 0$. Поскольку $(1-tx_1)(1-tx_2)\ldots(1-tx_n) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\sigma_j t^j$, то

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\sigma_j t^j \cdot \sum_{k=0}^{\infty}t^k h_k = 1.$$

Следовательно, при всех натуральных k справедливо соотношение

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\sigma_j h_{k-j} = 0.$$

Таким образом, многочлены h_k удовлетворяют тому же рекуррентному соотношению (4), что и суммы u_k. Осталось заметить, что, в силу равенства (1), $u_0 = 1$ и $u_{-1} = u_{-2} = \ldots = u_{1-n} = 0$, откуда и следует, что $u_k = h_k$ при всех натуральных k. $\blacksquare$

Введем следующие обозначения. Для набора $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ неотрицательных целых чисел таких, что $k_1 \leq k_2 \leq \ldots \leq k_n$, положим

$$V_{\boldsymbol{k}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} x_1^{n-1+k_n} & x_2^{n-1+k_n} & \ldots & x_n^{n-1+k_n} \\ x_1^{n-2+k_{n-1}} & x_2^{n-2+k_{n-1}} & \ldots & x_n^{n-2+k_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{k_1} & x_2^{k_1} & \ldots & x_n^{k_1} \end{vmatrix}.$$

Многочленом Шура называется многочлен

$$H_{\boldsymbol{k}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} h_{k_n} & h_{k_{n-1}-1} & \dots & h_{k_1-n+1} \\ h_{k_n+1} & h_{k_{n-1}} & \dots & h_{k_1-n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{k_n+n-1} & h_{k_{n-1}+n-2} & \dots & h_{k_1} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, $H_{\boldsymbol{k}} = \det{(h_{ij})}_{i,j=1}^{n}$, где $h_{ij} = h_{j-i+k_{n+1-i}}$. По условию $k_i \geq 0$, поэтому если $s < 0$, имеем $s \geq 1 - n$. Следовательно, многочлен h_s равен нулю.

Теорема 2. *Справедлива формула*

$$V_{\boldsymbol{k}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = H_{\boldsymbol{k}}(x_1, x_2, \dots, x_n) V_{\boldsymbol{0}}(x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{7}$$

(*первая формула Якоби—Труди*).

Доказательство проведем индукцией по n. Рассмотрим набор $\boldsymbol{k}$ длины n. Положим $\boldsymbol{k}' = (k_1, k_2, \dots, k_{n-1})$. Обозначим через $\mathcal{H}_{ij}$ алгебраическое дополнение элемента h_{ij}.

Разложив определитель $V_{\boldsymbol{k}}$ по первой строке и воспользовавшись индукционным предположением, получим равенство

$$\begin{aligned} V_{\boldsymbol{k}} = x_1^{n-1+k_n} H_{\boldsymbol{k}'}(x_2, x_3, \dots, x_n) V_{\boldsymbol{0}}(x_2, x_3, \dots, x_n) - \\ - x_2^{n-1+k_n} H_{\boldsymbol{k}'}(x_1, x_3, \dots, x_n) V_{\boldsymbol{0}}(x_1, x_3, \dots, x_n) + \dots + \\ + (-1)^{n-1} x_n^{n-1+k_n} H_{\boldsymbol{k}'}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) V_{\boldsymbol{0}}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}). \end{aligned}$$

Разделив обе его части на $V_{\boldsymbol{0}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, получим равенство

$$\begin{aligned} \frac{V_{\boldsymbol{k}}}{V_{\boldsymbol{0}}} = \frac{x_1^{n-1+k_n}}{\varphi'(x_1)} H_{\boldsymbol{k}'}(x_2, x_3, \dots, x_n) + \frac{x_2^{n-1+k_n}}{\varphi'(x_2)} H_{\boldsymbol{k}'}(x_1, x_3, \dots, x_n) + \\ + \dots + \frac{x_n^{n-1+k_n}}{\varphi'(x_n)} H_{\boldsymbol{k}'}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}). \end{aligned} \tag{8}$$

В силу того, что $h_k(0, x_2, \dots, x_n) = h_k(x_1, x_2, \dots, x_n) - x_1 h_{k-1}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, и в силу равенства

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ x & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^{n-1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} - xa_{12} & a_{23} - xa_{13} & \dots & a_{2n} - xa_{1n} \\ a_{32} - xa_{22} & a_{33} - xa_{23} & \dots & a_{3n} - xa_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} - xa_{n-1,2} & a_{n3} - xa_{n-1,3} & \dots & a_{nn} - xa_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

получим, что

$$\begin{aligned} H_{\boldsymbol{k}'}(x_2, x_3, \dots, x_n) = \det{(h_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_n) - x_1 h_{i-1,j}(x_1, x_2, \dots, x_n))}_{i,j=2}^{n} = \\ = \begin{vmatrix} 1 & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ x_1 & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & h_{n2} & \dots & h_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} x_1^{j-1} \mathcal{H}_{1j}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом

$$H_{\boldsymbol{k}'}(x_1, x_3, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} x_2^{j-1}\mathcal{H}_{1j}, \ \ldots, \ H_{\boldsymbol{k}'}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = \sum_{j=1}^{n} x_n^{j-1}\mathcal{H}_{1j}.$$

Подставив полученные равенства в формулу (8), получим, что

$$\frac{V_{\boldsymbol{k}}}{V_{\boldsymbol{0}}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{k_n+n-1}}{\varphi'(x_i)} \cdot \sum_{j=1}^{n} x_i^{j-1}\mathcal{H}_{1j} = \sum_{j=1}^{n}\mathcal{H}_{1j} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{k_n+n+j-2}}{\varphi'(x_i)} = \sum_{j=1}^{n}\mathcal{H}_{1j}h_{k_n+j-1} = H_{\boldsymbol{k}}. \ \blacksquare$$

В заключение заметим, что суммы (3) определены при всех целых k. Случай, когда $k \le -n$, нетрудно свести к случаю $k \ge 0$ посредством замены $y_i = \frac{1}{x_i}$. В результате мы получим следующую общую формулу:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{n+k-1}}{\varphi'(x_i)} = \begin{cases} h_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ при } k \ge 0, \\ 0 \text{ при } k = -1, -2, \ldots, 1-n, \\ \frac{(-1)^{n-1}}{x_1 x_2 \ldots x_n} h_{-k-n}\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}\right) \text{ при } k \le -n. \end{cases}$$

Литература

1. *Grosov M. S., Taiani G.* Vandermonde strikes again // The American Mathematical Monthly. Vol. 100, N 6. 1993. P. 575–577.

2. *Прасолов В. В.* Задачи и теоремы линейной алгебры. 2-е изд. М., 2008. 536 с.

3. *Cornelius E. F., JR.* Identities for complete homogeneous symmetric polinomials // JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications. Vol. 21, N 1. 2011. P. 109–116.

Статья поступила в редакцию 22 октября 2015 г.

Сведения об авторах

Беккер Борис Меерович — кандидат физико-математических наук, доцент; b.bekker@spbu.ru

Иванов Олег Александрович — доктор педагогических наук, профессор; o.a.ivanov@spbu.ru

Меркурьев Александр Сергеевич — доктор физико-математических наук, профессор; merkurev@math.ucla.edu

ON AN ALGEBRAIC IDENTITY AND FORMULA JACOBI—TRUDI

Boris M. Bekker[1], *Oleg A. Ivanov*[1], *Alexander S. Merkurjev*[2]

[1] St. Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7-9, St. Petersburg, 199034, Russian Federation; b.bekker@spbu.ru, o.a.ivanov@spbu.ru

[2] University of California, 405 Hilgard Avenue, Los Angeles, CA 90095; merkurev@math.ucla.edu

The first Jacobi—Trudi identity expresses Schur polynomials as certain determinants of matrices whose entries are complete homogeneous polynomials. The definition of Schur polynomials was given by Cauchy in 1815 as a quotient of certain determinants defined by an integer partition with at most n non-zero parts. Schur functions became very important because of their close relationship with the irreducible characters of both the symmetric groups and the general linear groups, and for their combinatorial applications. The Jacobi—Trudi identity was first stated by Jacobi in 1841 and proved by Nicola Trudi in 1864. Since then this identity and its numerous generalizations have been the focus of much attention due to the important role they play in various areas of mathematics including mathematical physics, representation theory, and algebraic geometry, and various proofs based on different ideas (in particular, a natural combinatorial proof using Young tableaux techniques) have been found. In our paper, we give a short and simple proof of the first Jacobi—Trudi identity and discuss its relationship with some other well-known polynomial identities. Refs 3.

Keywords: a generalized Vandermonde determinant, Schur polynomials.

References

1. Grosov M. S., Taiani G., “Vandermonde strikes again”, *The American Mathematical Monthly* **100**(6), 575–577 (1993).

2. Prasolov V. V., *Problems and Theorems in Linear Algebra* (2nd ed. Moscow, 2008, 536 p.) [in Russian].

3. Cornelius E. F., JR., “Identities for complete homogeneous symmetric polinomials”, *JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications* **21**(1), 109–116 (2011).